第 28 卷 第 6 期
Vol. 28 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 6 月
Jun. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 06-0849-06

多方参与决策且指标集有差异的方案排序方法

李铭洋[1,2], 樊治平[1], 尤天慧[1]

(1. 东北大学 工商管理学院，沈阳 110819；2. 沈阳化工大学 数理系，沈阳 110142)

摘 要: 针对多方参与决策且指标集有差异的群体决策问题, 提出一种基于模糊软集理论的方案排序方法. 依据各方决策者所考虑的指标参数和打分值信息给出多方决策信息的模糊软集表示方法, 并利用模糊软集的且运算得到综合各方决策者所考虑指标参数的新模糊软集及其隶属度矩阵; 然后在考虑指标权重的前提下构建关于方案的加权比较矩阵, 进而通过计算得出的各方案优势度确定方案的排序结果; 最后, 通过一个算例表明了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 多方参与决策；软集；模糊软集；比较矩阵；方案排序

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Method for ranking alternatives considering multi-person decision-making and different index sets

LI Ming-yang[1,2], *FAN Zhi-ping*[1], *YOU Tian-hui*[1]

(1. School of Business Administration，Northeastern University，Shenyang 110819，China；2. Department of Science，Shenyang University of Chemical Technology，Shenyang 110142，China．Correspondent：LI Ming-yang, E-mail：lmy_neu@163.com)

Abstract: A method for ranking alternatives based on the fuzzy soft set theory is proposed to solve multi-person decision-making problems with difference of index sets. According to the parameters considered by decision makers and scores given by decision makers, the fuzzy soft sets of multi-person decision information are constructed. Then new fuzzy soft sets integrating with index parameters considered by decision makers can be obtained by “AND” operation, meanwhile new membership matrix can be constructed. Furthermore, the weighted comparison matrix between alternatives is established by considering index weight. By this way, the dominance degree of alternatives can be calculated, and all the alternatives are ranked according to the total dominance degree. Finally, a numerical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: multi-person decision-making；soft set；fuzzy soft set；comparison matrix；ranking alternative

0 引 言

多方参与决策即群决策是指将多个决策者的个体偏好或意见综合为群的偏好, 并依据群的偏好进行方案的选择或排序. 多年来, 关于群决策理论与方法的研究受到了学者的重视, 并已取得了丰硕的研究成果[1-7]. 需要指出的是, 在已有的群决策方法中, 大多是要求各决策者考虑相同的指标集来给出个体评价信息, 事实上, 在一些现实的群决策问题中, 由于参与群决策的决策者们常来自不同的领域或来自不同的组织部门, 每个决策者可能关注自己的评价指标集, 这样决策者们关注的指标集往往存在差异. 例如在政府采购招标中, 评标专家委员由不同领域的专家构成, 各领域的专家通常会考虑自己领域内的评价指标, 进而给出对各投标商的评价信息, 财务领域的专家对投标商和采购品的财务指标进行评判, 技术领域的专家则对投标商所提供商品的技术指标进行评判. 因此, 如何解决多方参与决策且指标集有差异的群决策问题, 是值得关注的研究课题. 文献 [8] 提出了一种不同评价指标集的并和规则和权向量的并和方法. 文献 [9] 提出了可以用来集结多个决策者给出的

收稿日期: 2012-05-07；**修回日期:** 2012-08-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271051, 71271049)；教育部人文社会科学研究规划基金项目(11YJA630180)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(N110706001).

作者简介: 李铭洋(1980−), 男, 讲师, 博士生, 从事决策理论与方法的研究；樊治平(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事运作管理与决策分析等研究.

优序关系和效用值的群体评价方法——模糊 Borda 数分析法. 已有研究为解决多方参与决策问题提供了较好的思路, 但相关的研究成果不够丰富. 近年来, 一些学者应用软集或模糊软集方法来解决多方参与决策问题[10-16], 为解决本文关注的群决策问题提供了新的思路. Çağman 等[10-11]通过定义软集的"且–或"运算法则和软矩阵表示方式, 提出了基于软集运算的多指标群决策方法. Majumdar 等[12]给出了广义模糊软集的定义, 并将其应用于医疗诊断等实际决策问题中. Roy 等[13]提出了一种基于模糊软集且运算的多指标方案排序方法. 可以看出, 这些方法的提出为更好地解决多方参与决策问题提供了较好的支撑和启示, 但现有的决策方法通常只能解决每个决策者所考虑指标的重要性 (权重) 不存在差异的情形.

本文针对解决多方参与决策且指标集有差异的群决策问题, 给出一种基于模糊软集理论的方案排序方法, 该方法运用模糊软集的且运算得到综合各方决策者评价信息的新模糊软集及其隶属度矩阵, 通过构建考虑指标权重的方案加权比较矩阵, 进而通过计算得出的各方案优势度确定方案的排序结果.

1 模糊软集理论

依据文献 [14-15], 给出软集的定义.

定义 1 设 U 为初始论域, E 为参数集, $P(U)$ 为集合 U 的幂集, 若 $A \subseteq E$, $F: A \to P(U)$ 为一个映射, 则称 (F, A) 为 U 上的软集.

在定义 1 中, 参数集 E 中的每个参数代表决策者可能考虑的一个因素, 也可将参数视作指标的某种状态描述. A 为 E 的子集, 可以视为某个决策者所考虑的参数集合. 对于 $\forall e \in A$, $F(e)$ 是具有 e 参数性质的集合, 软集 (F, A) 由分别具有 A 中各个参数性质的集合所构成. 为了更好地阐释软集概念的实际含义, 下面举例说明.

例 1 某公司招聘新员工, 求职者集合 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, 参数集 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. 其中: e_1 为 "有经验的", e_2 为"计算机水平高的", e_3 为"英语水平高的", e_4 为"写作能力强的", e_5 为"年轻的".

基于软集的概念, 可以将满足各参数性质的求职者进行分类描述. 若有经验的求职者为 u_2 和 u_4, 则记为 $F(e_1) = \{u_2, u_4\}$. 类似地, 满足参数 e_2, e_3, e_4, e_5 的求职者集合分别为 $F(e_2) = \{u_1, u_3\}$, $F(e_3) = \{u_3, u_4, u_5\}$, $F(e_4) = \{u_1, u_3, u_5\}$, $F(e_5) = \{u_2, u_3, u_5\}$. 其中: $A = E$, 软集 $(F, A) = (F, E) = \{$有经验的求职者 $= \{u_2, u_4\}$, 计算机水平高的求职者 $= \{u_1, u_3\}$, 英语水平高的求职者 $= \{u_3, u_4, u_5\}$, 写作能力强的求职者 $= \{u_1, u_3, u_5\}$, 年轻的求职者 $= \{u_2, u_3, u_5\}\}$.

容易看出, 软集中的参数通常具有模糊性(例 1 中"英语水平高的"、"年轻的"等), 所以采用隶属度来刻画论域中的元素符合某参数性质的程度似乎更加合理. 基于此, Maji 对软集理论进行了有效的补充和扩展, 提出了模糊软集理论[14]. 下面根据文献 [13, 16], 对于模糊软集及其且运算给出定义 2 和定义 3.

定义 2 设 U 为初始论域, E 为参数集, $\tilde{P}(U)$ 为 U 的所有模糊集, 若 $A \subseteq E$, $F: A \to \tilde{P}(U)$ 为一个映射, 则称 (F, A) 为 U 上的模糊软集.

为了更好地解释模糊软集的含义, 给出下例.

例 2 在例 1 中, 使用模糊软集描述各求职者对于参数的符合程度, 具体为

$$F(e_1) = \{u_1/0.5, u_2/1.0, u_3/0.6, u_4/0.9, u_5/0.5\},$$
$$F(e_2) = \{u_1/0.8, u_2/0.6, u_3/0.8, u_4/0.4, u_5/0.7\},$$
$$F(e_3) = \{u_1/0.5, u_2/0.3, u_3/0.8, u_4/0.9, u_5/0.9\},$$
$$F(e_4) = \{u_1/0.9, u_2/0.5, u_3/0.8, u_4/0.4, u_5/0.8\},$$
$$F(e_5) = \{u_1/0.4, u_2/0.9, u_3/1.0, u_4/0.3, u_5/0.8\}.$$

模糊软集 $(F, A) = (F, E) = \{$ 有经验的求职者$=$ $\{u_1/0.5, u_2/1.0, u_3/0.6, u_4/0.9, u_5/0.5\}$, 计算机水平高的求职者 $= \{u_1/0.8, u_2/0.6, u_3/0.8, u_4/0.4, u_5/0.7\}$, 英语水平高的求职者$=\{u_1/0.5, u_2/0.3, u_3/0.8, u_4/0.9, u_5/0.9\}$, 写作能力强的求职者 $= \{u_1/0.9, u_2/0.5, u_3/0.8, u_4/0.4, u_5/0.8\}$, 年轻的求职者 $= \{u_1/0.4, u_2/0.9, u_3/1.0, u_4/0.3, u_5/0.8\}\}$.

可以看出, 模糊软集 (F, A) 能够清晰地表示每个求职者对于各参数的符合程度.

定义 3 设 (F, A) 和 (G, B) 是 U 上的两个模糊软集, 若对于 $\forall (a, b) \in A \times B$, 有 $H(a, b) = F(a) \tilde{\bigcap} G(b)$, 则称 $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ 为模糊软集 (F, A) 和 (G, B) 的且运算, 其中 $\tilde{\bigcap}$ 表示模糊集的交运算.

例 3 若例 2 中各求职者关于参数 e_3 ("英语水平高的") 的符合程度是通过已有资料得出的(如大学英语四、六级考试成绩等), 同时, 公司在招聘时另组织专业英语测试来进一步评估各求职者的英语水平, 评估结果表示为 $G(e_3) = \{u_1/0.6, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.8, u_5/0.7\}$, 令 $B = \{e_3\}$, 则考虑参数集合 B 的模糊软集为 $(G, B) = \{$英语水平高的求职者 $= \{u_1/0.6, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.8, u_5/0.7\}\}$.

下面作模糊软集 (F, A) 和 (G, B) 的且运算, 有 $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B) = \{$有经验且英语水平高的求职者 $= \{u_1/0.5, u_2/0.2, u_3/0.6, u_4/0.8, u_5/0.5\}$, 计算机和英语水平均高的求职者 $= \{u_1/0.6, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.4, u_5/0.7\}$, 英语水平高的求职者 $= \{u_1/0.5, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.8, u_5/0.7\}$, 写作能力强且英语水平高的求职者 $= \{u_1/0.6, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.4, u_5/$

0.7}, 年轻且英语水平高的求职者 $=\{u_1/0.4, u_2/0.2, u_3/0.7, u_4/0.3, u_5/0.7\}\}$.

容易看出, 模糊软集 (F,A) 和 (G,B) 通过且运算得到一个新的模糊软集 $(H, A\times B)$, 该模糊软集中的每个参数均由 A 和 B 中参数“合成”得到, 如“有经验且英语水平高的”便由 A 中的 e_1 (“有经验的”) 和 B 中的 e_2 (“英语水平高的”) 合成得到. 特殊地, $A\times B$ 中的参数“英语水平高的”由 A 和 B 中的 e_3 合成得到, 即 $(H, A\times B)$ 中关于参数“英语水平高的”的符合程度同时考虑了求职者的已有资料 (如大学英语四、六级考试成绩等) 和参加公司组织的专业英语测试成绩.

2　基于模糊软集理论的方案排序方法

首先阐释指标参数的含义. 在决策问题中, 对于决策者考虑的每个指标均设定一个指标参数 (简称为参数), 其含义是该指标的某种状态性描述, 例如对于指标“英语水平”, 可设定参数为“英语水平高的”.

为了便于分析, 对使用符号的含义说明如下: $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 为 m 个备选方案的集合, u_i 为第 i 个备选方案, $i=1,2,\cdots,m$; $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 为 q 个参数的集合, e_j 为第 j 个参数, $j=1,2,\cdots,q$; $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 为 n 方参与决策的决策者集合, D_s 为第 s 个决策者, $s=1,2,\cdots,n$; $E_s=\{e_1^s,e_2^s,\cdots,e_{l_s}^s\}$ 为决策者 D_s 所考虑的参数集合, e_t^s 为 D_s 所考虑的第 t 个参数, $t=1,2,\cdots,l_s$, $E_s\subseteq E$, $l_s\leqslant q$; $W_s=(w_1^s,w_2^s,\cdots,w_{l_s}^s)$ 为参数集 E_s 中各参数所属指标的权重向量, w_t^s 为参数 e_t^s 所属指标的权重, $t=1,2,\cdots,l_s$, 且满足 $0\leqslant w_t^s\leqslant 1$, $\sum\limits_{t=1}^{l_s} w_t^s=1$; $V_s=[v_{it}^s]_{m\times l_s}$ 为决策者 D_s 给出的评价矩阵, v_{it}^s 为决策者 D_s 给出的方案 u_i 关于参数 e_t^s 符合程度的打分值, $i=1,2,\cdots,m$, $t=1,2,\cdots,l_s$, $s=1,2,\cdots,n$.

本文要解决的问题是: 在多个决策者 $(D_1,D_2,\cdots,D_n)$ 参与的决策问题中, 考虑到各决策者关注指标集存在差异 (其中 D_s 考虑的指标参数集合为 E_s, $s=1,2,\cdots,n$), 依据指标权重向量 W_s 和评价矩阵 $V_s=[v_{it}^s]_{m\times l_s}$, 通过某种决策方法对备选方案集 U 中的方案进行排序.

不失一般性, 设决策者给出的各方案关于指标参数符合程度的打分值均为 1～10 间的整数, 即 $v_{it}^s\in\{1,2,\cdots,10\}$, $i=1,2,\cdots,m$, $t=1,2,\cdots,l_s$, $s=1,2,\cdots,n$. v_{it}^s 越大, 表示决策者 D_s 认为方案 u_i 关于参数 e_t^s 的符合程度越高.

为了解决本文所考虑的方案排序问题, 首先将评价矩阵 $V_s=[v_{it}^s]_{m\times l_s}$ 转化为隶属度矩阵 $\Lambda_s=[\lambda_{it}^s]_{m\times l_s}$, 其中隶属度 λ_{it}^s 表示方案 u_i 对于参数 e_t^s 所描述指标状态的符合程度, 计算公式为

$$\lambda_{it}^s=v_{it}^s/10,\ i=1,2,\cdots,m,\quad t=1,2,\cdots,l_s,\ s=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

然后, 根据决策者 $D_s(s=1,2,\cdots,n)$ 所考虑的参数集合 E_s 和隶属度矩阵 Λ_s, 将各方案关于各参数的评价信息表示为模糊软集 $(F_1,E_1),(F_2,E_2),\cdots,(F_n,E_n)$ 的形式, 即

$$F_s(e_t^s)=\{u_1/\lambda_{1t}^s, u_2/\lambda_{2t}^s,\cdots,u_m/\lambda_{mt}^s\},\quad s=1,2,\cdots,n,\ t=1,2,\cdots,l_s. \tag{2}$$

进一步, 为了综合各决策者的评价信息, 基于对定义 3 的扩展, 作模糊软集 (F_1,E_1), $(F_2,E_2),\cdots,(F_n,E_n)$ 的且运算, 即 $(H,E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)=(F_1,E_1)\bigwedge(F_2,E_2)\bigwedge\cdots\bigwedge(F_n,E_n)$, 具体地, 对于 $\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$, 有

$$H(a_1,a_2,\cdots,a_n)=F_1(a_1)\tilde{\bigcap}F_2(a_2)\tilde{\bigcap}\cdots\tilde{\bigcap}F_n(a_n), \tag{3}$$

其中 $\tilde{\bigcap}$ 表示模糊集的交运算.

可以看出, 新模糊软集 $(H,E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)$ 中的每个参数均由 n 个参数合成得到, 而这 n 个参数分别属于不同决策者所考虑的参数集合 $E_1,E_2,\cdots,E_n$. 因此, $(H,E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)$ 中共有 $\hat{l}=l_1\times l_2\times\cdots\times l_n$ 个合成后的参数. 设合成后的参数集合为 $\hat{E}=\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_{\hat{l}}\}$, “且运算”后的隶属度矩阵为 $\Lambda=[\lambda_{i\tau}]_{m\times\hat{l}}$, 其中 $\lambda_{i\tau}$ 为方案 u_i 对于合成后的参数 $\hat{e}_\tau$ 所描述状态的符合程度.

由于每个决策者所考虑指标的重要性 (权重) 通常存在差异, 合成后的参数 $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_{\hat{l}}$ 之间的重要程度也常常存在差别. 若参数 $\hat{e}_\tau$ 由 E_1 中的参数 $e_{t_1}^1$、E_2 中的参数 $e_{t_2}^2$、$\cdots$、E_n 中的参数 $e_{t_n}^n$ 合成得到, 即 $\hat{e}_\tau=(e_{t_1}^1,e_{t_2}^2,\cdots,e_{t_n}^n)$, 设参数 $\hat{e}_\tau$ 在合成后参数 $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_{\hat{l}}$ 中的重要程度为 $\hat{\omega}_\tau$, 则有

$$\hat{\omega}_\tau=w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_n}^n. \tag{4}$$

定理 1　设 $L_s=\{1,2,\cdots,l_s\}$, 合成后参数 $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_{\hat{l}}$ 的重要程度之和为 1, 即

$$\sum_{\tau=1}^{\hat{l}}\hat{\omega}_\tau=\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_n\in L_n}w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_n}^n=1.$$

证明　存在

$$\sum_{\tau=1}^{\hat{l}}\hat{\omega}_\tau=\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_n\in L_n}w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_n}^n=$$
$$w_1^n\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-1}\in L_{n-1}}w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-1}}^{n-1}+$$
$$w_2^n\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-1}\in L_{n-1}}w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-1}}^{n-1}+\cdots+$$

$$w_{l_n}^n \sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-1}\in L_{n-1}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-1}}^{n-1} =$$

$$(w_1^n + w_2^n + \cdots + w_{l_n}^n)\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\times$$

$$\sum_{t_{n-1}\in L_{n-1}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-1}}^{n-1} =$$

$$\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-1}\in L_{n-1}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-1}}^{n-1} =$$

$$w_1^{n-1}\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-2}\in L_{n-2}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-2}}^{n-2} +$$

$$w_2^{n-1}\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-2}\in L_{n-2}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-2}}^{n-2} + \cdots +$$

$$w_{l_{n-1}}^{n-1}\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-2}\in L_{n-2}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-2}}^{n-2} =$$

$$(w_1^{n-1} + w_2^{n-1} + \cdots + w_{l_{n-1}}^{n-1})\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\times$$

$$\sum_{t_{n-2}\in L_{n-2}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-2}}^{n-2} =$$

$$\sum_{t_1\in L_1}\sum_{t_2\in L_2}\cdots\sum_{t_{n-2}\in L_{n-2}} w_{t_1}^1 w_{t_2}^2\cdots w_{t_{n-2}}^{n-2} = \cdots =$$

$$\sum_{t_1\in L_1} w_{t_1}^1 = w_1^1 + w_2^1 + \cdots + w_{l_1}^1 = 1. \qquad \square$$

为了对各方案间的优劣关系进行两两比较, 构建加权比较矩阵. 对于 $\forall\tau\in\{1,2,\cdots,\hat{l}\}$, 设

$$\delta_{ik\tau} = \begin{cases} 1,\ \lambda_{i\tau}\geqslant\lambda_{k\tau}; \\ 0,\ \lambda_{i\tau}<\lambda_{k\tau}. \end{cases} \tag{5}$$

则加权比较矩阵记为 $C=[c_{ik}]_{m\times m}$, 其中

$$c_{ik} = \sum_{\tau=1}^{\hat{l}} \hat{\omega}_\tau \delta_{ik\tau}. \tag{6}$$

容易看出, 若 $i\neq k$, 则 $0\leqslant c_{ik}\leqslant 1$. 特殊地, $c_{ii}=1$, c_{ik} 是方案优劣的比较量度, 若 $c_{ik}>c_{ki}$, 则表示在综合考虑 $\hat{l}$ 个指标参数的情形下, 方案 u_i 优于方案 u_k. 为了进行方案排序, 计算各方案的优势度, 设方案 u_i 的优势度为 S_i, 有

$$S_i = \sum_{k=1}^{m}(c_{ik}-c_{ki}). \tag{7}$$

方案 u_i 的优势度越大, 表明方案越优, 相应的方案 u_i 越排在前面.

综上, 给出基于模糊软集理论的方案排序方法的计算步骤.

Step 1: 根据式 (1), 将评价矩阵 V_s 转化为隶属度矩阵 $\varLambda_s$, $s=1,2,\cdots,n$.

Step 2: 在 Step 1 的基础上, 根据式 (2) 将评价信息表示成模糊软集 (F_s,E_s) 的形式, $s=1,2,\cdots,n$.

Step 3: 根据式 (3) 对模糊软集 (F_s,E_s) 进行且运算 $(s=1,2,\cdots,n)$, 得到新的模糊软集 $(H,E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)$.

Step 4: 根据式 (4), 确定合成后的参数的重要程度 $\hat{\omega}_\tau$, $\tau=1,2,\cdots,\hat{l}$.

Step 5: 根据式 (5) 和 (6), 构建加权比较矩阵 C.

Step 6: 根据式 (7), 计算方案 u_i 的优势度 S_i, $i=1,2,\cdots,m$, 并据此对所有方案进行排序.

3 算例分析

考虑一个手机生产商的手机创意方案选择问题. 手机生产商欲开发新产品上市, 现有 7 个备选手机创意方案 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_7\}$, 评价创意方案的指标参数集合为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_8\}$, 其中 $e_1\sim e_8$ 依次代表"创新度高的"、"外形美观的"、"功能强大的"、"市场吸引力高的"、"竞争状况好的"、"生命周期长的"、"质量好的"、"生产成本低的". 该生产商下属的 3 个部门共同参与决策, 每个部门考虑的指标参数不同, 研发部门考虑的参数集合为 $E_1=\{e_1,e_2,e_3\}$, 各参数所属指标权重为 $w_1^1=0.4$, $w_2^1=0.3$, $w_3^1=0.3$; 市场部门考虑的参数集合为 $E_2=\{e_4,e_5,e_6\}$, 各参数所属指标权重为 $w_1^2=0.3$, $w_2^2=0.3$, $w_3^2=0.4$; 技术部门考虑的参数集合为 $E_3=\{e_7,e_8\}$, 各参数所属指标权重为 $w_1^3=0.5$, $w_2^3=0.5$.

3 个部门分别给出各方案关于其所考虑参数符合程度的打分值, 打分值的范围在 1～10 之间, 根据打分值所构建的 3 个部门的分值评价矩阵分别为

$$V_1 = \begin{array}{c} \\ u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 & 7\\ 5 & 10 & 4\\ 3 & 2 & 4\\ 5 & 4 & 7\\ 7 & 5 & 3\\ 10 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \end{array},\ V_2 = \begin{array}{c} \\ u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5\\ 8 & 5 & 5\\ 4 & 4 & 5\\ 7 & 5 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ 4 & 3 & 7\\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array},\ V_3 = \begin{array}{c} \\ u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 7\\ 10 & 4\\ 5 & 4\\ 5 & 2\\ 3 & 6\\ 4 & 4\\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

首先根据式 (1), 将分值矩阵 V_s 转化为隶属度矩阵 $\varLambda_s(s=1,2,3)$, 即

$$\varLambda_1 = \begin{array}{c} \\ u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.7\\ 0.5 & 1.0 & 0.4\\ 0.3 & 0.2 & 0.4\\ 0.5 & 0.4 & 0.7\\ 0.7 & 0.5 & 0.3\\ 1.0 & 0.5 & 0.4\\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\Lambda_2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \Lambda_3 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 1.0 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

在此基础上, 根据式 (2) 将评价信息表示成模糊软集 (F_1, E_1), (F_2, E_2) 和 (F_3, E_3), 并根据式 (3) 对其进行且运算, 得到 $(H, E_1 \times E_2 \times E_3) = (F_1, E_1) \bigwedge (F_2, E_2) \bigwedge (F_3, E_3)$. 在模糊软集 $(H, E_1 \times E_2 \times E_3)$ 中, 共有 $\hat{l} = 3 \times 3 \times 2 = 18$ 个合成后的参数. 设合成后的参数集为 $\hat{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_{18}\}$, $\hat{E}$ 中每个参数均为 E_1, E_2 和 E_3 中各一个参数合成所得, 合成后的参数的具体构成情况如表 1 所示. 模糊软集 (F_1, E_1), (F_2, E_2) 和 (F_3, E_3) 经过"且运算"后的隶属度矩阵 $\Lambda = [\lambda_{i\tau}]_{7\times 18}$, 如表 2 所示.

根据式 (4) 分别计算合成后参数 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_{18}$ 的重要程度, 结果如表 3 所示.

表 1　模糊软集 (F_1, E_1), (F_2, E_2) 和 (F_3, E_3) 经且运算后的参数构成

合成后的参数	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_4$	$\hat{e}_5$	$\hat{e}_6$	$\hat{e}_7$	$\hat{e}_8$	$\hat{e}_9$
原始参数	e_1, e_4, e_7	e_1, e_4, e_8	e_1, e_5, e_7	e_1, e_5, e_8	e_1, e_6, e_7	e_1, e_6, e_8	e_2, e_4, e_7	e_2, e_4, e_8	e_2, e_5, e_7
合成后的参数	$\hat{e}_{10}$	$\hat{e}_{11}$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{14}$	$\hat{e}_{15}$	$\hat{e}_{16}$	$\hat{e}_{17}$	$\hat{e}_{18}$
原始参数	e_2, e_5, e_8	e_2, e_6, e_7	e_2, e_6, e_8	e_3, e_4, e_7	e_3, e_4, e_8	e_3, e_5, e_7	e_3, e_5, e_8	e_3, e_6, e_7	e_3, e_6, e_8

表 2　模糊软集 (F_1, E_1), (F_2, E_2) 和 (F_3, E_3) 经且运算后的隶属度矩阵 Λ

$\lambda_{i\tau}$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_4$	$\hat{e}_5$	$\hat{e}_6$	$\hat{e}_7$	$\hat{e}_8$	$\hat{e}_9$	$\hat{e}_{10}$	$\hat{e}_{11}$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{14}$	$\hat{e}_{15}$	$\hat{e}_{16}$	$\hat{e}_{17}$	$\hat{e}_{18}$
u_1	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5
u_2	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.8	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
u_3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
u_4	0.5	0.2	0.5	0.2	0.4	0.2	0.4	0.2	0.4	0.2	0.4	0.2	0.5	0.2	0.5	0.2	0.4	0.2
u_5	0.2	0.2	0.3	0.5	0.3	0.6	0.2	0.2	0.3	0.5	0.3	0.5	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3
u_6	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4	0.4
u_7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3

表 3　合成后各参数的重要程度值

参数$\hat{e}_\tau$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_4$	$\hat{e}_5$	$\hat{e}_6$	$\hat{e}_7$	$\hat{e}_8$	$\hat{e}_9$
重要程度$\hat{\omega}_\tau$	0.06	0.06	0.06	0.06	0.08	0.08	0.045	0.045	0.045
参数$\hat{e}_\tau$	$\hat{e}_{10}$	$\hat{e}_{11}$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{14}$	$\hat{e}_{15}$	$\hat{e}_{16}$	$\hat{e}_{17}$	$\hat{e}_{18}$
重要程度$\hat{\omega}_\tau$	0.045	0.06	0.06	0.045	0.045	0.045	0.045	0.06	0.06

根据式 (5) 和 (6), 构建加权比较矩阵

$$C = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.000 & 0.955 & 1.000 & 1.000 & 0.920 & 1.000 & 1.000 \\ 0.185 & 1.000 & 1.000 & 0.910 & 0.755 & 1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 0.300 & 1.000 & 0.560 & 0.650 & 0.420 & 0.880 \\ 0.000 & 0.270 & 0.650 & 1.000 & 0.650 & 0.500 & 0.800 \\ 0.140 & 0.245 & 0.580 & 0.500 & 1.000 & 0.440 & 1.000 \\ 0.000 & 0.455 & 0.910 & 0.745 & 0.755 & 1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.460 & 0.500 & 0.560 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{array}.$$

根据式 (7), 计算得到各方案的优势度 $S_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$, 即 $S_1 = 5.550$, $S_2 = 2.625$, $S_3 = -1.79$, $S_4 = -1.345$, $S_5 = -1.385$, $S_6 = 0.505$, $S_7 = -4.16$. 进一步, 根据各方案的优势度 S_i 对 $u_1, u_2, \cdots, u_7$ 进行排序, 即 $u_1 \succ u_2 \succ u_6 \succ u_4 \succ u_5 \succ u_3 \succ u_7$, 故方案 u_1 为最佳手机创意方案.

为了进一步说明本文提出的方法, 采用文献 [9] 给出的模糊 Borda 数分析方法对上述问题进行求解, 并将两种方法进行对比. 首先根据 3 个部门给出的打分值信息求得方案 $u_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$ 属于优的隶属度 $\mu_s(u_i)$, 见表 4; 然后根据隶属度与排序值作出模糊频数统计表, 见表 5; 最后计算出各方案的模糊 Borda 数分别为

$\mathrm{FB}(u_1) = 17.0849$, $\mathrm{FB}(u_2) = 17.7212$,

$\mathrm{FB}(u_3) = 3.9867$, $\mathrm{FB}(u_4) = 6.4867$,

$\mathrm{FB}(u_5) = 5.1249$, $\mathrm{FB}(u_6) = 8.8219$, $\mathrm{FB}(u_7) = 0.7305$.

由此得到各方案的排序结果为 $u_2 \succ u_1 \succ u_6 \succ u_4 \succ u_5 \succ u_3 \succ u_7$. 可以看出, 应用该方法与本文所提方法

进行方案排序时, 方案 u_1 和方案 u_2 的排序位置有所不同, 其原因在于模糊 Borda 数分析方法侧重考虑综合打分值高的备选方案, 本文提出的方法在总体相近的情形下更侧重考虑各指标较为均衡的备选方案.

表 4　各方案属于"优"的隶属度

$\mu_s(u_i)$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
E_1	1	0.849 3	0.411 0	0.726 0	0.712 3	0.917 8	0.602 7
E_2	0.949 2	1	0.745 8	0.881 4	0.762 7	0.830 5	0.406 8
E_3	0.928 6	1	0.642 9	0.5	0.642 9	0.571 4	0.5

表 5　各方案排序的模糊频数统计表

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
1	1	2	0	0	0	0	0
2	1.877 8	0	0	0	0	0.917 8	0
3	0	0.849 3	0.642 9	0.881 4	0.642 9	0	0
4	0	0	0	0.726 0	0	0.830 5	0
5	0	0	0	0	1.475	0.571 4	0
6	0	0	0.745 8	0.5	0	0	1.102 7
7	0	0	0.411 0	0	0	0	0.406 8
$\sum$	2.877 8	2.849 3	1.799 7	2.107 4	2.117 9	2.319 7	1.509 5

4 结　论

本文给出了一种基于模糊软集理论的方案排序方法, 该方法可以用来解决多方参与决策且指标集有差异的群体决策问题. 与已有方法相比, 本文所提出的方法具有概念清晰、计算简单等特点, 具有可操作性和应用性, 为解决具有差异评价指标集信息的多方参与决策问题提供了一种新途径.

参考文献(References)

[1] 徐玖平, 陈建中. 群决策理论与方法及实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 113-281.
(Xu J P, Chen J Z. The theory and methods of group decision making with its realization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 113-281.)

[2] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 298-331.
(Yue C Y. Decision making: Theories and methods[M]. Beijing: Science Press, 2003: 298-331.)

[3] Tavana M, Kennedy D T, Joglekar P. A group decision support framework for consensus ranking of technical manager candidates[J]. Omega, 1996, 24(5): 523-538.

[4] Ahn B S. Extending Malakooti's model for ranking multicriteria alternatives with preference strength and partial information[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybemetics: Systems and Humans, 2003, 33(3): 281-287.

[5] Shih H S, Shyur H J, Lee E S. An extension of TOPSIS for group decision making[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45(7/8): 801-813.

[6] Wendell R E. Multiple objective mathematical programming with respect to multiple decision makers[J]. Operations Research, 1980, 28(5): 1100-1111.

[7] Li D F. Compromise ratio method for fuzzy multiattribute group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2007, 7(3): 807-817.

[8] 史本山, 杨季美, 吴敬业. 关于评价指标集并和理论和方法的研究[J]. 西南交通大学学报, 1991, 26(3): 73-79.
(Shi B S, Yang J M, Wu J Y. Researches on joining theory and method with appraisal index sets[J]. J of Southwest Jiaotong University, 1991, 26(3): 73-79.)

[9] 杨季美, 史本山. 群体评价中的并合方法[J]. 系统工程理论与实践, 1992, 12(1): 49-51.
(Yang J M, Shi B S. Joining methods in group appraising[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1992, 12(1): 49-51.)

[10] Çağman N, Enginoğlu S. Soft set theory and uni-int decision making[J]. European J of Operational Research, 2010, 207(2): 848-855.

[11] Çağman N, Enginoğlu S. Soft matrix theory and its decision making[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(10): 3308-3314.

[12] Majumdar P, Samanta S K. Generalised fuzzy soft sets[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(4): 1425-1432.

[13] Roy A R, Maji P K. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2007, 203(2): 412-418.

[14] Molodtsov D. Soft set theory-First results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37 (4/5): 19-31.

[15] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft set theory[J]. Computers and Mathematics with Application, 2003, 45(4/5): 555-562.

[16] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Fuzzy soft sets[J]. The J of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3): 589-602.