

文章编号: 1001-0920(2013)09-1294-09

## 非基于自身状态信息的一致性问题的

李俊兵, 严卫生, 房新鹏

(西北工业大学 航海学院, 西安 710072)

**摘要:** 研究允许部分成员不使用自身状态信息的多智能体系统一致性问题. 给出一个新的通信协议, 允许系统中部分成员甚至全体成员不使用自身信息. 通过研究非负随机矩阵谱半径及其对应有向图的结构, 分别给出固定通信拓扑和动态通信拓扑下的多智能体系统一致性结果, 即在系统通信拓扑所含的生成树中, 当且仅当根节点含有自伴环时, 系统可以渐近实现信息一致性. 仿真结果验证了理论结果的正确性.

**关键词:** 自身信息; 多智能体; 一致性; 固定拓扑; 时变拓扑

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Consensus seeking for multi-agent system without using private state information

LI Jun-bing, YAN Wei-sheng, FANG Xin-peng

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: LI Jun-bing, E-mail: junbli@163.com)

**Abstract:** Consensus problems for the case that part of members without using private state information in a multi-agent system are studied. A new consensus protocol is given with the properties that not all the agents, even none of them need to use their private state information. Based on the matrix theory and graph theory, it is proved that consensus problems can be solved for both fixed and switching topology by studying the structure of graphs corresponding to nonnegative matrices. If and only if the root vertex has a loop in the interaction topology which has a spanning tree, then the system can achieve consensus asymptotically. Simulations results show the correctness of theoretical conclusion.

**Key words:** private information; multi-agent; consensus; fixed topology; switching topology

### 0 引言

近年来, 随着多智能体系统在无人区域智能机器人、自主水下航行器、自动高速公路系统和卫星集群控制等方面的应用, 多智能体信息一致性问题受到国内外众多学者的广泛关注, 并取得了很多有意义的研究成果.

Vicsek 等<sup>[1]</sup>给出了一个离散多智能体模型, 在各智能体具有不同的初始方向角以及可以通信的成员随时间变化时, 所有智能体通过使用最近邻居协议最终可以实现朝着同一个方向移动. 文献[2]利用无向图理论, 对 Vicsek 的模型给出了理论解释, 但其结果要求智能体之间双向通信, 具有一定的应用局限性. 文献[3]把此结果扩展到单向通信情况, 得到了可以实现一致性更加宽泛的条件, 只要系统通信拓扑的联

合含有一棵生成树, 即可实现信息一致性. 文献[4]得到了收敛速度和网络通信图代数连通性的直接关系. 文献[5]通过简单遍历思想得到了实现一致性的充要条件. 文献[6]阐述了系统通信图的连通性在实现一致性中的重要性. 文献[7]利用不连续思想研究了连续时间系统的异步一致性问题. 对于单向通信和双向通信情况, 文献[8]基于树形变换的新思想研究了一致性问题, 文献[9]研究了有限时间状态的一致性问题. 文献[10]研究了仅有部分成员可以局部通信情况下的一致性追踪问题. 关于信息一致性的其他主题研究, 可以参见文献[11-18].

在多智能体系统中, 成员的自身信息不仅影响到个体性能, 而且决定着整个系统的功效. 在上述文献中, 均假设系统中全部成员可以使用自身状态信息,

收稿日期: 2012-06-04; 修回日期: 2012-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60875071, 51209175); 高等学校博士点基金项目(200806990008).

作者简介: 李俊兵(1981—), 男, 博士生, 从事多智能系统控制、编队控制等研究; 严卫生(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多智能体系统、无人水下航行器控制、导航等研究.

然而在实际应用中,并不是全部智能体都可以随时使用自身信息,尤其是在编队控制中,由于硬件配置等原因,仅主个体可以实时更新自身信息,对于从个体而言,无法感知自身状态信息,甚至全部智能体不能使用自身状态信息.基于此,本文给出一种新的一致性协议,允许部分智能体可以不使用自身信息,甚至全部智能体均不使用自身信息,并证明了固定和时变通信拓扑下系统一致性问题的可解性,从而可以实现使用较低配置的智能体系统来完成复杂任务.

本文的主要贡献为,在文献[3]中引理3.4的基础上,进一步减弱 Perron-Frobenius 定理的条件,得到具有相同行和非负矩阵谱半径是唯一模最大特征值的充要条件,即当且仅当在  $A$  对应的有向图所含生成树中,根节点含有自伴环.该结果减弱了文献[3]中引理3.4成立的条件,其要求全部节点均含有自伴环.此外,对于一系列具有相同行和的随机矩阵,其对应的有向图均含有生成树,仅需各个矩阵中根节点对应的对角元素为正,则该列矩阵的任意乘积都是 SIA 矩阵.该结果弱化了文献[3]中引理3.9成立的条件.通过矩阵乘法运算法则可得:当一系列非负矩阵对应的有向图中含有互质联合  $r$  重回路时,其乘积矩阵具有唯一模最大特征值.

## 1 预备知识

本文利用有向赋权图表示多智能体系统的通信拓扑,利用随机矩阵表示智能体之间的信息传递.下面给出图论和矩阵论的相关知识,更加详细的信息可以参见文献[19-22].

一个赋权有向图用  $\mathcal{G} = (V, E, D)$  表示,其中顶点集合为  $V = \{v_i : i \in \mathcal{N}\}$ ,  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $e_{ij} = (v_i, v_j)$  表示  $\mathcal{G}$  中的有向边,其集合为  $E \subseteq V \times V$ .若  $(v_i, v_{i+1}) \in E, j = 1, 2, \dots, k$ ,则称其为  $V$  中长度为  $k$  的有向路径;若  $v_{i_1} = v_{i_k}$ ,则有向路径被称为一个长度为  $k$  的回路.特别地,若  $k = 1$ ,则称顶点  $v_i$  有自伴环.  $D = [d_{ij}]$  是  $\mathcal{G} = (V, E, D)$  的赋权邻接矩阵,邻接元素与图中边的有无相关,当且仅当  $d_{ij} \neq 0, \forall i \in \mathcal{N}$ ,即  $e_{ij} \in E$ .若顶点  $v_i$  有自伴环,则  $d_{ii} > 0$ ,否则  $d_{ii} = 0$ .本文若无特别说明,则所有顶点均不含有自伴环,该假设区别于以上文献的全部顶点默认含有自伴环.顶点  $v_i$  的邻居集合表示为  $N_i = \{v_j \in V : (v_j, v_i) \in E\}$ ,若  $V(\mathcal{G})$  中任意两个不同的顶点  $v_i$  和  $v_j$  之间都存在一条路径,则称  $\mathcal{G}$  强连通.

有向图  $\mathcal{G}(t)$  用来表示系统的通信结构图,顶点  $v_i$  表示第  $i$  个智能体.顶点  $v_i$  和  $v_j$  之间的有向边表示智能体  $i$  和智能体  $j$  之间的通信.

非负矩阵是指矩阵的所有元素均非负,用  $M_n$  表示全部  $n$  阶非负矩阵的集合.各个行和为  $+1$  的非负

方阵称作随机矩阵.若存在非零列向量  $\nu$  使得随机矩阵  $M$  有  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \mathbf{1}\nu^T$ ,则称  $M$  是 SIA 矩阵.对  $A \in M_n (n \geq 2)$ ,若存在置换矩阵  $P \in M_n$  使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

其中:  $1 \leq r < n, B \in M_r, D \in D_{n-r}, C \in M_{r, n-r}, 0 \in M_{n-r, r}$  是零矩阵,则称矩阵  $A \in M_n$  可约.矩阵  $A$  称作不可约是指其不是可约的.关于非负矩阵的不可约性与其对应有向图连通性的一个著名结果是:当且仅当  $A \in M_n$  对应的有向图  $\Gamma(A)$  是强连通时,  $A$  是不可约的.若不可约矩阵  $A \in M_n$  有唯一模最大特征值,则称作素矩阵,素矩阵具有以下性质:

**引理 1**<sup>[20]</sup> 若  $A \in M_n$  是素矩阵,则有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\rho(A)^{-1} A]^m = L. \quad (1)$$

其中:  $L \equiv xy^T, Ax = \rho(A)x, A^T y = \rho(A)y, x > 0, y > 0, x^T y = L$ .进一步,若  $A \in M_n$  是随机矩阵,则  $A \in M_n$  是 SIA 矩阵.

**证明** 引理第1部分的证明见文献[20]的引理8.5.1.对于第2部分,若  $A$  是随机矩阵,则  $\rho(A) = 1$  是唯一模最大特征值,且对应于特征值  $\lambda = \rho(A) = 1$  的特征向量为  $\mathbf{1}$ ,  $A$  是 SIA 矩阵.  $\square$

Wolfowitz 在文献[23]中给出以下极限定理,对研究双向和单向通信结构动态系统的一致性问题具有重要作用.

**引理 2** 令  $M_1, M_2, \dots, M_k$  是有限的 SIA 矩阵,若任意乘积  $M_{i_j}, M_{i_{j-1}}, \dots, M_{i_1}$  是 SIA 矩阵,则对于无限 SIA 矩阵乘积存在一个非负列向量  $\mathbf{c}$  使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M_{i_j}, M_{i_{j-1}}, \dots, M_{i_1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{c}^T.$$

## 2 通信协议

在多智能体系统中,大多数线性协议都假设全部智能体均无条件使用自身的状态信息,其形式为

$$x_i[k+1] = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k] x_j[k], \quad (2)$$

其中  $\alpha_{ij}[k] > 0 \in \bar{\alpha}$  是时变权值,  $\bar{\alpha}$  是任意正数集合.在  $[t_k, t_{k+1})$  时间段内,  $\delta_{ii}[k] \triangleq 1$ ,当第  $j$  个智能体可以收到第  $i$  个智能体的信息时,  $\delta_{ij}[k] = 1$ ; 否则  $\delta_{ij}[k] = 0, \forall j \neq i$ . 等式(2)可以写成如下矩阵形式:

$$x[k+1] = F[k]x[k]. \quad (3)$$

其中:  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T; F[k] = [f_{ij}] \in M_n(\mathbf{R}), (i, j) \in \mathcal{I}, f_{ij} = \frac{\alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k] \delta_{ij}[k]}$ ,  $F[k]$  是系统通信拓扑  $\mathcal{G}(k)$  的邻接矩阵. 易见,  $F[k]$  的对角线元素均为正值,即所有智能体均需要使用自身的状态信息.为克

服协议 (3) 不允许智能体使用自身状态信息的局限, 下面提出一个新的线性协议, 此协议可以省略此假设, 即

$$x_i[k+1] = \frac{1}{\sigma_i[k]\alpha_{ii}[k] + \sum_{j \in N_i[k]} \alpha_{ij}[k]} \times \left\{ \sum_{j \in N_i[k]} \alpha_{ij}[k]x_j[k] + \sigma_i[k]\alpha_{ii}[k]x_i[k] \right\}. \quad (4)$$

在  $[t_k, t_{k+1})$  时间段内, 若第  $i$  个智能体使用自身信息, 则  $\sigma_i[k] = 1$ , 否则  $\sigma_i[k] = 0$ . 等式 (4) 的矩阵形式为

$$x[k+1] = D[k]x[k], \quad (5)$$

其中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . 显然  $D[k] = [d_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$  是一个随机矩阵,  $(i, j) \in \mathcal{I}$ .

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_{ij}[k]\alpha_{ij}[k]}{\sigma_i[k]\alpha_{ii}[k] + \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij}[k]\alpha_{ij}[k]}, & \sigma_i[k] = 1; \\ \frac{\sigma_{ij}[k]\alpha_{ij}[k]}{\sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij}[k]\alpha_{ij}[k]}, & \sigma_i[k] = 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$d_{ii} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ii}[k]}{\sigma_i[k]\alpha_{ii}[k] + \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij}[k]\alpha_{ij}[k]}, & \sigma_i[k] = 1; \\ 0, & \sigma_i[k] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

协议 (4) 与 (2) 有着本质的区别, 协议 (2) 要求每个智能体均无条件地使用自身状态信息, 其假设  $\delta_{ii}[k] \triangleq 1$ , 即式 (3) 中对角线元素均为正数. 文献 [3] 对使用通信协议 (2) 的多智能体信息一致性给出了证明. 协议 (4) 允许各个智能体不使用自身的状态信息, 即式 (5) 中对角线元素可以为零. 可见, 当式 (5) 中对角线元素含有零时, 文献 [3] 中的结论均失效.

### 3 主要结果

#### 3.1 固定通信结构的信息一致性

多智能体系统的信息一致性主要取决于式 (5) 中矩阵  $D[k]$  的最大模特征值重数的唯一性, 文献 [3] 证明了以下结论.

**引理 3** 若非负矩阵  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$  的行和为常数  $\mu > 0$ , 即

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \mu, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

则  $\mu$  是  $A$  的特征值, 对应的特征向量为  $\mathbf{1}$ , 并且  $A$  的谱半径  $\rho(A) = \mu$ . 此外, 当且仅当  $A$  对应的有向图  $\Gamma(A)$  含有一个生成树时, 特征值  $\mu$  的代数重数为 1. 进一

步, 若  $\Gamma(A)$  含有一个生成树并且

$$a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

则  $\mu$  是唯一模最大的特征值.

引理 3 表明, 当式 (8) 成立时,  $\Gamma(A)$  含有生成树为  $\mu$  是  $A$  唯一模最大的特征值的必要条件, 式 (9) 则不是, 所以本文关注条件 (9) 的必要性, 即其是否可以去掉或者存在等价条件. 减弱条件 (9), 有下面的结果.

**引理 4** 各个行和均为  $\mu > 0$  的非负矩阵  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ , 其对应的有向图  $\Gamma(A)$  含有一个生成树, 若根节点含有一个环 (如图 1 所示), 则  $\mu$  是唯一模最大的特征值.

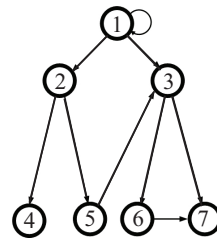


图 1 根节点具有自伴环的有向图

**证明** Ren 等<sup>[3]</sup> 证明了当且仅当  $\Gamma(A)$  含有一个生成树时,  $\lambda = \rho(A) = \mu$  的代数重数为 1. 下面证明在引理条件下  $A$  不存在其他模为  $\mu$  的特征值.

由 Geršgorin 定理,  $A$  的特征值包含在  $n$  个圆盘

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq R'_i(A)\}$$

的并集内, 其中  $R'_i \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 表示矩阵  $A$  的去心行和. 不失一般性, 根节点标号为 1,  $a_{11} > 0$ , 即节点  $v_1$  存在环, 其他对角线元素可以为零. 因为  $a_{11} > 0$ , 此集合至多包含  $n - 1$  个半径均为  $\mu$  的相同圆盘. 当  $a_{11} > 0$  时, 其圆盘半径  $R'_1 = \mu - a_{11} < \mu$ , 此圆盘包含在半径为  $\mu$  的盘内, 因此可知  $A$  的所有特征值包含在半径为  $\mu$  的圆盘内, 且与其他圆盘仅有一个交点, 即在  $x$  正半轴上  $x_0 = \mu$ . 若存在异于  $\mu$  的特征值  $\lambda^* = \mu \cdot \cos \theta + w \cdot \mu \cdot \sin \theta$ , 其中  $w$  为虚部单位, 易见  $|\lambda^*| = \mu$ , 由 Geršgorin 定理可知  $\lambda^*$  是半径为  $\mu$  的圆盘边界上的点. 令

$$Ax^* = \lambda^*x^*, \quad x^* = [x_i] \neq 0,$$

假定  $\delta$  是使  $|x_\delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x^*\|_\infty \neq 0$  成立的一个下标. 当  $\theta = 0$  时,  $\lambda^* = \mu$ , 所以  $0 < \theta < 2\pi$ .

由  $Ax^* = \lambda^*x^*$  有

$$(\lambda^* - a_{ii})x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \quad (10)$$

对所有  $i = 1, 2, \dots, n$  均成立. 由式 (10) 有

$$\begin{aligned}
 |\lambda^* - a_{ii}| \cdot |x_i| &= \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right| \leq \\
 \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij} x_j| &= \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \\
 \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| |x_\delta| &= R'_i |x_\delta|. \tag{11}
 \end{aligned}$$

因此, 如果  $k$  是使  $x_k = |x_\delta|$  的任意下标, 则一定有  $|\lambda^* - a_{kk}| \leq R'_k$ . 因  $\lambda^*$  为边界上的值, 有

$$|\lambda^* - a_{kk}| \geq R'_k,$$

因此对于  $i = k$ , 式(11)取等式, 即

$$\begin{aligned}
 |\lambda^* - a_{kk}| \cdot |x_k| &= \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| = \\
 \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_k| &= R'_k |x_k|, \tag{12}
 \end{aligned}$$

有  $|\lambda^* - a_{kk}| \cdot |x_k| = R'_k |x_k|$ , 即该圆盘经过  $\lambda^*$ . 定义该圆盘为第  $k$  个圆盘,  $a_{kk}$  对应第  $k$  个节点  $v_k$ . 由式(12)有

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| (|x_k| - |x_j|) = 0 \tag{13}$$

和式(13)的每一项是非负的, 若有  $a_{kj} > 0$ , 必有  $|x_k| - |x_j| = 0$ , 即第  $j$  个圆盘经过  $\lambda^*$ . 由于  $\Gamma(A)$  存在一个生成树, 即从根节点到任意节点存在一条有向路径, 即存在  $a_{j_1 1}, a_{j_2 j_1}, \dots, a_{k j_r}$  均大于零, 由式(13)依次可以得到

$$x_1 = x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_r} = x_k.$$

由式(12)可知, 这些圆盘均经过  $\lambda^*$ , 而第1个圆盘包含在半径为  $\lambda^*$  的元盘中, 且仅有一个交点  $x_0 = \mu$ , 如图2所示, 故不可能经过  $\lambda^*$ , 得到  $\lambda = \mu$  是唯一模最大的特征值.  $\square$

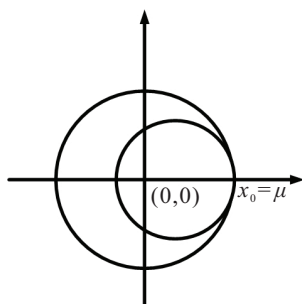


图2 矩阵  $A$  的特征值分布情况

当  $\Gamma(A)$  不是强连通时, 其所含生成树的根节点存在一个自伴环是使得行和  $\mu$  为非负矩阵  $A$  的唯一模最大特征值的一个充分条件. 文献[25]的引理1基于分块矩阵思想证明了同样的结果, 其被用于研究有界时变时延离散系统的一致性问题. 引理4根据树形有向图结构, 着重研究了  $A$  的特征值分布. 此外,

由于矩阵  $A$  要求具有相同的行和, 若根节点不存在环, 则需要根节点的入度不为零, 即从某个节点(称作  $v_p (1 < p \leq n)$ )到根节点存在一条有向路径. 因为  $\Gamma(A)$  含有生成树, 即根节点到任意节点均存在一条有向路径, 所以任意节点  $v_p$  和根节点之间存在一个回路, 回路中的任意顶点经过根节点可以到达其他任意节点.

基于以上分析, 下面给出引理4更加一般化的结果, 并证明根节点上自伴环存在的必要性.

**引理5** 各个行和均为  $\mu > 0$  的非负矩阵  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ , 其对应的有向图  $\Gamma(A)$  非强连通,  $\Gamma(A)$  含有一个生成树, 当且仅当根节点包含在一个回路中, 且在此回路中至少一个节点存在一个环(如图3所示), 则  $\mu$  是唯一模最大的特征值.

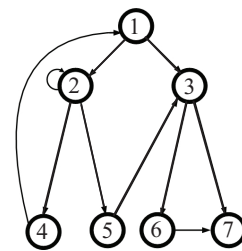


图3 根节点包含在回路中的有向图

**证明** 1) 充分性. 由引理4, 只需证明从回路中存在环的节点  $v_q$  到节点  $v_k$  存在一条有向路径即可. 事实上,  $v_q$  是包含节点  $v_1$  和  $v_p$  回路中的节点,  $v_q$  和  $v_1$  之间存在一条有向路径. 同时, 由于存在生成树, 从根节点  $v_1$  到节点  $v_k$  之间存在一条有向路径, 节点  $v_q$  与节点  $v_k$  之间也存在一条有向路径, 可以表示为

$$\begin{aligned}
 \{(v_q, v_{q_1}), (v_{q_1}, v_{q_2}), \dots, (v_{q_r}, v_1), \\
 (v_1, v_{j_1}), (v_{j_1}, v_{j_2}), \dots, (v_{j_r}, v_k)\}.
 \end{aligned}$$

因此,  $a_{q_1 q}, a_{q_2 q_1}, \dots, a_{1 q_r}, a_{j_1 1}, a_{j_2 j_1}, \dots, a_{j_r k}$  均大于零. 由式(13)可以分别得到

$$x_q = x_{q_1} = x_{q_2} = \dots = x_{q_r} =$$

$$x_1 = x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_r} = x_k,$$

由式(12)可知, 这些圆盘均经过  $\lambda^*$ , 而第  $q$  个圆盘包含在半径为  $\mu$  的圆盘中且仅有一个交点  $x_0 = \mu (\theta = 0)$ . 该圆盘不能经过  $\lambda^*$ , 因此有  $\lambda = \mu$  是唯一模最大的特征值.

2) 必要性. 若  $\Gamma(A)$  的根节点包含在一个回路中, 但不存在环, 则令  $A$  的各个行和均为 1,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

可见  $\Gamma(A)$  含有生成树. 由计算可知

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + w \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - w \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_3 = 1, \lambda_4 = \lambda_5 = 0,$$

且有

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

即模为 1 的特征值有 3 个.  $\square$

引理 5 不仅表明了根节点存在自伴环的必要条件, 而且给出存在自伴环的顶点可以在包含根节点的回路中, 使得自伴环的位置相对灵活, 因此引理 4 和文献 [25] 中的结果是引理 5 的一个特例.

下面考虑系统的通信结构图是强连通的情况.

**引理 6** 一个非负不可约矩阵  $A$  为素矩阵的充要条件是其对应的有向图  $\Gamma(A)$  中所有初级有向回路长度的最大公约是 1.

当  $\Gamma(A)$  是强连通时, 自伴环的存在不是使得行和  $\mu$  为非负矩阵  $A$  的唯一模最大特征值的必要条件, 但仍然是充分条件. 若根节点存在环, 则是一个平凡回路, 即存在长度为 1 的回路, 由引理 6, 引理 5 的充分性仍然成立. 若在  $\Gamma(A)$  中存在  $d$  ( $1 \leq d < n$ ) 个环, 则在  $A$  中存在  $d$  个正的对角元, 由引理 6 可知, 此时引理 5 仍然成立. 若全部顶点都存在环, 则成为文献 [3] 中的情况. 固定通信结构的结果在下面引理后给出.

**引理 7**<sup>[3]</sup> 令  $A = [a_{ij}] \in M_n$  是随机矩阵, 若  $A$  的特征值  $\lambda = 1$  的重数为 1 且其他特征值均满足  $|\lambda| < 1$ , 则  $A$  是 SIA 矩阵.

**定理 1** 令  $\mathcal{G}$  是多智能体系统的通信结构图. 当  $\mathcal{G}$  非强连通时, 若其含有一个生成树, 当且仅当存在一个回路  $\theta$  且此回路中至少有一个节点具有环, 则使用协议 (4), 多智能体系统可以实现一致性; 当  $\mathcal{G}$  强连通时, 所有有向回路的长度是互质的, 使用协议 (4), 系统可以实现一致性.

**证明** 1) 当  $\mathcal{G}$  非强连通时.

① 充分性. 在式 (5) 中, 若通信结构固定, 则  $D$  固定, 有

$$x[k+1] = Dx[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中  $D$  是随机矩阵. 由引理 5 可知:  $\lambda = 1$  是唯一模最大的特征值; 由引理 7 可知,  $D$  是 SIA 矩阵, 即存在一个常数向量  $\nu$  使得  $\lim_{m \rightarrow \infty} D^m = 1\nu^T$ . 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k+1] = \lim_{k \rightarrow \infty} D^k x[0] = 1\nu^T \cdot x[0], \quad (15)$$

系统可以实现一致性.

② 必要性. 若系统的通信拓扑所包含的生成树的根节点不含有自伴环, 则式 (15) 不收敛, 无法实现信息一致性.

2) 当  $\mathcal{G}$  强连通时. 由引理 6 和引理 1 可得其充要性, 详细过程略.  $\square$

**注 1** 在定理 1 中, 系统的通信结构图非强连通, 可以看到至少需要存在一个环, 即至少有一个智能体需要使用自身状态信息. 若没有节点存在环, 即没有智能体使用自身状态信息, 则矩阵  $D$  含有零列和零行. 例如在矩阵 (14) 中, 令  $a_{14} = 0$ , 且  $d_{ij} = a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , 则  $D$  对应的有向图含有一个生成树且不存在环, 有  $\lim_{m \rightarrow \infty} D^m = 0$  且  $\text{rank}(D^m) = 0$ , 此时, 不认为系统可以实现信息一致性.

结果表明: 当系统的全部智能体之间不能相互通信时, 至少有一个智能体需要使用自身信息, 且其信息需要被全部智能体收到, 系统方可实现一致性; 当全部成员可以相互通信时, 允许全部智能体都不使用自身状态信息, 系统可以实现信息一致性.

### 3.2 动态通信结构的信息一致性

对于动态系统, 即使两个矩阵都是素矩阵, 其乘积的素性也不能得到保证, 有

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

由引理 6 可知,  $A$  和  $B$  都是素矩阵, 但是其乘积

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 b_3 + a_4 q_3 & a_1 b_4 \\ 0 & 0 & p_1 b_3 & p_1 b_4 \\ p_2 q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

却不是素矩阵. 为了得到动态系统可以实现信息一致性的条件, 需要进一步研究非负矩阵乘积的性质, 更多详细结果可以参见文献 [22-24].

#### 3.2.1 部分智能体不使用自身状态信息的一致性

与文献 [2-3] 中的结果相比, 若不是全部的对角元均为正, 则下式不再成立:

$$P_1 P_2 \cdots P_m \geq \gamma (P_1 + P_2 + \cdots + P_m), \quad (16)$$

其中  $P_1, P_2, \dots, P_m$  是对角元为正的  $n \times n$  非负方阵. 式 (16) 的一个直观意义是: 对于一系列有向图的乘积, 若每个节点都有环, 则其全部的边都被保留下来; 若没有对角元素为正的假设, 则不能保证乘积图的样式; 若  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  是一列  $n \times n$  非负矩阵, 且这些矩阵中存在一个相同的对角元, 则在其对应的有向图序列  $\Gamma = \{\Gamma(P_1), \Gamma(P_2), \dots, \Gamma(P_m)\}$  的

每个图中, 存在一个含有环的节点, 记为  $v_1$ . 令  $\Gamma_1$  表示全部仅为树形结构且以顶点  $v_1$  为根节点的有向图集合,  $\Gamma_1$  对应的矩阵集合为  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{r_n}\}$ , 其中  $r_n$  表示一个与  $n$  相关的正整数.

**引理 8** 若  $\Gamma$  中每个图中均含有以  $v_1$  为根节点的生成树, 则在  $A$  中存在一个矩阵  $A_p \in A, 1 \leq p \leq r_n$ , 对  $P$  中任意元素的有限乘积存在正数  $\gamma > 0$ , 有

$$P_{i_1} \cdot P_{i_2} \cdots P_{i_k} \geq \gamma \cdot A_p. \quad (17)$$

**证明** 当  $n$  固定时, 显然  $n$  阶矩阵和  $n$  个顶点的有向图都是有限的, 且一一对应. 从而有  $\Gamma_1$  和  $A$  是有限的集合, 将  $\Gamma_1$  中顶点按照深度优先的法则依次从  $1 \sim n$  进行标号. 因为  $\Gamma_1$  中的每个图均含有生成树, 除去含有自伴环的根节点以外, 仅含有  $n - 1$  条长度为 1 的有向路径. 每个节点的入度都为 1, 故  $A$  中各个矩阵除去第 1 个对角元之外, 不存在零行, 且每行仅有一个大于零的元素, 这  $n - 1$  个对角元都在该行主对角元的左边, 即对任意的元素  $a_{ij}$  有

$$i > j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1. \quad (18)$$

假定  $P_{q_1}$  和  $P_{q_2}$  是  $P$  中任意两个矩阵,  $P_{q_{12}} = P_{q_1} \cdot P_{q_2}$ . 在  $A$  中显然存在两个与  $P_{q_1}$  和  $P_{q_2}$  对应的矩阵  $A_{q_1}$  和  $A_{q_2}$ , 使得  $P_{q_i}$  与  $A_{q_i}$  对应的有向图所含的树形结构相同,  $i = 1, 2$ . 即除去根节点  $v_1$  和没有孩子的节点外, 相应节点的父节点和子节点都相同. 令  $p_{ij}^{(k)}$  和  $a_{ij}^{(t)}$  分别表示  $P$  和  $A$  中各个矩阵的元素, 其中  $1 \leq k \leq m, 1 \leq t \leq r_n, i, j = 1, 2, \dots, n$ , 即有  $p_{11}^{(1)}, p_{11}^{(2)}, \dots, p_{11}^{(m)}, a_{11}^{(1)}, a_{11}^{(2)}, \dots, a_{11}^{(r_n)}$  均大于零. 令  $A_{q_{12}} = A_{q_1} \cdot A_{q_2}$ , 下面通过计算得到  $P_{q_{12}}$  对应有向图的结构.

在  $A_{q_{12}}$  中, 首先计算第 1 行的元素, 易见

$$a_{11}^{(q_{12})} = a_{11}^{(q_1)} \cdot a_{11}^{(q_2)} > 0,$$

即  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中顶点  $v_1$  存在一个环. 令  $V_1 = \{v_1\}$ , 单独的节点  $v_1$  可以看成是一个生成树.

当  $i = 2$  时, 由式 (18) 可知  $p_{21}^{(1)}, p_{21}^{(2)}, \dots, p_{21}^{(m)}, a_{21}^{(1)}, a_{21}^{(2)}, \dots, a_{21}^{(r_n)}$  均大于零, 因此有  $a_{21}^{(q_1)} \cdot a_{11}^{(q_2)} = a_{21}^{(q_{12})} > 0$ , 即在  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中, 存在一条从顶点  $v_1$  到  $v_2$  有向路径. 令  $V_2 = \{v_1, v_2\}$ , 即  $v_1$  和  $v_2$  构成一个子树, 且  $v_1$  含有环.

当  $i = 3$  时, 在  $A_{q_1}$  中存在  $a_{3j}^{(q_1)} > 0$ , 且有  $(1 \leq j < i)$ :

1) 若  $j = 1$ , 因为根节点  $v_1$  含有环, 则有  $a_{11}^{(q_2)} > 0$ , 由矩阵的乘法可知,  $A_{q_{12}}$  中的元素  $a_{31}^{(q_{12})} = a_{31}^{(q_1)} \cdot a_{11}^{(q_2)} > 0$ , 即在  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中存在一条从  $v_1$  到  $v_3$  的有向路径, 易见  $V_2$  和  $v_3$  构成一个子树, 且  $v_1 \in V_2$ , 即  $v_3$  的父节点位于子树中, 此时  $V_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

2) 若  $j > 1$ , 则因  $\Gamma(A_{q_2})$  中存在一个生成树, 必

然存在一个顶点  $v_s$ , 使得  $v_s$  到  $v_3$  存在一条有向路径, 即  $a_{3s}^{(q_2)} > 0$ . 由矩阵的乘法可知,  $A_{q_{12}}$  中的元素

$$a_{3s}^{(q_{12})} = a_{3j}^{(q_1)} \cdot a_{js}^{(q_2)} > 0,$$

即在  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中存在一条从顶点  $v_s$  到  $v_3$  的有向路径. 由式 (18) 有  $j < 3, s < j$ , 因此有  $s < 3$ , 即  $v_s \in V_2$ ,  $v_3$  的父节点位于子树中, 从而  $V_2$  和  $v_3$  构成一棵新子树, 此时亦有  $V_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

令  $a_{ij}^{(q_1)}$  为  $A_{q_1}$  中异于  $a_{11}^{(q_1)}, a_{21}^{(q_1)}, a_{3s}^{(q_1)}$  的任意一个非零元素,  $3 < i \leq n, j < i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ . 类似  $i = 3$  情况的讨论, 无论  $j$  为何值, 在  $\Gamma(A_{q_2})$  中必然存在一个顶点  $v_{s'}$ , 使得  $v_{s'}$  到  $v_j$  或者存在一条有向路径, 或者  $v_1$  存在环, 即  $a_{js'}^{(q_2)} > 0$ . 由矩阵的乘法可知,  $A_{q_{12}}$  中的元素

$$a_{is'}^{(q_{12})} = a_{ij}^{(q_1)} \cdot a_{js'}^{(q_2)} > 0,$$

即在  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中存在一条从顶点  $v_{s'}$  到  $v_i$  的有向路径, 且有  $s' < i$ , 即  $v_{s'} \in V_{i-1}$ ,  $v_i$  的父节点位于  $V_{i-1}$  中, 可得  $V_{i-1}$  和  $v_i$  构成一个生成树, 此时  $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ .

综上所述, 当  $i = n$  时,  $V_i = V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $V_n$  中的顶点构成一个生成树, 且  $v_1$  含有环, 即  $\Gamma(A_{q_{12}})$  中恰好含有一个生成树, 且根节点含有环. 在不考虑数值大小的情况下, 有  $A_{q_{12}} \in A$ .

因为  $P_{q_i}$  中的元素不少于  $A_{q_i}$  中的元素, 且各个矩阵中的元素有限, 所以存在足够小的正数  $\varepsilon_i$ , 使得  $P_{q_i} \geq \varepsilon_i \cdot A_{q_i}, i = 1, 2$  成立, 即

$$P_{q_{12}} = P_{q_1} \cdot P_{q_2} \geq \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot A_{q_{12}} = \varepsilon_1 \cdot A_{q_1} \cdot \varepsilon_2 \cdot A_{q_2},$$

故  $\Gamma(P_{q_{12}})$  含有一个生成树, 且根节点含有环. 依此类推,  $P_{i_1} \cdot P_{i_2} \cdots P_{i_k}$  中相邻的两个矩阵可以用  $A$  中的一个矩阵进行放缩. 重复上述过程, 最终存在某个足够小的正数  $\gamma$ , 使得  $P$  中的任意乘积大于  $A$  中的某个矩阵, 即式 (17) 成立.  $\square$

由于  $A_p$  是 SIA 矩阵, 由引理 4 可知,  $P$  中任意矩阵的乘积是 SIA 矩阵, 基于引理 8, 有下面结果.

**定理 2** 令  $\{\mathcal{G}[1], \mathcal{G}[2], \dots, \mathcal{G}[k]\}$  是一致有界、互不相交时间区间  $[t_k, t_{k+1}) (k = 1, 2, \dots)$  上系统的动态通信结构图, 每个图含有一个生成树, 且相同的根节点含有环, 则使用协议 (4), 多智能体系统可以渐近实现一致性.

**证明** 令  $D[k]$  是基于动态通信结构图和权值  $\alpha_{ij}[k]$  的传递矩阵, 则由引理 8, 任意  $D[k]$  的乘积是 SIA 矩阵, 余下部分证明类似文献 [3] 的定理 3.10, 略去.  $\square$

可见, 系统中使用自身信息的智能体可以在系统中作为领导者, 其信息可以被全部智能体收到.

### 3.2.2 全部智能体不使用自身状态信息的一致性 问题

下面给出  $m$  个  $n \times n$  非负矩阵

$$A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}\} \quad (19)$$

的乘积(按照顺序),形式如下:

$$P(A) = A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(m)}. \quad (20)$$

对应于式(19)和(20)的有向图分别表示为

$$\Gamma(A) = \{\Gamma(A^{(1)}), \Gamma(A^{(2)}), \dots, \Gamma(A^{(m)})\} \quad (21)$$

和  $\Gamma(P(A))$ . 假定在  $\Gamma(A^{(1)}), \dots, \Gamma(A^{(m)})$  中依次存在如下有向边:

$$[(v_{i_2}, v_{i_1}), (v_{i_3}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_m}, v_{i_{m-1}}), (v_{i_{m+1}}, v_{i_m})], \quad (22)$$

则称有向边(22)为关于矩阵序列(19)从节点  $v_{i_1}$  到  $v_{i_{m+1}}$  的联合路径. 其中  $(v_{i_{j+1}}, v_{i_j}) \in \Gamma(A^{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . 在式(22)中,若  $v_{i_1} = v_{i_{m+1}}$ ,则称关于矩阵序列(22)存在一条联合回路. 在式(21)中假定存在  $p$  条联合路径

$$[(v_{i_2}^{(j)}, v_{i_1}^{(j)}), (v_{i_3}^{(j)}, v_{i_2}^{(j)}), \dots, (v_{i_{m+1}}^{(j)}, v_{i_m}^{(j)})], \quad (23)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, p$ , 若有  $v_{i_{m+1}}^{(j)} = v_{i_1}^{(j+1)}$ , 则称联合路径

$$\begin{aligned} & [(v_{i_2}^{(1)}, v_{i_1}^{(1)}), (v_{i_3}^{(1)}, v_{i_2}^{(1)}), \dots, (v_{i_m}^{(1)}, v_{i_{m-1}}^{(1)})], \\ & [(v_{i_2}^{(2)}, v_{i_1}^{(2)}), (v_{i_3}^{(2)}, v_{i_2}^{(2)}), \dots, (v_{i_m}^{(2)}, v_{i_{m-1}}^{(2)})], \\ & \vdots \\ & [(v_{i_2}^{(p)}, v_{i_1}^{(p)}), (v_{i_3}^{(p)}, v_{i_2}^{(p)}), \dots, (v_{i_m}^{(p)}, v_{i_{m-1}}^{(p)})] \end{aligned} \quad (24)$$

为关于矩阵序列(19)的  $p$  重联合路径. 在联合路径(24)中,若  $i_{(1)1} = i_{(p)m+1}$ , 则称其为关于矩阵序列(19)的  $p$  重联合回路. 用  $a_{ij}^{(s)}$  和  $a_{ij}$  分别表示矩阵序列(19)中第  $s$  个矩阵  $A^{(s)}$  和乘积矩阵(20)的任意元素,其中  $i, j = 1, 2, \dots, n, 1 \leq s \leq m$ .

**引理 9** 令  $A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}\}$  表示  $m$  个非负不可约矩阵. 在矩阵序列(19)中存在  $r$  条  $p_q (1 \leq q \leq r)$  重联合回路, 其中有一个  $p_i = n$ . 若  $p_q (q = 1, 2, \dots, r_i)$  互质, 则乘积矩阵  $P(A)$  为素矩阵.

**证明** 下面通过计算给出矩阵序列(19)中联合路径与联合  $p$  重联合回路和乘积矩阵之间的关系. 若联合路径(22)存在, 则意味着在矩阵序列(19)中各个矩阵中的元素  $a_{i_1 i_2}^{(1)}, a_{i_2 i_3}^{(2)}, a_{i_3 i_4}^{(3)}, \dots, a_{i_m i_{m+1}}^{(m)}$  均大于零.

矩阵序列乘积的显示形式为

$$P(A) = A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(m)} = \left[ a_{ij} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} a_{i i_1}^{(1)} a_{i_1 i_2}^{(2)} \dots a_{i_{m-1} j}^{(m)} \right], \quad (25)$$

由式(25)可知,  $a_{i_1 i_{m+1}} > 0$ . 若联合  $p_q$  重联合回路存在, 则在  $P(A)$  中依次有

$$a_{i_1^{(2)} i_1^{(1)}} > 0, a_{i_1^{(3)} i_1^{(2)}} > 0, \dots, a_{i_1^{(p)} i_1^{(1)}} > 0, \quad (26)$$

其中  $i_1^{(j+1)} i_1^{(j)}$  的上标  $j (j = 1, 2, \dots, p)$  用于区分  $p$  条联合路径, 这意味着乘积矩阵  $P(A)$  对应的有向图  $\Gamma(P(A))$  中的顶点  $v_{i_1^{(1)}}, v_{i_1^{(2)}}, v_{i_1^{(3)}}, \dots, v_{i_1^{(p)}}$  构成了一条长度为  $p$  的回路.

矩阵序列(19)中的  $r$  条  $p_q (1 \leq q \leq r)$  重联合回路, 对应着  $\Gamma(P(A))$  中  $r$  条长度分别为  $p_q (1 \leq q \leq r)$  的回路. 另外, 长度为  $n$  的回路保证有向图  $\Gamma(P(A))$  是强连通的, 因此  $P(A)$  是不可约的, 因为  $p_q (1 \leq q \leq r)$  互质, 所以  $P(A)$  是素矩阵.  $\square$

引理 9 表明, 若乘积矩阵对应的有向图含有一条  $p$  重联合回路, 则在乘积后的矩阵对应的有向图中, 存在一个长度为  $p$  的回路. 要求  $n$  重联合回路存在, 是因为这样可以保证乘积矩阵的不可约性. 比如

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

虽然两个矩阵都是不可约的, 但是其乘积

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{14}a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21}a_{13} & 0 \\ a_{32}a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{43}a_{34} \end{bmatrix}$$

却不是不可约的. 对于全部智能体均不使用自身信息的情况, 还需要下面的引理.

**引理 10** 若  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s} (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq n)$  是  $\Gamma(A)$  中长度为  $s$  的环, 则在  $\Gamma(A^s)$  中节点  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$  存在一个环, 其中  $A$  是非负矩阵,  $\Gamma(A)$  是相应的有向图,  $\Gamma(A^s)$  为  $A^s$  对应的有向图.

**定理 3** 令  $\{\mathcal{G}_1[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k], \mathcal{G}_1[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k]\}$   $\dots, \mathcal{G}_1[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k]$  为一致有界, 互不相交时间区

间  $[t_k, t_{k+1})$  上具有  $n$  个智能体系统的动态通信结构图,  $\mathcal{G}_i[k] (i = 1, 2, \dots, m_k, k = 1, 2, \dots)$  是强连通的, 且所有节点都不含有自伴环, 即所有智能体都不能使用自身信息. 在相应的时间区间上, 若  $\{\mathcal{G}_1[k], \mathcal{G}_2[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k]\}$  中存在  $r^{(k)}$  条  $p_q^{(k)} (1 \leq q \leq r^{(k)})$  重联合回路, 且至少有一条包含全部顶点, 当且仅当  $p_q^{(k)}$  互质时, 使用通信协议(4), 系统可以实现一致性.

**证明** 令  $D = \{D_1[k], D_2[k], \dots, D_{m_k}[k]\}$  是对

应于时变拓扑  $\{\mathcal{G}_1[k], \mathcal{G}_2[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k]\}$  的矩阵集合, 在  $\{\mathcal{G}_1[k], \mathcal{G}_2[k], \dots, \mathcal{G}_{m_k}[k]\}$  中存在一条包含全部顶点的  $n$  重联合回路, 可以得到  $\Gamma(D[k])$  是不可约的. 互质  $p_q^{(k)}$  重乘积回路意味着  $\Gamma(D[k])$  中的初级回路是互质的. 由引理9可知  $D[k] = D_1[k], D_2[k], \dots, D_{m_k}[k]$  是素矩阵, 则由引理10可知,  $(D[k])^n$  的全部对角元素为正. 再由文献[3]的引理3.9可知,  $(D[k])^n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 的任意乘积是SIA矩阵. 进一步, 由矩阵的有限性和引理2, 一定存在一个常数向量  $y$  使得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x[k+1] &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} D[k]^n D[k-1]^n \dots D[1]^n x[0] &= \\ \mathbf{1} \cdot y^T \cdot x[0], \end{aligned}$$

因此系统可以实现一致性. □

### 4 算例和仿真结果

本节首先给出所使用的两个有向图(图1和图3)邻接矩阵的特征值和谱半径, 用来验证引理5的正确性; 然后使用7个智能体进行仿真实验, 分别给出固定通信结构和动态通信结构下的信息一致性仿真结果.

在图1和图3的邻接矩阵中, 令其非零元素的值彼此相等, 且行和为1, 其特征值均用  $\lambda_1 \sim \lambda_7$  表示. 经计算, 它们的特征值分别为:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -0.2500 + 0.6614 \cdot w, \lambda_3 = -0.2500 - 0.6614 \cdot w, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ .

由计算结果可知, 行和1均是两个随机矩阵唯一模最大的特征值, 验证了引理5的正确性.

对于固定通信拓扑的一致性, 基于引理5, 系统的通信拓扑采用图3, 智能体的初始状态值为  $x(0) = [1, 2, \dots, 7]$ , 使用协议(4), 系统可以渐近实现信息一致性, 结果如图4所示.

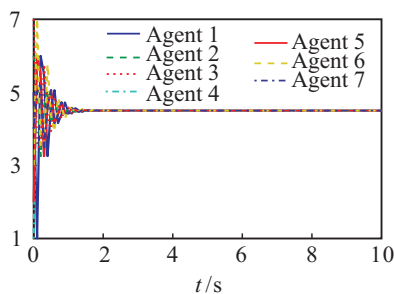


图4 固定通信结构系统的一致性

对于动态系统的一致性, 基于引理8, 给出4个SIA矩阵, 各个矩阵对应的有向图均含有一个生成树, 且根节点含有环. 智能体的初始状态  $x(0) = [1, 2, \dots, 7]$ , 步长为  $t = 0.1$  s. 通过任意随机正整数对4取余运算, 决定下一刻系统的拓扑切换, 用来表示其动态性. 使用协议(4), 图5表示时变拓扑情况下

的一致性结果.

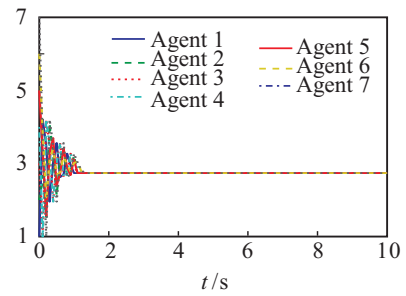


图5 动态通信结构系统的一致性

由图4和图5可见, 当部分智能体不使用自身状态信息时, 使用通信协议(4), 多智能体系统对于固定和时变拓扑均可以很快实现信息一致性.

### 5 结论

本文研究了允许多智能体系统中部分成员不使用自身状态信息情况下的一致性. 若系统的通信拓扑非强连通, 则其所含生成树的根节点具有自伴环是必要的. 有向图的自伴环虽然不影响图的连通性, 但在其对应的邻接矩阵中决定着矩阵的结构, 故其决定着传递矩阵的SIA性. 当全部智能体不使用自身状态信息时, 系统对通信拓扑的连通性要求较高且结构复杂. 结果表明, 即使智能体的硬件配置较低, 通过相互通信, 仍可实现信息一致性, 完成复杂任务.

### 参考文献(References)

- [1] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(2): 1226-1229.
- [2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 45(6): 988-1001.
- [3] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [4] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [5] Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(3): 791-795.
- [6] Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. Consensus over ergodic stationary graph processes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(1): 230-235.
- [7] Xiao F, Wang L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and



- time-varying delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1804-1816.
- [8] Sun Y G, Wang L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607-1613.
- [9] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(1): 950-955.
- [10] Ren W. Consensus tracking under directed interaction topologies: Algorithms and experiments[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2010, 18(1): 230-237.
- [11] 刘学良, 胥布工. 具有多个通信时延的多智能体系统分布式  $H_\infty$  一致性控制[J]. *控制与决策*, 2012, 27(4): 494-500.  
(Liu X L, Xu B G. Distributed  $H_\infty$  consensus control for multiple-agent systems with communication delays[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(4): 494-500.)
- [12] 刘成林, 田玉平. 具有时延的多个体系统的一致性问题综述[J]. *控制与决策*, 2009, 24(11): 1602-1608.  
(Liu C L, Tian Y P. Survey on consensus problem of multi-agent systems with time delays[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1602-1608.)
- [13] 杨洪勇, 张嗣瀛. 离散时间系统的多智能体的一致性[J]. *控制与决策*, 2009, 24(3): 413-416.  
(Yang H Y, Zhang S Y. Consensus of multi-agent system with discrete-time[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(3): 413-416.)
- [14] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据[J]. *控制与决策*, 2012, 27(4): 584-592.  
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(4): 584-592.)
- [15] 严卫生, 李俊兵, 王银涛. 受损多智能体系统的信息一致性[J]. *自动化学报*, 2012, 38(11): 1880-1884.  
(Yan W S, Li J B, Wang Y T. Consensus for damaged multi-agent system[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1880-1884.)
- [16] 李俊兵, 严卫生, 房新鹏. 离散多智能体系统信息一致性的平衡点[J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(4): 513-519.  
(Li J B, Yan W S, Fang X P. Equilibrium of consensus problems for discrete-time multi-agent systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 513-519.)
- [17] Fax A J, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [18] Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state[J]. *System and Control Letters*, 2007, 56(7/8): 474-483.
- [19] Diestel R. *Graph theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [20] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. New York: Cambridge University Press, 1987.
- [21] Godsil C, Royle G. *Algebraic graph theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [22] Wallace D A R. *Groups, Rings and fields*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [23] Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices[J]. *Proc of the American Mathematical Society*, 1963, 14(5): 733-737.
- [24] Keller E L. Primitivity of the product of two leslie matrices[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1980, 42(2): 181-189.
- [25] Taylor G C. Primitivity of the products of leslie matrices[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1985, 47(1): 23-34.
- [26] Shao J Y. Products of irreducible matrices[J]. *Linear Algebra and Its Application*, 1985, 68: 131-143.
- [27] Xiao F, Wang L. State consensus for multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays[J]. *Int J of Control*, 2006, 79(10): 1277-1284.

~~~~~

(上接第1293页)

- [18] 张维迎. *博弈论与信息经济学*[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996.  
(Zhang W Y. *Game theory and information economics*[M]. Shanghai: Shanghai People's Publishing House, 1996.)
- [19] Chen Y J, Shum S, Xiao W Q. Should an OEM retain component procurement when the CM produces competing products[J]. *Production and Operations Management*, 2012, 21(5): 907-922.