Laplace定理

- 在行列式中，任取k行，则由这k行元素组成的一切k阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值。

7. Cramer法则

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ （方程组的系数行列式）

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

一、Cramer法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解并且解是唯一的，解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}. \qquad (2)$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理中包含着三个结论：

- 方程组有解；（解的存在性）
- 解是唯一的；（解的唯一性）
- 解可以由公式(2)给出.

这三个结论是有联系的. 应该注意，该定理所讨论的只是系数行列式不为零的方程组，至于系数行列式等于零的情形，将在第三章的一般情形中一并讨论.

正面在书的33页：必要+充分

关于Cramer法则的等价命题

设
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

定理4　如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，则该线性方程组一定有解，而且解是唯一的 .

定理4′ 如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

例 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时，能否用Cramer法则解方程组？为什么？此时方程组的解为何？

答：当线性方程组的系数行列式为零时，不能用Cramer法则解方程组，因为此时方程组的解为无解或有无穷多解.

三、小结

1. 用Cramer法则解线性方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2. Cramer法则的意义主要在于建立了线性方程组的解和已知的系数以及常数项之间的关系．它主要适用于理论推导.

当未知量个数较多时，计算行列式较为繁琐，

所以这个方法解线性方程组不是特别实用，第三章继续讨论

线性代数

第二章 矩阵

张祥朝

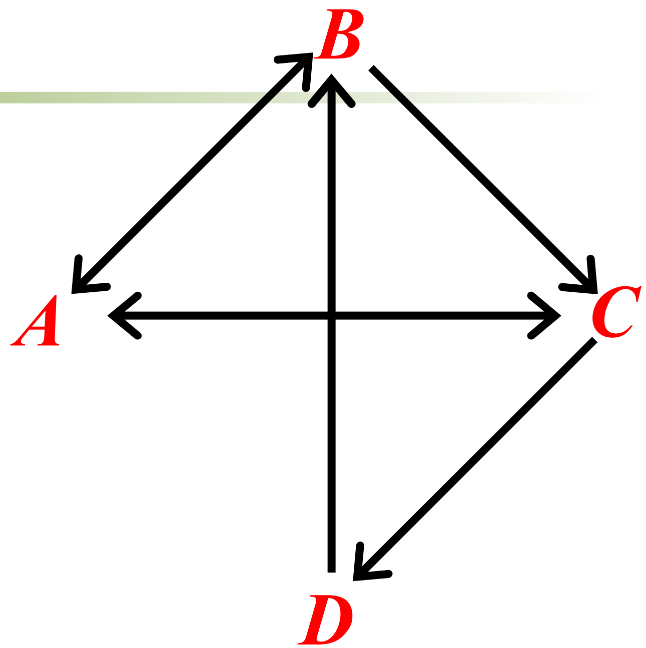
复旦大学光科学与工程系

2013-2-28

§1 矩阵

一、矩阵概念的引入
二、矩阵的定义
三、特殊的矩阵
四、矩阵与线性变换

例　某航空公司在 A、B、C、D 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.



城市间的航班图情况常用表格来表示：

目的地

始发地	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中√表示有航班

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

为了便于计算，把表中的√改成1，空白地方填上0，就得到一个数表:

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四个城市之间交通联接的情况.

例 某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第i家商店发送第j种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第i种货物的单价，b_{i2}表示第i种货物的单件重量.

矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array}$$

称为 m 行 n 列矩阵(matrix)，简称 $m \times n$ 矩阵.

记作

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵A的元素，简称为元(element).

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素	■行数不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表
$\det(a_{ij})$	$(a_{ij})_{m\times n}$

三、特殊的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶方阵. 可记作 A_n.

2. 只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量).

3. 元素全是零的矩阵称为零距阵. 可记作 O. 例如:

$$O_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{1\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 方阵称为**对角阵(diagonal matrix)**.

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

特别的，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为**单位阵(identity matrix)**.

记作 E_n .

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等、列数相等时，称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

注意：不同型的零矩阵是不相等的.

四、矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \cdots\cdots \qquad \downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

例 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为**恒等变换**.

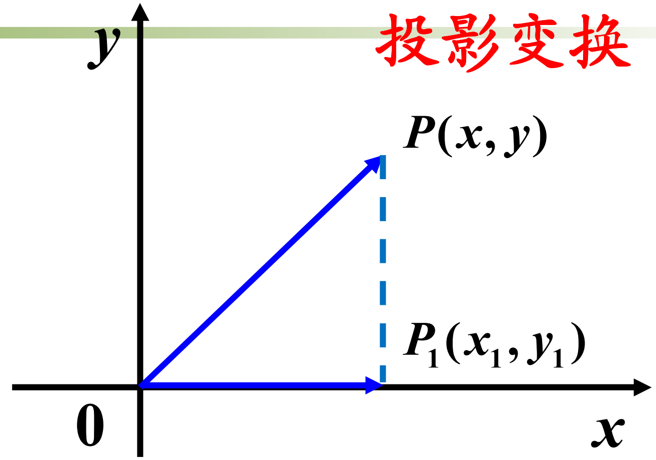
$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$

例　2阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

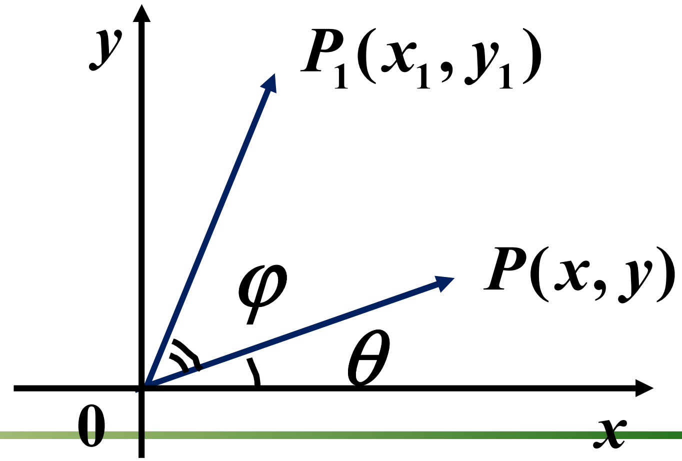
投影变换



例　2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ角的旋转变换



§2 矩阵的运算

例 某工厂生产四种货物，它在上半年和下半年向三家商店发送货物的数量可用数表表示：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示上半年工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{matrix}$$

其中c_{ij}表示工厂下半年向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

试求：工厂在一年内向各商店发送货物的数量.

解： 工厂在一年内向各商店发送货物的数量

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} & a_{14}+c_{14} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & a_{23}+c_{23} & a_{24}+c_{24} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32}+c_{32} & a_{33}+c_{33} & a_{34}+c_{34} \end{pmatrix}$$

一、矩阵的加法

定义： 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明： 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+b_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}+b_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}+b_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

	$\forall a,b,c \in R$	设 A、B、C 是同型矩阵
交换律	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
其他	设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵. 显然 $$A+(-A)=0,\quad A-B=A+(-B)$$	

例（续）该厂所生产的货物的单价及单件重量可列成数表:

$$\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}$$

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

设工厂向某家商店发送四种货物各 λ 件，试求：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量.

解：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量

$$\lambda \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} \\ \lambda b_{41} & \lambda b_{42} \end{pmatrix}$$

其中 b_{i1} 表示第 i 种货物的单价，

b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

二、数与矩阵相乘

定义： 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律

	$\forall a,b,c \in R$	设 A、B是同型矩阵，λ，μ 是数
结合律	$(ab)c = a(bc)$	$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
分配律	$(a+b)\cdot c = ac + bc$ $c\cdot(a+b) = ca + cb$	$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
备注	矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.	

知识点比较

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

例（续） 某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$$

其中a_{ij}表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}$$

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

试求：工厂向三家商店所发货物的总值及总重量.

解:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第i家商店发送第j种货物的数量.

其中b_{i1}表示第i种货物的单价，b_{i2}表示第i种货物的单件重量.

以 c_{i1}, c_{i2} 分别表示工厂向第 i 家商店所发货物的总值及总重量，其中 $i=1, 2, 3$. 于是

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} + a_{14} \times b_{41} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k2}$$

一般地，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,3;\ j=1,2)$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

一、矩阵与矩阵相乘

定义： 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

例：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ 没有意义.

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (10)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

结论:

1. 矩阵乘法不一定满足交换律.
2. 矩阵 $A \neq O,\ B \neq O$，却有 $AB = O$，

   从而不能由 $AB = O$ 得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论.

矩阵乘法的运算规律

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 数乘和乘法的结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B$（其中 λ 是数）

(3) 乘法对加法的分配律

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

(4) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

纯量阵不同于对角阵

推论：矩阵乘法不一定满足交换律，但是纯量阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

(5) 矩阵的幂　若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然　$A^k A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式在什么时候成立？

$$\left.\begin{aligned} &(AB)^k = A^k B^k \\ &(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \end{aligned}\right\} A\text{、}B\text{可交换时成立}$$

- 证明对于方阵: $C=A\times B$,

有 $|C|=|A|\times|B|$

四、矩阵的转置

定义： 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做的**转置矩阵**，记作A^{T} .

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}, \qquad B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例：已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\text{求}(AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义： 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A=A^T$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

那么 A 称为**对称阵(symmetric matrix)**.

如果满足 $A=-A^T$，那么 A 称为**反对称阵**.

$$A=\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}\qquad\qquad A=\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\\ 6 & 0 & 7\\ -1 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

对称阵　　　　　　　　　　反对称阵

例： 设列矩阵 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X=1$，E 为 n 阶单位阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}}=E$.

证明:

$$H^T=(E-2XX^T)^T=E^T+(-2XX^T)^T=E-2(XX^T)^T$$

$$=E-2(X^T)^T X^T=E-2XX^T=H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T=H^2=(E-2XX^T)^2=E^2-4XX^T+(-2XX^T)^2$$

$$=E-4XX^T+4XX^TXX^T=E-4XX^T+4X(X^TX)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E$$

五、方阵的行列式

定义： 由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算性质

(1) $\left|A^T\right| = |A|$; (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$; $\Rightarrow |AB| = |BA|$.

证明：要使得 $|AB| = |A|\,|B|$ 有意义，A、B 必为同阶方阵，

假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

我们以 $n=3$ 为例，构造一个6阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\
0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33}
\end{vmatrix}
\xlongequal[c_6+b_{13}c_1]{\substack{c_4+b_{11}c_1 \\ c_5+b_{12}c_1}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & -1 & & &
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[c_6+b_{32}c_2]{\substack{c_4+b_{21}c_2 \\ c_5+b_{22}c_2}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & -1 & & &
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \xlongequal[c_6+b_{33}c_3]{\substack{c_4+b_{31}c_3 \\ c_5+b_{32}c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

令 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$， 则 $C=(c_{ij})=AB$.

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_6]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_5}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix}
\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}}
\end{vmatrix} = -|-E_3|\cdot|C| = |C| = |AB|
$$

从而 $\quad |AB| = |A||B|$

定义： 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵(adjugate matrix).

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$