

“报童问题”中风险偏好下的条件风险值及其优化

简惠云, 许民利

(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘要: 建立了报童随机利润的分布函数, 得到任意风险水平下的 VaR 解析表达式或应满足的条件. 考虑缺货成本, 针对风险规避和风险偏爱两种情况, 分别建立不同订购量和风险水平下的条件风险值模型, 并将模型中对利润变量的积分转换为对随机需求变量的积分, 解决了模型中因包含 VaR 变量而求解困难的问题. 分析了给定风险水平下的最优决策, 讨论了缺货成本为 0 的特殊情形. 风险中性报童的期望利润与最优决策可由风险规避或风险偏爱的相应公式推导. 最后对下一步的研究方向进行了展望.

关键词: 报童问题; 风险规避; 风险偏爱; 缺货成本; 条件风险值

中图分类号: F224; F274

文献标志码: A

Conditional value-at-risk approach and its optimization of newsvendor with risk preference

JIAN Hui-yun, XU Min-li

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: JIAN Hui-yun, E-mail: jianhuiyun@163.com)

Abstract: Newsvendor's profit distribution function is developed, and the formula of value-at-risk (VaR) is derived directly at a giving risk level. Conditional VaR (CVaR) models with different order quantity and risk levels are developed respectively for risk-averse and risk-taking with considering of shortage cost. The integration variable in the models is changed to random demand instead of profit, which makes it easy to solve CVaR model with VaR. The optimal decision of newsvendor with CVaR is studied under giving risk level. On this basis, the CVaR model and optimal decision are also discussed with no shortage cost. The expected profit and optimal decision of risk-neutral newsvendor can be derived from the related formula of risk-averse or risk-taking. Finally, the study directions are indicated.

Key words: newsvendor problem; risk-averse; risk-taking; shortage cost; conditional value-at-risk

0 引言

报童模型是库存管理的一个基本模型, 经典报童问题的最优化决策均基于风险中性假设. 然而, 行为运作管理的相关实验研究发现, 由于市场需求的不确定性, 人们在决策时很少是风险中性的, 并不总是按期望利润最大化原则决策^[1-3]. 研究有风险偏好的报童最优化决策问题具有理论和现实意义. 风险价值 (VaR) 是度量金融风险常用的方法之一, 由于对资产组合风险衡量的精确性、综合性和实用性, VaR 广泛应用于金融机构和监管部门, 但其不满足一致性风险测度公理, 缺乏对模型尾部风险的控制. 条件风险价值 (CVaR) 克服了这些缺陷, 它能够监测极端市场

情况, 较 VaR 或均值-方差等其他风险度量方法更能体现投资组合中的潜在风险, 计算上也容易处理, 因此, CVaR 在风险测度中受到了广泛关注和使用^[4].

近年来, CVaR 常用在具有风险偏好的报童决策分析和相关的供应链管理研究领域. 于春云等^[5-6]利用 CVaR 作为零售商或供应商的决策准则, 研究了供应链优化和协调问题. 叶飞等^[7]利用 CVaR 度量具有风险规避特性的农户收益, 研究了订单型农业供应链协调契约机制. 马利军等^[8]研究了具有风险厌恶零售商的供应链合作博弈, 利用 CVaR 度量零售商的风险. Gan 等^[9]利用条件风险价值研究了零售商具有下行风险约束的供应链协调机制. 许明辉等^[10]和 Gotoh 等^[11]研究了报童问题中带有缺货惩罚的 CVaR 决策

收稿日期: 2012-11-05; 修回日期: 2013-01-03.

基金项目: 教育部人文社科基金项目(09YJC630230); 湖南省自然科学基金项目(10JJ3023); 湖南省科技计划项目(2011FJ3241).

作者简介: 简惠云(1971—), 女, 讲师, 博士生, 从事物流与供应链管理的研究; 许民利(1969—), 男, 副教授, 从事物流与供应链管理等研究.

准则下的优化问题, 研究表明, 风险厌恶环境下, 考虑缺货成本比不考虑缺货成本时的最优决策要复杂, 且最优订购量并不一定比风险中性时小. Hsieh 等^[12]研究了由 1 个风险中性供应商和 2 个风险厌恶零售商组成的二级供应链中, 零售商的风险规避程度对制造商退货策略的影响. 以上文献大都假定决策人风险规避, 而实际上, 风险偏好除了风险中性和风险规避外, 还有风险偏爱. Werner 等^[13]综合考虑了报童问题中决策人的风险规避和风险偏爱特性, 在目标函数中对低于和高于分位数的平均收益分别赋予不同的权重, 通过权重因子刻画人的风险偏好特征. 邱若臻等^[14]对零售商建立了具有风险规避和偏爱特征的集成目标函数, 并将其应用于供应链回购契约的决策分析中.

从报童问题已有的 CVaR 研究文献看, 人们或者对 CVaR 模型进行简化, 不考虑缺货成本, 或者假设决策者风险规避. 现有研究缺乏既考虑缺货成本、又考虑不同风险偏好下的条件风险值模型. 另一方面, CVaR 定义中包含了 VaR 函数, 因此造成 CVaR 实际求解困难. Rockafellar 等^[15-16]提出了具有良好计算特性、针对一般随机损失函数建立的 CVaR 求解公式, 现有文献基本上均参照该方法对 VaR 和决策变量求极值. 虽然该方法证明了最小化 CVaR 的同时也使 VaR 值最小, 但在报童问题特定的情境下, 求出的 VaR 和 CVaR 的含义并不直观, 且针对一般随机损失函数建立的 CVaR 优化公式也不适用于风险偏爱的情形.

本文与报童问题中已有 CVaR 研究的区别主要有 3 点: 1) 针对报童问题, 通过建立随机利润的分布函数直接得到 VaR 的解析表达式或应满足的条件, 再从条件风险值的定义出发, 根据风险水平和订购量的不同, 建立只含有决策变量的 CVaR 表达式, 解决了 CVaR 求解困难的问题; 2) 考虑了缺货惩罚, 并在此基础上分析缺货成本为 0 的简化情况; 3) 分别考虑了风险规避和风险偏爱两种情况, 而风险中性只是风险规避或风险偏爱的特例.

1 报童模型中的风险价值分析

1.1 随机利润变量的分布函数

报童问题中, 市场需求 X 为随机变量, 取值区间为 $[0, u_h]$. 产品订货成本和售价分别为 w 和 p , 残值为 v , 缺货成本为 $s (s \neq 0)$. 设 $f(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 分别为需求变量 X 的密度函数和分布函数, $g(q, x)$ 为订购量 q 需求 x 下的随机利润, 有

$$g(q, x) = p \min\{x, q\} - wq + v(q - x)^+ - s(x - q)^+.$$

给定 q , 由于 x 随机, $g(q, x)$ 也是一个随机变量. 设 $Z = g(q, x)$, 则 Z 的分布函数为

$$G(z) = P\{Z \leq z\} =$$

$$P\{p \min\{x, q\} - wq + v(q - x)^+ - s(x - q)^+ \leq z\},$$

其中 z 为目标函数.

对 $G(z)$ 函数分两种情况进行分析:

1) 当 $x \leq q$ 时, 有

$$P\{px - wq + v(q - x) \leq z\} = P\left\{x \leq \frac{(w - v)q + z}{p - v}\right\}.$$

令 $q_1 = ((w - v)q + z)/(p - v)$, 记

$$G_1(z) = F(q_1). \tag{1}$$

2) 当 $x \geq q$ 时, 有

$$P\{(p + s - w)q - sx \leq z\} = P\left\{x \geq \frac{(p + s - w)q - z}{s}\right\}.$$

令 $q_2 = ((p + s - w)q - z)/s$, 记

$$G_2(z) = 1 - F(q_2). \tag{2}$$

由于目标利润 $z \leq (p - w)q$, 有 $q_1 \leq q$, $q_2 \geq q$.

图 1(a)~图 1(c) 为缺货成本不为 0 时, 某订购量 q 的随机利润 Z 与需求 X 间的关系. B 为利润最大点, 在需求 $x = q$ 时获得, 最大利润 $Z_{\max} = (p - w)q$, 其他需求下, 利润均比 Z_{\max} 小. A 点表示最小需求时, 产生了最大库存, 实现利润为 $t_1 = -(w - v)q$. C 点表示当需求 $x = u_h$ 时, 产生了最大缺货, 实现利润 $t_2 = (p + s - w)q - su_h$.

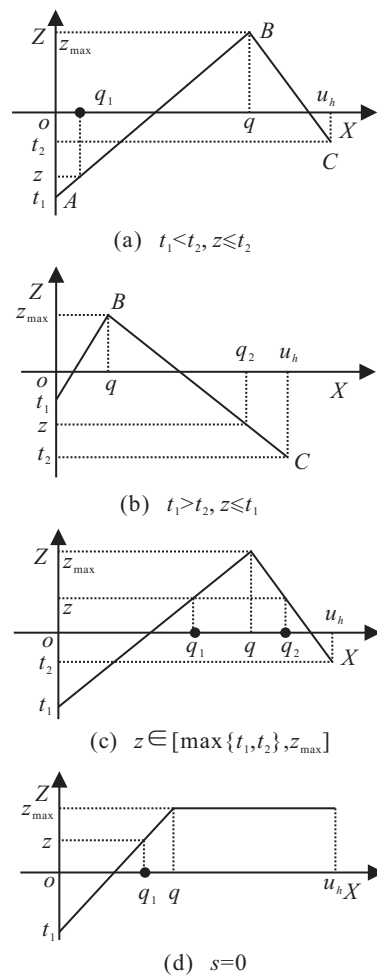


图 1 随机利润 Z 与需求间的关系

根据上述分析并结合图 1, 可以得到随机利润变量 Z 的分布函数为

$$G(z) = \begin{cases} G_1(z), & t_1 < t_2, z \in [t_1, t_2]; \\ G_2(z), & t_1 > t_2, z \in [t_2, t_1]; \\ G_1(z) + G_2(z), & z \in [\max\{t_1, t_2\}, z_{\max}]. \end{cases} \quad (3)$$

对于某个确定的订购量 q , 或者 $t_1 > t_2$, 或者 $t_1 < t_2$, 因此分布函数 $G(z)$ 只有两种情况, 它是分段函数, 也是连续函数, 如图 2 所示.

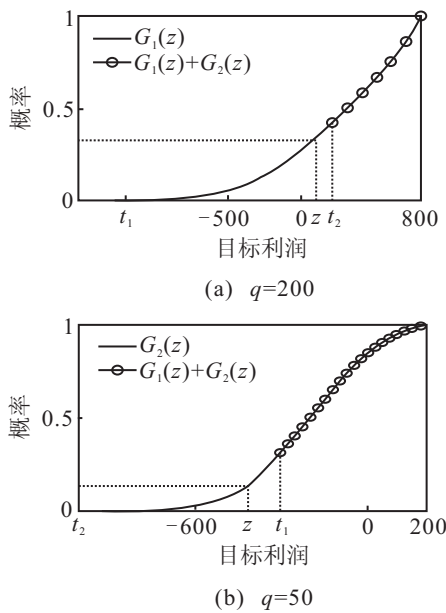


图 2 随机利润的分布函数

1.2 风险价值的确定

设任意风险水平 $\beta \in [0, 1]$, 利润 Z 的风险价值定义为 $\text{VaR}_\beta(Z) = \min\{z \mid G(z) \geq \beta\}$. 报童问题中, $G(z)$ 连续且是 z 的严格递增函数, 所以 $\text{VaR}_\beta(Z) = G^{-1}(\beta)$. 设 $p = 12, w = 8, s = 4, v = 2$, 随机需求服从均值为 150、方差为 50 的截尾正态分布, 需求区间 $X \in [0, u + 4\sigma]$, 可以得到两种情况下的利润分布函数, 如图 2 所示.

由图 2 可见, 给定概率 β , 报童的风险价值为 $\text{VaR}_\beta(Z) = z = G^{-1}(\beta)$. 该式也称为 β 分位数利润, 记为 z_β , 表示随机利润小于等于阈值 z_β 的概率为 β . 根据订购量 q 的不同, z_β 的表达分 3 种情况:

1) 如图 2(a) 所示, 当 $z \leq t_2$ 时, $z = G_1^{-1}(\beta)$, 结合式(1)有

$$z_\beta = (p - v)F^{-1}(\beta) - (w - v)q. \quad (4)$$

z_β 即为风险规避水平 β 下的风险价值. 将条件 $z \leq t_2$ 换算成对订购量 q 的约束, 由式(4)和 $z \leq t_2$ 可得到

$$q \geq \frac{(p - v)F^{-1}(\beta) + su_h}{p + s - v}.$$

记

$$q_h = ((p - v)F^{-1}(\beta) + su_h)/(p + s - v).$$

2) 如图 2(b) 所示, 当 $z \leq t_1$ 时, $z = G_2^{-1}(\beta)$, 结合式(2)有

$$z_\beta = (p + s - w)q - sF^{-1}(1 - \beta). \quad (5)$$

条件 $z \leq t_1$ 换算成对订购量 q 的约束, 由式(5)和 $z \leq t_1$ 可得到

$$q \leq sF^{-1}(1 - \beta)/(p + s - v).$$

记

$$q_l = sF^{-1}(1 - \beta)/(p + s - v).$$

3) 如图 2 所示, 当 $z \in [\max\{t_1, t_2\}, Z_{\max}]$ 时, z_β 满足 $G_1(z_\beta) + G_2(z_\beta) = \beta$, 即

$$1 + F(q_1) - F(q_2) = \beta. \quad (6)$$

订购量 q 的取值区间为 $q_l \leq q \leq q_h$.

由图 2 可见, 给定一个概率 β , z_β 值即可确定, 而且惟一.

2 报童问题中风险规避下的条件风险值和最优决策

2.1 条件风险价值定义

给定 $\beta \in [0, 1]$, 在风险规避时, 条件风险值 $\text{CVaR}_\beta Z(q)$ 指的是低于分位数利润 z_β 的平均利润, 即

$$\text{CVaR}_\beta Z(q) = E(Z \mid Z \leq z_\beta) = \frac{1}{\beta} \int_{Z \leq z_\beta} zg(z)dz. \quad (7)$$

其中: $g(z)$ 为利润随机变量 Z 的密度函数; z_β 值由式(4)~(6)中的一个式子确定, 取决于 q 值和 β 的大小. 由条件风险值的定义可知, 当 $\beta = 1$ 时为风险中性.

2.2 条件风险值和最优订购量分析

1) 当 $q \geq q_h$ 时, $z_\beta = (p - v)F^{-1}(\beta) - (w - v)q$.

虽然由式(3)可知利润变量 z 的分布函数 $G(z)$, 但对于较复杂的需求分布, 得到 $g(z)$ 的表达式较为困难, 可以把对利润 z 的积分转换为对需求变量 x 的积分. 当 $z = z_\beta$ 时, $G(z_\beta) = G_1(z_\beta) = F(q_1) = \beta$, 故 $q_1 = F^{-1}(\beta)$. 结合图 1(a), 随机利润 $Z \leq z_\beta$ 的积分区间对应于需求区间 $0 \leq X \leq F^{-1}(\beta)$, 故式(7)等价于

$$\text{CVaR}_\beta Z(q) = \frac{1}{\beta} \int_0^{F^{-1}(\beta)} [px - wq + v(q - x)]f(x)dx. \quad (8)$$

式(8)给出了各订购量 q 在选定风险水平 $\beta (q \geq q_h)$ 下的 CVaR 表达式. 对决策变量 q 求极值有

$$\partial \text{CVaR}_\beta Z(q) / \partial q = (v - w)q < 0,$$

表明订购区间内 CVaR 随着 q 的增加单调递减, q 越小越好.

2) 当 $q \leq q_l$ 时, $z_\beta = (p + s - w)q - sF^{-1}(1 - \beta)$.

当 $z = z_\beta$ 时, $G(z_\beta) = G_2(z_\beta) = 1 - F(q_2) = \beta$, 故 $q_2 = F^{-1}(1 - \beta)$. 结合图 1(b), 随机利润 $z \leq z_\beta$ 的区间对应于需求区间 $F^{-1}(1 - \beta) \leq X \leq u_h$, 故式 (7) 等价于

$$CVaR_\beta Z(q) = \frac{1}{\beta} \int_{F^{-1}(1-\beta)}^{u_h} [pq - wq - s(x - q)]f(x)dx. \quad (9)$$

对 q 求极值有

$$\partial CVaR_\beta Z / \partial q = (p + s - w) > 0,$$

表明该区间内 CVaR 随着 q 的增加线性递增, q 越大越好.

3) 当 $q_l \leq q \leq q_h$ 时, z_β 满足式 (6), 由 $1 + F(q_1) - F(q_2) = \beta$ 可求出 z_β .

随机利润 $z \leq z_\beta$ 的概率为 β , 可以看作由两部分构成, 如图 1(c) 所示. 当需求在 $[0, q_1]$ 之间时, $z \leq z_\beta$ 的概率为 $F(q_1)$; 当需求在 $[q_2, u_h]$ 之间时, $z \leq z_\beta$ 的概率为 $1 - F(q_2)$, 两部分概率之和为 β . 故式 (7) 等价于

$$CVaR_\beta Z(q) = \frac{1}{\beta} \left\{ \int_0^{q_1} [(p - v)x - (w - v)q]dF(x) + \int_{q_2}^{u_h} [(p + s - w)q - sx]dF(x) \right\}. \quad (10)$$

对式 (10) 求一阶导数有

$$\partial CVaR_\beta Z(q) / \partial q = \frac{1}{\beta} \{ (v - w)F(q_1) + (p + s - w)[1 - F(q_2)] \},$$

而

$$\partial^2 CVaR_\beta Z(q) / \partial q^2 = -\frac{1}{\beta} \left\{ f(q_1) \frac{(w - v)^2}{p - v} + f(q_2) \frac{(p + s - w)^2}{s} \right\} < 0,$$

故存在最优订购量 q . 令一阶导数为 0, 可以得到最优订购量满足

$$(v - w)F(q_1) + (p + s - w)[1 - F(q_2)] = 0. \quad (11)$$

在求一阶导数的过程中, 需要利用条件 $z = (v - w)q + (p - v)q_1 = (p + s - w)q - sq_2$. 因为 q_1, q_2 满足式 (6), 与式 (11) 联立方程组求解, 得到最优订购量为

$$q^* = \frac{1}{p + s - v} \left\{ (p - v)F^{-1} \left(\frac{p + s - w}{p + s - v} \beta \right) + sF^{-1} \left(1 - \frac{w - v}{p + s - v} \beta \right) \right\}. \quad (12)$$

由于 $q_l \leq q^* \leq q_h$, 且 $G(z)$ 为连续函数, 综合前述条件风险价值的两种极值情况可以得出, 对于任意 β 值, 最优订购量符合式 (12). 同时可以得到 $q = q^*$ 时风险水平 β 下的最大风险价值

$$z_\beta^* = (p + s - w)q - sF^{-1} \left(1 - \frac{w - v}{p + s - v} \beta \right). \quad (13)$$

图 3 为条件风险值与各订购量的关系, $\beta = 0.1$,

其他参数与第 1.2 节相同. 由图 3 可见, 极大值在订购量 $q_l \leq q \leq q_h$ 区间内获得, β 越小, 表明决策人的风险规避程度越高, 但最优订购量不一定越小. 关于缺货成本 s 对 q^* 的影响可参见文献 [10]. 特殊地, 当 $\beta = 1$ 时, $q_l = 0, q_h = u_h$, 条件风险值公式与式 (10) 相符, 而 $1 + F(q_1) - F(q_2) = 1$, 有 $F(q_1) = F(q_2)$, 即 $z_{\beta=1} = (p - w)q, q_1 = q_2 = q$, 进而有 $CVaR_{\beta=1} Z(q) = E(Z)$, 所以从条件风险值角度来理解期望利润即为比最大利润要小的平均收益. 将 $\beta = 1$ 代入式 (12) 可知, 最优订购量 q^* 满足

$$F(q^*) = \frac{p + s - w}{p + s - v},$$

这正是经典报童问题中最优订购量满足的公式, 由此可知风险中性是风险规避的一种特殊情况.

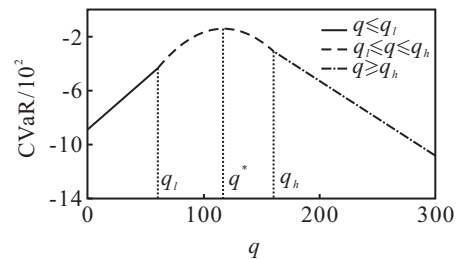


图 3 风险规避时条件风险值与订购量关系

2.3 不考虑缺货成本时的情形

缺货成本 $s = 0$ 是考虑缺货成本时的特例, 由于 $s \neq 0$ 时 $G_2(z)$ 表达式分母为 s , VaR 和 CVaR 不能直接将 $s = 0$ 代入考虑缺货成本时的相应公式中, 进行分析后可以得到相关结论. 如图 1(d) 所示, 由于 $s = 0, t_2 = Z_{\max}$, 当 $z = Z_{\max}$ 时, $G(z) \equiv 1$, 利润分布函数简化为

$$G(z) = \begin{cases} G_1(z), & z < (p - w)q; \\ 1, & z = (p - w)q. \end{cases} \quad (14)$$

以第 1.2 节中参数为例, 得到缺货成本为 0 时的利润概率分布如图 4 所示 ($q = 200$). 图 4 中, 利润分布函数在 $z = Z_{\max} = (p - w)q$ 时为一个断点, 有

$$\lim_{z \rightarrow Z_{\max}} G_1(z) = F \left[\frac{(v - w)q + z}{p - v} \right] = F(q).$$

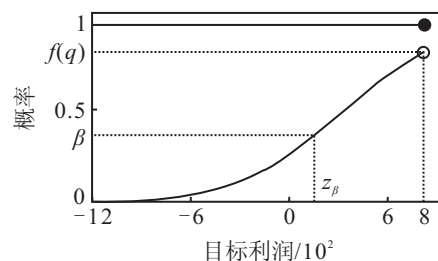


图 4 $s = 0$ 时的利润分布函数

由图 4 可知, 当缺货成本为 0 时, 风险价值和条件风险价值简化为下面两种情况:

1) 当 $\beta \leq F(q)$, 即 $q \geq F^{-1}(\beta)$ 时, $z_\beta = (p - v)F^{-1}(\beta) - (w - v)q$, 这与 $s \neq 0$ 时的第 1 种情况相符. CVaR 的求解公式与式 (8) 一致, 该区域内 CVaR 值随着 q 的增加单调递减.

2) 当 $\beta > F(q)$, 即 $q < F^{-1}(\beta)$ 时, z_β 满足

$$z_\beta \equiv (p - w)q. \quad (15)$$

结合图 1(d), 容易得到 CVaR 的求解公式为

$$\text{CVaR}_\beta Z(q) = \frac{1}{\beta} \left\{ \int_0^q [px - wq + v(q - x)] dF(x) + \int_q^{F^{-1}(\beta)} (p - w)q dF(x) \right\}. \quad (16)$$

对式 (16) 求极值得到最优订购量为

$$q^* = F^{-1} \left(\frac{p - w}{p - v} \beta \right). \quad (17)$$

由于 CVaR 对变量 q 连续, 综合第 1 种情况, 可以得出以下结论: 给定风险规避水平 β , VaR_β 值和最优订购量分别满足式 (15) 和 (17), 它们实际上是式 (12) 和 (13) 中 $s = 0$ 的结果, 该结论与大多文献不考虑缺货成本按文献 [15-16] 对 CVaR 表达式两次求极值优化的结果一致.

从以上分析可以看出, 报童模型中利用随机利润的分布函数求解风险价值 $\text{VaR}_\beta(Z)$ 不需要通过对 CVaR 求导, 只要给定风险规避水平 β , $\text{VaR}_\beta(Z)$ 值即可确定, 且表达式含义与风险价值的定义吻合, 易于理解.

3 报童问题中风险偏爱下的条件风险偏爱值和最优决策

3.1 条件风险偏爱值定义 (CVaRT)

由图 2 和图 3 可见, 风险规避的 CVaR 值实际上是求解比某个分位数利润 z_β 还小的利润平均值, 决策人对高于分位数利润的部分不加以控制, 仅将低利润部分的价值大小作为决策准则. 然而风险规避并不能反映所有人在所有情况下决策时的风险态度, 也有一部分人是风险偏爱的, 因此有必要分析风险偏爱时的最优决策.

不改变 VaR_β 的定义, 设定某个决策者, 如果他决策时仅考虑高于 z_β 的价值部分, 并将其作为决策准则, 而对低于 z_β 的利润部分不加以控制, 则他是一个风险偏爱者. 给出条件风险偏爱值的定义^[5,13]如下:

$$\text{CVaRT}_\beta Z(q) = E(z | z \geq z_\beta) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{z \geq z_\beta} zg(z) dz, \quad (18)$$

其中 β 和 z 的含义与风险规避时相同, 但求解条件风险偏爱值时, 利润变量的积分范围为 $z \geq z_\beta$, 这部分概率为 $1 - \beta$.

给定风险水平 β (低利润部分的概率, $\beta \in [0, 1]$), 其 β 分位数利润即可确定, 与风险规避时完全相同.

由条件风险偏爱值的定义可知, 当 $\beta = 0$ 时为风险中性.

3.2 条件风险偏爱值和最优决策分析

3.2.1 风险偏爱下的条件风险值

1) 当 $q \geq q_h$ 时, $z_\beta = (p - v)F^{-1}(\beta) - (w - v)q$.

由图 1(a) 可知, 当 $z = z_\beta$ 时, 需求值为 $F^{-1}(\beta)$. 风险偏爱值将需求在 $[0, F^{-1}(\beta)]$ 范围内造成的较大损失去掉, 这部分最差利润的可能性为 β . 因此随机利润 $z \geq z_\beta$ 的积分区间对应于需求区间 $[F^{-1}(\beta), u_h]$, 式 (18) 等价于

$$\text{CVaRT}_\beta Z(q) = \frac{1}{1 - \beta} \left\{ \int_{F^{-1}(\beta)}^q [(p - v)x - (w - v)q] dF(x) + \int_q^{u_h} [(p + s - w)q - sx] dF(x) \right\}. \quad (19)$$

对决策变量 q 求极值, 得到最优订购量 q^* 满足

$$F(q^*) = \frac{p + s - w}{p + s - v} + \frac{\beta(w - v)}{p + s - v}. \quad (20)$$

式 (20) 中 q^* 还需满足 $q^* \geq q_h$, 否则该区间不存在极值.

2) 当 $q \leq q_l$ 时, $z_\beta = (p + s - w)q - sF^{-1}(1 - \beta)$.

由图 1(b) 可知, 当 $z = z_\beta$ 时, 对应需求值为 $F^{-1}(1 - \beta)$. 风险偏爱值将需求实现在 $[F^{-1}(1 - \beta), u_h]$ 范围内造成的较大缺货损失去掉, 这部分最差利润的可能性为 β . 因此随机利润 $z \geq z_\beta$ 的积分区间对应于需求区间 $[0, F^{-1}(1 - \beta)]$, 式 (18) 等价于

$$\text{CVaRT}_\beta Z(q) = \frac{1}{1 - \beta} \left\{ \int_0^q [(p - v)x - (w - v)q] dF(x) + \int_q^{F^{-1}(1 - \beta)} [(p + s - w)q - sx] dF(x) \right\}. \quad (21)$$

对决策变量 q 求极值, 有

$$\frac{\partial \text{CVaRT}_\beta Z(q)}{\partial q} = \frac{1}{1 - \beta} \left[\int_0^q (-w + v)f(x) dx + \int_q^{F^{-1}(1 - \beta)} (p + s - w)f(x) dx \right],$$

而

$$\frac{\partial^2 \text{CVaRT}_\beta Z(q)}{\partial q^2} = -\frac{1}{1 - \beta} (p + s - v)f(q) < 0,$$

因此存在极大值.

令一阶导数为 0, 最优订购量满足

$$F(q^*) = (1 - \beta) \frac{p + s - w}{p + s - v}. \quad (22)$$

式 (22) 中 q^* 还需满足 $q^* \leq q_l$, 否则该区间不存在极值.

3) 当 $q_l \leq q \leq q_h$ 时, z_β 满足 $1 + F(q_1) - F(q_2) = \beta$.

由图 1(c) 可知, 随机利润 $z \geq z_\beta$ 的积分区间对应于需求区间 $[q_1, q_2]$, 按下式求解 CVaR:

$$CVaR_{\beta}Z(q) = \frac{1}{1-\beta} \left\{ \int_{q_1}^q [(p-v)x - (w-v)q]dF(x) + \int_q^{q_2} [(p+s-w)q - sx]dF(x) \right\}. \quad (23)$$

对 q 求导, 记一阶导数为 y , 令其为 0, 有

$$y = \frac{1}{1-\beta} [(w-v)F(q_1) + (p+s-w)F(q_2) - (p+s-v)F(q)] = 0. \quad (24)$$

若满足式 (6) 的 q_1, q_2 能使 $y = 0$ 有可行解, 则订购量 q 在该区间有极值.

3.2.2 风险偏爱下最优订购量的讨论

由上述分析可知, 根据订购量和风险水平的不同, 条件风险偏爱值的表达式分 3 种情况, 最优订购量 q^* 的表达式也不相同. 那么在可行决策区间内, 哪个订购量才是最优的? 下面以均匀分布和正态分布为例进行讨论.

1) 随机需求服从均匀分布.

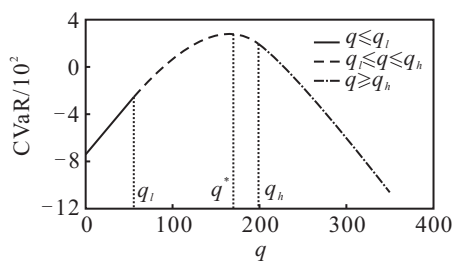
当 $q \geq q_h$ 时, 对于任意 $\beta \leq 1$, 满足式 (20) 的 q^* 均满足 $q^* \geq q_h$ 条件; 当 $q \leq q_l$ 时, 满足式 (22) 的 q^* 使得 $q^* > q_l$ 总是成立, 因此, 该区间内 CVaR 值单调递增, 不存在极值; 当 $q_l \leq q \leq q_h$ 时, 由式 (6) 可解出

$$z_{\beta} = (p-w)q - \frac{(p-v)(1-\beta)su_h}{p+s-v}.$$

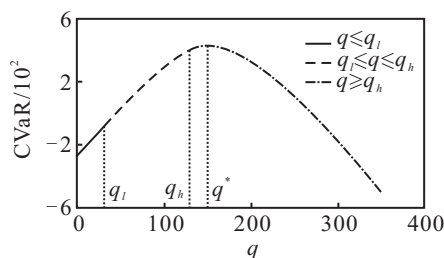
将 z_{β} 代入式 (24) 得到 $y = (p-w) > 0$, 表明 CVaR 随着 q 线性递增, 与风险水平和订购量无关. 综上, 对于均匀分布, 最优订购量总是满足式 (20).

2) 随机需求服从正态分布.

由于 q_l, q^*, q_h 中均含有正态分布的反函数, 不容易比较大小, 利用 Matlab 进行数据模拟, 观察最优订购量在哪个区间获得. 图 5 为最优订购量 q^* 分别在



(a) $q_l \leq q \leq q_h$



(b) $q \geq q_h$

图 5 截尾正态分布下最优订购量取值区间

$q_l \leq q \leq q_h$ 和 $q \geq q_h$ 区间获得的情况. 当 $q_l \leq q \leq q_h$ 时, 按式 (6) 不能直接写出 z_{β} 的解析表达式, 在程序中利用折半搜索算法求 z_{β} 值.

由图 5 可知, 对于截尾正态分布 ($X \in [0, u+4\sigma]$), 最优订购量 q^* 可能由式 (20) 确定, 也可能由式 (24) 确定, 这与价格参数和风险水平有关, 但通过多次模拟没有发现极值取在 $q \leq q_l$ 区间内的情况. 特殊地, 当 $\beta = 0$ 时, $q_l = q_h = su_h/(p+s-v)$, 式 (19) 与 (21) 相同, $CVaR_{\beta=0}Z(q) = E[Z]$, 对于任意的 q , 有

$$z_{\beta=0} = \min\{-(w-v)q, (p+s-w)q - su_h\},$$

所以从条件风险值角度来理解期望利润比最小随机利润要大的平均收益. 最优订购量 q^* 满足

$$F(q^*) = \frac{p+s-w}{p+s-v},$$

这正是风险中性时最优订购量公式, 因此风险中性也可看作是风险偏爱的特例.

3.3 风险偏爱下缺货成本为 0 时的情形

与风险规避类似, 当 $s = 0$ 时, VaR 和 CVaR 的计算不能直接将 $s = 0$ 代入相应公式中, 要稍作变化. 根据图 4 和图 1(d), 缺货成本为 0 的风险价值和条件风险偏爱值退化为以下两种情况:

1) 当 $\beta \leq F(q)$, 即 $q \geq F^{-1}(\beta)$ 时, $z_{\beta} = (p-v)F^{-1}(\beta) - (w-v)q$, 这与 $s \neq 0$ 时风险偏爱下的第 1 种情况相符. 不考虑需求在 $[0, F^{-1}(\beta)]$ 范围内造成的较大损失, CVaRT 的求解公式符合式 (19), 只是将 s 用 0 替换, 最优订购量简化为

$$F(q^*) = \frac{p-w}{p-v} + \frac{\beta(w-v)}{p-v}. \quad (25)$$

Werner 构建的集成目标函数中, 若高利润部分权重设为 1, 则决策人是完全风险偏爱的, 其最优订购量公式与式 (25) 完全一致.

2) 当 $\beta > F(q)$, 即 $q < F^{-1}(\beta)$ 时, z_{β} 满足式 (15), CVaRT 的求解公式为

$$CVaR_{\beta}Z(q) = \frac{1}{1-\beta} \int_{F^{-1}(\beta)}^{u_h} (p-w)qf(x)dx, \quad (26)$$

其中 $\partial CVaR_{\beta}Z(q)/\partial q = p-w$, 此区间内 CVaR 值是订购量 q 的单调递增函数.

综上分析, 不考虑缺货成本时, 给定风险水平 β , 风险偏爱下的最优订购量满足式 (25). 限于篇幅, 风险偏爱下缺货成本 s 对于 q^* 的影响不再讨论.

4 需求区间上界趋近无穷大时的情形

有些需求分布并不假定其取值上限, 通常认为 $u_h \rightarrow \infty$. 当 $s = 0$ 时, 由于没有缺货损失, $u_h \rightarrow \infty$ 对前面风险值、条件风险值和最优订购量的分析结论均没有影响. 当 $s \neq 0, u_h \rightarrow \infty$ 时, 最大缺货时利润 $t_2 = (p+s-w)q - su_h \rightarrow -\infty, t_1 > t_2$ 总成立, 图 1(a) 的情形不存在, 随机利润的分布函数转化为 (见图 2(b))

$$G(z) = \begin{cases} G_2(z), & z \in [t_2, t_1]; \\ G_1(z) + G_2(z), & z \in [t_1, Z_{\max}]. \end{cases} \quad (27)$$

相应地, $s \neq 0$ 时风险价值与条件风险价值计算会相对简化.

4.1 风险价值

目标利润 z 的取值只有 $z \leq t_1$ 和 $z \geq t_1$ 两种情况, 根据订购量和风险水平的不同, 风险价值也只有两种情况:

1) $z \leq t_1$, 即当 $q \leq q_t$ 时, 有

$$z_\beta = (p + s - w)q - sF^{-1}(1 - \beta); \quad (28)$$

2) $z \geq t_1$, 即当 $q \geq q_t$ 时, z_β 满足

$$1 + F(q_1) - F(q_2) = \beta. \quad (29)$$

4.2 风险规避时的条件风险价值和最优订购量

根据风险价值的两种情况, 条件风险值也衍变为两种情形:

1) 当 $q \leq q_t$ 时, CVaR 的表达式与式 (9) 相同;

2) 当 $q \geq q_t$ 时, CVaR 的表达式与式 (10) 相同.

最优订购量仍然满足式 (12).

4.3 风险偏爱时的条件风险偏爱值和最优订购量

风险偏爱时的条件风险值简化为两种情形:

1) 当 $q \leq q_t$ 时, CVaRT 的表达式与式 (21) 相同;

2) 当 $q \geq q_t$ 时, CVaRT 的表达式与式 (23) 相同.

对于正态分布而言, 多次数值模拟表明, 最优订购量由式 (24) 确定, 即在 $q \geq q_t$ 区间获得.

5 结论

本文针对报童问题系统地建立了决策者不同风险偏好下的条件风险值模型, 并分析了给定风险水平下的最优订购量, 主要工作有:

1) 建立了报童随机利润变量的分布函数. 由分布函数容易得到风险水平 β 下的风险价值 VaR_β , 相对于文献 [15-16] 提出的求解方法, VaR_β 的含义更清楚、直观、易于理解.

2) 从 CVaR/CVaRT 的含义出发, 建立了不同订购量和风险水平下的 CVaR/CVaRT 模型, 模型直观、易懂. 根据随机利润与需求之间的关系, 将 CVaR/CVaRT 表达式中对利润变量的积分转换为对随机需求变量的积分, 解决了 CVaR/CVaRT 求解的困难.

3) 相对于文献 [15-16], 不仅给出了各风险水平下的最优订购量公式, 而且根据风险水平和订购量的不同建立了不同的 CVaR/CVaRT 表达式. 在实践中, 由于报童决策前无法量化自己的风险水平, 同时给出风险水平和该风险水平下的最优订购量、条件风险值对具有风险偏好的报童决策具有实际的参考意义.

4) 考虑了缺货成本 s 为 0 和不为 0 两种情况. 研究表明, 当 $s = 0$ 时, VaR 值相对于 $s \neq 0$ 时有些变化, 求解 CVaR/CVaRT 时也不能直接代入 $s \neq 0$ 的相应公式中, 需稍作变动, 但最优订购量公式可统一到缺货成本不为 0 的最优订购量公式中.

5) 考虑了风险规避和风险偏爱两种情况, 分别建立了条件风险值/条件风险偏爱值模型, 并给出了最优订购量公式. 风险中性只是风险规避或风险偏爱的一种特殊情况.

根据本文提出的 CVaR 建模分析思路, 可以较容易地建立综合考虑风险规避和风险偏爱特性的集成目标函数, 并对其进行优化, 同时可以进一步研究某一订购水平下的损失概率和损失期望值.

参考文献(References)

- [1] Benzion U, Cohen Y, Peled R, et al. Decision-making and the newsvendor problem: An experimental study[J]. J of the Operational Research Society, 2008, 59(9): 1281-1287.
- [2] Elena Katok, Diana Yan Wu. Contracting in supply chains: A laboratory investigation[J]. Management Science, 2009, 55(12): 1953-1968.
- [3] Francesca Gino, Gary Pisano. Toward a theory of behavioral operations[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2008, 10(4): 676-691.
- [4] 陈剑利, 李胜宏. CVaR 风险度量模型在投资组合中的运用[J]. 运筹与管理, 2004, 13(1): 95-99.
(Chen J L, Li S H. An application of CVaR models in the portfolio[J]. Operations Research and Management Science, 2004, 13(1): 95-99.)
- [5] 于春云, 赵希南, 彭艳东, 等. 具有风险规避者和偏爱者加盟的供应链优化与协调模型[J]. 系统工程, 2007, 25(1): 13-20.
(Yu C Y, Zhao X N, Peng Y D, et al. Supply chains optimization and coordination mechanisms mode with a risk-averse supplier(or retailer) and a risk-taking retailer(or supplier)[J]. Systems Engineering, 2007, 25(1): 13-20.)
- [6] 于春云, 赵希南, 彭艳东, 等. 基于条件风险值理论的供应链优化与协调模型研究[J]. 中国管理科学, 2007, 15(3): 31-39.
(Yu C Y, Zhao X N, Peng Y D, et al. Study of supply chains optimization and coordination model based on conditional value-at-risk[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(3): 31-39.)
- [7] 叶飞, 林强, 李怡娜. 基于 CVaR 的“公司+农户”型订单农业供应链协调契约机制[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(3): 450-460.
(Ye F, Lin Q, Li Y N. Supply chain coordination

- for “company+farmer” contract-farming with CVaR criterion[J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2011, 31(3): 450-460.)
- [8] 马利军, 李四杰, 严厚民. 具有风险厌恶零售商的供应链合作博弈分析[J]. *运筹与管理*, 2010, 19(2): 12-21.
(Ma L J, Li S J, Yan H M. Channel bargaining with risk-averse retailer[J]. *Operations Research and Management Science*, 2010, 19(2): 12-21.)
- [9] Gan Xiang-hua, Suresh P Sethi, Yan Hou-min. Channel coordination with a risk-neutral supplier and a downside-risk-averse retailer[J]. *Production and Operations Management*, 2005, 14(1): 80-89.
- [10] 许明辉, 于刚, 张汉勤. 带有缺货惩罚的报童模型中的 CVaR 研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(10): 1-8.
(Xu M H, Yu G, Zhang H Q. CVaR in a newsvendor model with lost sale penalty cost[J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2006, 26(10): 1-8.)
- [11] Gotoh Jun-ya, Takano Yui-chi. Newsvendor solutions via conditional value-at-risk minimization[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 179(1): 80-96.
- [12] Hsieh Chung-chi, Lu Yu-ting. Manufacturer’s return policy in a two-stage supply chain with two risk-averse retailers and random demand[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 207(1): 514-523.
- [13] Worner Jammernegg, Peter Kischka. Risk-averse and risk-taking newsvendor: A conditional expected value approach[J]. *Review of Managerial Science*, 2007, 1(4): 93-110.
- [14] 邱若臻, 黄小原. 基于条件风险值准则的供应链回购契约协调策略[J]. *运筹与管理*, 2011, 20(4): 10-16.
(Qiu R Z, Huang X Y. The supply chain buyback contract coordination strategy based on conditional value-at-risk criterion[J]. *Operations Research and Management Science*, 2011, 20(4): 10-16.)
- [15] Tyrrell Rockafellar R, Stanislav Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk[J]. *J of risk*, 2000, 2(3): 21-42.
- [16] Tyrrell Rockafellar R, Stanislav Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions[J]. *J of Banking & Finance*, 2002, 26(7): 1443-1471.

(上接第1445页)

- [37] Iwen Mark. A deterministic sublinear time sparse forier algorithm via non-adaptive compressed seining methods[C]. *Proc of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, 2008: 20-29.
- [38] Yang J F, Zhang Y. Alternating direction algorithms for l_1 - problems in compressive sensing[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM) J on Scientific Computing*, 2011, 33(1): 250-278.
- [39] Zelinski A C, Wald L L, Setsompop K. Sparsity-enforced slice-selective MRI RF excitation pulse design[J]. *IEEE Trans on Medical Imaging*, 2008, 27(9): 1213-1229.
- [40] Willett R M, Gehm M E, Brady D J. Multiscale reconstruction for computational spectral imaging[C]. *Proc of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) and Electronic Imaging-computational Imaging*. Bellingham, 2007, 6498: 64980L.
- [41] Dai W, Sheikh M, Milenkovic O, et al. Compressive sensing DNA microarrays[J]. *EURASIP J on Bioinformatics and Systems Biology*, 2009, 162824: 12.
- [42] Zhang Y, Mei S, Chen Q, et al. A novel image/video coding method based on compressed sensing theory[C]. *IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing(ICASSP)*. Las Vegas, 2008: 1361-1364.
- [43] Prades-Nebot J, Ma Y, Htlang T. Distributed video coding using compressive sampling[C]. *Proc of the 27th Conf on Picture Coding SymPosium*. Chicago, 2009: 165-168.
- [44] 汪振兴, 杨涛, 胡波. 基于互信息的分布式贝叶斯压缩感知[J]. *中国科学技术大学学报*, 2009, 39(10): 1045-1051.
(Wang Z X, Yang T, Hu B. Bayesian compressive sensing based on mutual information[J]. *J of University of Science and Technology of China*, 2009, 39(10): 1045-1051.)
- [45] 朱丰, 张群. 一种新的基于遗传算法的压缩感知重构方法及其在SAR高分辨距离像重构中的应用[J]. *控制与决策*, 2012, 27(11): 1669-1675.
(Zhu F, Zhang Q. A novel compressive sensing reconstruction method based on genetic algorithm and its application in high resolution range of SAR image reconstruction[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(11): 1669-1675.)