文章编号: 1001-0920 (2013) 08-1157-08

线性 Markov 切换系统的随机 Nash 微分博弈及混合 H_2/H_∞ 控制

朱怀念[a], 张成科[b], 王明亮[b]

(广东工业大学 a. 管理学院，b. 经济与贸易学院，广州 510520)

摘 要: 研究线性 Markov 切换系统的随机 Nash 微分博弈问题. 首先借助线性 Markov 切换系统随机最优控制的相关结果, 得到了有限时域和无线时域 Nash 均衡解的存在条件等价于其相应微分 (代数) Riccati 方程存在解, 并给出了最优解的显式形式; 然后应用相应的微分博弈结果分析线性 Markov 切换系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题; 最后通过数值算例验证了所提出方法的可行性.

关键词: 线性 Markov 切换系统；微分博弈；混合 H_2/H_∞ 控制

中图分类号: F224.32 **文献标志码:** A

Linear quadratic stochastic Nash differential games and mixed H_2/H_∞ control for Markov jump linear systems

ZHU Huai-nian[a], *ZHANG Cheng-ke*[b], *WANG Ming-liang*[b]

(a. School of Management，b. School of Economics and Commence，Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520，China．Correspondent：ZHU Huai-nian，E-mail：huainian258@163.com)

Abstract: Linear quadratic stochastic Nash differential games for Markov jump linear systems are studied. By utilizing some results of stochastic optimal control for Markov jump linear systems, the existence condition of finite horizon stochastic Nash games is equivalent to the solvability of the associated differential Riccati equations, and that of infinite horizon stochastic Nash games is equivalent to the solvability of the associated algebraic Riccati equations. Moreover, explicit expressions of the optimal strategies are constructed. The results are applied to the mixed H_2/H_∞ control problem for Markov jump linear systems. Finally, a numeric example is given to show the feasibility of the proposed method.

Key words: Markov jump linear systems；differential games；mixed H_2/H_∞ control

0 引 言

近年来, 对于 Markov 切换系统的研究引起了国内外学者的广泛关注[1], 原因是这类系统在现实生活中大量存在, 如制造系统、电力系统、网络通信系统和经济系统等. 在现有研究中, 针对 Markov 切换系统的稳定性和镇定性分析已取得了丰富成果, Mao 等[2]系统地给出了各类随机切换系统的渐近稳定性结果和数值求解算法. 在随机控制[3-11] 和滤波[12]方面的研究也取得了很大的进展. 文献 [3-7] 讨论了带 Markov 切换参数的随机线性系统的 LQR 问题; 文献 [8] 研究了噪声依赖于状态的带 Markov 切换参数的随机系统的混合 H_2/H_∞ 控制, 得到了 H_2/H_∞ 鲁棒控制策略存在的充分必要条件; 文献 [9] 研究了非线性随机 Markov 切换系统的状态和输出反馈 H_∞ 控制, 作为一个推论得到了噪声依赖于状态和干扰的线性 Markov 切换系统的 H_∞ 状态反馈控制策略; 文献 [10-11] 则分别对噪声依赖于状态和控制的带 Markov 切换参数的随机系统 H_∞ 控制的数值算法进行了深入的分析; 文献 [12] 研究了带 Markov 切换参数的随机系统 H_∞ 滤波问题. 但现有的结论主要集中于 Markov 切换系统在无限时域内的特性, 很少关注系统在有限时域内的特性.

另一方面, 由于微分博弈在很多情况下反映了决策者的理性思维方式, 众多学者对这类问题表现出了持久的研究热情, 且成果不断涌现[13-16]. 针对 Markov 切换系统的随机微分博弈方面, Song 等[17]研

收稿日期: 2012-04-16；**修回日期:** 2012-10-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171061)；广东省自然科学基金项目(S2011010004970).

作者简介: 朱怀念(1985−), 男, 博士生, 从事博弈论及其在经济管理中的应用研究；张成科(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事管理博弈论及其应用、管理系统工程理论与应用等研究.

究了带有Markov切换参数的一般随机系统的二人零和微分博弈问题, 证明了鞍点均衡存在的条件, 并给出了均衡解的数值求解算法. Elliott等[18]将投资组合中风险最小化问题转化为一个带Markov切换参数的二人零和随机微分博弈模型, 给出了最优投资组合策略. Pan等[19]从博弈论的角度分析了线性Markov切换系统的H_∞控制, 在一系列假设的基础上将H_∞控制问题转化为一个零和微分博弈问题, 分别得到了有限时域和无限时域内的状态反馈和输出反馈H_∞鲁棒控制策略. 但据作者所知, 系统地研究有限时域和无限时域内Markov切换系统随机Nash微分博弈理论, 并将其应用在混合H_2/H_∞控制问题的相应工作还未见报道.

本文针对Itô型随机微分方程描述的线性Markov切换系统, 首先讨论它在有限时域和无线时域两种情况下的随机Nash微分博弈问题; 然后将其应用于线性Markov切换系统的混合H_2/H_∞控制问题; 最后, 通过数值例子验证了本文方法的有效性.

1 有限时域随机Nash微分博弈

为叙述方便, 引入下述记号: $\boldsymbol{R}^n$表示n维欧氏空间; $\boldsymbol{R}^{m\times n}$表示全体$m\times n$阶矩阵构成的集合; A^{T}表示矩阵或向量A的转置; A^{-1}表示矩阵A的逆矩阵; $A>0\,(\geqslant 0)$表示对称矩阵A是正定(半正定)的; χ_A表示集合A的指示函数; $M^l_{n,m}$表示所有$n\times m$阶矩阵$A(i)$构成的集合$A=(A(1),A(2),\cdots,A(l))$, $i=1,2,\cdots,l$; $M^l_n:=M^l_{n,n}$; $\boldsymbol{S}_n$表示全体$n\times n$阶实矩阵构成的集合; $\boldsymbol{S}^l_n$表示全体$n\times n$阶实矩阵$A(i)$构成的集合$A=(A(1),A(2),\cdots,A(l))$, $i=1,2,\cdots,l$.

1.1 问题描述

设$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},\mathcal{P})$是一个给定的完备概率空间, 其上定义了一标准Wiener过程$\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$和一个取值于状态空间$\varphi=\{1,2,\cdots,l\}$的Markov过程$\{r_t\}_{t\geqslant 0}$, 且$\{r_t\}$和$\{W(t)\}$相互独立. Markov过程$\{r_t\}$具有下述转移概率:

$$P[r_{t+\Delta}=j|r_t=i]=\begin{cases}\pi_{ij}\Delta+o(\Delta),\ i\neq j;\\ 1+\pi_{ii}\Delta+o(\Delta),\ i=j.\end{cases}\qquad(1)$$

其中: $\pi_{ij}\geqslant 0$, $i\neq j$, $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{l}\pi_{ij}$; $o(\Delta)$满足$\lim\limits_{\Delta\to 0}o(\Delta)/\Delta=0$. $\mathcal{F}_t$是由$W(s)$、$r_s\,(0\leqslant s\leqslant t)$生成的最小$\sigma$-域流, 即$\mathcal{F}_t=\sigma\{W(s),r_s|0\leqslant s\leqslant t\}$. 考虑如下Itô型随机微分方程描述的线性Markov切换系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)+\\ \qquad C(r_t)v(t)]\mathrm{d}t+\tilde{A}(r_t)x(t)\mathrm{d}W(t),\\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\qquad(2)$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$是状态变量; $u(t)\in\boldsymbol{R}^{m_1}$, $v(t)\in\boldsymbol{R}^{m_2}$是两博弈人的决策控制变量; 系数矩阵$A(r_t)$, $\tilde{A}(r_t)\in M^l_n$; $B(r_t),C(r_t)\in M^l_{n,m_\tau}\,(\tau=1,2)$为常数阵.

设$(0,x_0)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$是给定的初始时间和初始状态, 令$U_\tau[0,T]$表示一个$\boldsymbol{R}^{m_\tau}$维的自适应平方可积过程, $\tau=1,2$. 对应于每一个$(u,v)\in U[0,T]\equiv U_1[0,T]\times U_2[0,T]$, 每个博弈人都有一个二次型性能指标$J_\tau(u,v;x_0,i)$, 即

$$\begin{aligned}&J_\tau(u,v;x_0,i)=\\ &E\Big\{\int_0^T[x^{\mathrm{T}}(t)Q^{\mathrm{T}}_\tau(r_t)Q_\tau(r_t)x(t)+\\ &u^{\mathrm{T}}(t)R_{\tau 1}(r_t)u(t)+\\ &v^{\mathrm{T}}(t)R_{\tau 2}(r_t)v(t)\mathrm{d}t]|r_0=i\Big\},\ \tau=1,2.\end{aligned}\qquad(3)$$

其中: 控制权矩阵$R_{11}(r_t)>0$, $R_{22}(r_t)>0$, $R_{12}(r_t)\geqslant 0$, $R_{21}(r_t)\geqslant 0$; 状态权矩阵$Q^{\mathrm{T}}_1(r_t)Q_1(r_t)\geqslant 0$, $Q^{\mathrm{T}}_2(r_t)Q_2(r_t)\geqslant 0$; $E\{\cdot\}$表示数学期望.

在式(2)和(3)中, 当$r_t=i$, $i\in\varphi$时, $A(r_t)=A(i),\cdots$. 于是有限时域两人随机Nash微分博弈问题定义如下.

随机Nash微分博弈问题1 给定式(2)描述的随机系统, 寻找可行控制$(u^*,v^*)\in U[0,T]$, 使得下式成立:

$$\begin{cases}J_1(u^*,v^*;x_0,i)\leqslant J_1(u,v^*;x_0,i),\\ J_2(u^*,v^*;x_0,i)\leqslant J_2(u^*,v;x_0,i).\end{cases}\qquad(4)$$

对于随机Nash微分博弈问题1, 本文将研究限定在两博弈人的控制策略均为线性状态反馈情形, 即$u(t)=K_1(r_t)x(t)$, $v(t)=K_2(r_t)x(t)$, 其中$K_\tau\in M^l_{m_\tau,n}(\tau=1,2)$是连续矩阵值函数.

1.2 单人博弈情形

首先讨论两人随机Nash微分博弈的退化情形——单人博弈, 即所谓的随机LQ最优控制问题, 在此种特殊情形下得到的相关结论将为下一节两人随机Nash 微分博弈的求解奠定基础.

考虑如下定常受控随机系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)]\mathrm{d}t+\\ \qquad\tilde{A}(r_t)x(t)\mathrm{d}W(t),\\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\qquad(5)$$

对于每一个$u(\cdot)\in U[0,T]$, 相应的性能指标定义为

$$\begin{aligned}J(u;x_0,i)=E\Big\{\int_0^T&[x^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}_1(r_t)Q_1(r_t)x+\\ &u^{\mathrm{T}}R_{11}(r_t)u]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}.\end{aligned}\qquad(6)$$

下面给出两个重要引理.

引理 1 (广义Itô微分公式)[6] 设$x(t)$满足如下

随机微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=b(t,x(t),r_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,x(t),r_t)\mathrm{d}W(t).$$

给定 $\Phi(\cdot,\cdot,i)\in C^2([0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n)$, $i\in\varphi$, 则有

$$E\{\Phi(T,x(T),r_T)-\Phi(0,x(0),r_0)|r_0=i\}=$$
$$E\Big\{\int_0^T[\Phi_t(t,x(t),r_t)+\nabla\Phi(t,x(t),r_t)]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\},$$

其中

$$\nabla\Phi(x,i)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma'(t,x,i)\Phi_{xx}(t,x,i)\sigma(t,x,i)]+$$
$$b'(t,x,i)\Phi_x(t,x,i)+\sum_{j=1}^l\pi_{ij}\Phi(t,x,j).$$

考虑系统 (5), 对 $x^{\mathrm{T}}P(i)x$ 应用广义 Itô 微分公式, 可得到如下结论.

引理 2　设 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\in\boldsymbol{S}_n^l$ 给定, 对具有初始条件 $(x_0,i)\in\boldsymbol{R}^n\times\varphi$ 的系统 (5), 有

$$E\Big\{\int_0^T\Big[x^{\mathrm{T}}(t)\Big(\dot{P}(r_t)+P(r_t)A(r_t)+A^{\mathrm{T}}(r_t)P(r_t)+$$
$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}(r_t)P(r_t)\tilde{A}(r_t)+\sum_{j=1}^l\pi_{r_tj}P(j)\Big)x(t)+$$
$$2u^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(r_t)P(r_t)x(t)\Big]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}=$$
$$E[x^{\mathrm{T}}(T)P(r_T)x(T)]-x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0.\tag{7}$$

根据随机最优控制的相关理论, 有如下定理.

定理 1　对于系统 (5), 假设对于任意的 $u(\cdot)\in U[0,T]$, 若如下微分 Riccati 方程:

$$\begin{cases}\dot{P}(i)+P(i)A(i)+A^{\mathrm{T}}(i)P(i)+\\ \tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\tilde{A}(i)+Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)+\sum_{j=1}^l\pi_{ij}P(j)-\\ P(i)B(i)R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)=0,\\ P(T,i)=0,\ i\in\varphi\end{cases}\tag{8}$$

存在解 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\geqslant 0\in\boldsymbol{S}_n^l$, 则最优控制策略 $u^*(\cdot)$ 存在, 且其显式形式为

$$u^*(t)=\sum_{i=1}^lK_1(i)\chi_{r_t=i}(t)x(t),\ i\in\varphi,$$

其中 $K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)$. 同时, 最优性能指标值为

$$J(u^*;x_0,i)=x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0,\ i\in\varphi.$$

证明　利用"配方法"进行证明. 设 $P(i)\in\boldsymbol{S}_n$ 是方程 (8) 的解, $x(\cdot)$ 为方程 (5) 相应于允许控制 $u(\cdot)\in U[0,T]$ 的解. 考虑到式 (5) 和 (6), 取值函数 $V(t,x,i)=x^{\mathrm{T}}(t)P(t,i)x(t)$. 对 $V(t,x,i)$ 应用广义 Itô 微分公式 (为简单起见, 变量 t 已省略), 可得

$$\mathrm{d}V(t,x,i)=\Big\{x^{\mathrm{T}}\Big(\dot{P}(i)+P(i)A(i)+A^{\mathrm{T}}(i)P(i)+$$
$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\tilde{A}(i)+\sum_{j=1}^l\pi_{ij}P(j)\Big)x+$$
$$2u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x\Big\}\mathrm{d}t+\{\cdots\}\mathrm{d}W.\tag{9}$$

在区间 $[0,T]$ 上对式 (9) 两边积分, 再取数学期望, 得

$$E[x^{\mathrm{T}}(T)P(T,i)x(T)]-x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0=$$
$$E\Big\{\int_0^T\Big[x^{\mathrm{T}}\Big(\dot{P}(i)+P(i)A(i)+A^{\mathrm{T}}(i)P(i)+$$
$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\tilde{A}(i)+\sum_{j=1}^l\pi_{ij}P(j)\Big)x+$$
$$2u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x\Big]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}.\tag{10}$$

将式 (10) 代入性能指标 (6) 中, 得到

$$J(u;x_0,i)=$$
$$-E[x^{\mathrm{T}}(T)P(T,i)x(T)]+x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0+$$
$$E\Big\{\int_0^T\Big[x^{\mathrm{T}}(\dot{P}(i)+P(i)A(i)+$$
$$A^{\mathrm{T}}(i)P(i)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\tilde{A}(i)+$$
$$Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)+\sum_{j=1}^l\pi_{ij}P(j))x\Big]\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^T[x^{\mathrm{T}}P(i)B(i)u+u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x+$$
$$u^{\mathrm{T}}R_{11}(i)u]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}.\tag{11}$$

对式 (11) 的第 2 个积分项进行配方, 得

$$x^{\mathrm{T}}P(i)B(i)u+u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x+u^{\mathrm{T}}R_{11}(i)u=$$
$$[u+R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x]^{\mathrm{T}}R_{11}(i)\times$$
$$[u+R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x]-$$
$$x^{\mathrm{T}}P(i)B(i)R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)x.$$

将上式代入式 (11), 并利用方程 (8), 最后得

$$J(u^*;x_0,i)=x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0,\ i\in\varphi.\tag{12}$$

由式 (12) 可知, 定理 1 的结论是明显的. □

定理 1 给出了最优控制策略 u^* 存在的充分条件, 下述定理 2 将给出其必要条件.

定理 2　对于系统 (5), 若

$$u^*(t)=\sum_{i=1}^lK_1(i)\chi_{r_t=i}(t)x(t)$$

是最优控制策略, 其中 $K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)$, $i\in\varphi$ 是连续矩阵值函数, 则微分 Riccati 方程 (8) 存在解 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\geqslant 0\in\boldsymbol{S}_n^l$. 此时

$$K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i).$$

证明　利用"动态规划法"来证明. 根据动态规划的原理, 值函数 $V(s,y,i)$ 对于任意的 $i\in\varphi$ 满足如下 HJB 方程:

$$V_s(s,y,i)+\min_u\Big\{y^{\mathrm{T}}Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)y+u^{\mathrm{T}}R_{11}(i)u+$$
$$[A(i)y+B(i)u]^{\mathrm{T}}V_y(s,y,i)+\frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)V_{yy}(s,y,i)\times$$

$$\tilde{A}(i)y+\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}V(s,y,i)\Big\}=0. \tag{13}$$

根据文献[6]中定理4.1的分析, 取二次型值函数 $V(s,y,i)$, 即

$$V(s,y,i)=y^{\mathrm{T}}P(s,i)y, i\in\varphi. \tag{14}$$

其中 $P(s,i)\in\boldsymbol{S}_n$, 且在区间 $[0,T]$ 可微. 将式(14)代入(13)得

$$\begin{cases} y^{\mathrm{T}}\Big(\dot{P}(i)+P(i)A(i)+A^{\mathrm{T}}(i)P(i)+\\ Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\tilde{A}(i)+\\ \sum\limits_{j=1}^{l}\pi_{ij}P(j)\Big)y+\\ \min\limits_{u}\{u^{\mathrm{T}}R_{11}(i)u+2u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)y\}=0,\\ P(T,i)=0,\ i\in\varphi. \end{cases} \tag{15}$$

式(15)中第1个方程左边的第2项取最小值, 当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial u}[u^{\mathrm{T}}R_{11}(i)u+2u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(i)P(i)y]=0,\ i\in\varphi, \tag{16}$$

即

$$R_{11}(i)u+B^{\mathrm{T}}(i)P(i)y=0,\ i\in\varphi. \tag{17}$$

所以

$$u^*=K_1(i)y=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P(i)y,\ i\in\varphi. \tag{18}$$

将式(18)代入(13), 经简单运算知 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\in\boldsymbol{S}_n^l$ 满足方程(8). 注意到 $R_{11}(i)>0$, 由文献[6]知 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\in\boldsymbol{S}_n^l$ 是方程(8)的解. □

1.3 有限时域的主要结论

借助1.2节单人博弈情形的相关结论, 不难得到下述定理.

定理 3 对于随机Nash微分博弈问题1, 假设如下微分Riccati方程 $(i,j\in\varphi)$:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(i)+[A(i)+C(i)K_2(i)]^{\mathrm{T}}P_1(i)+\\ P_1(i)[A(i)+C(i)K_2(i)]+Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)+\\ \sum\limits_{j=1}^{l}\pi_{ij}P_1(j)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(i)P_1(i)\tilde{A}(i)+\\ K_2^{\mathrm{T}}(i)R_{12}(i)K_2(i)+P_1(i)B(i)K_1(i)=0,\\ P_1(T,i)=0,\\ K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P_1(i); \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dot{P}_2(j)+[A(j)+B(j)K_1(j)]^{\mathrm{T}}P_2(j)+\\ P_2(j)[A(j)+B(j)K_1(j)]+Q_2^{\mathrm{T}}(j)Q_2(j)+\\ \sum\limits_{k=1}^{l}\pi_{jk}P_2(k)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(j)P_2(j)\tilde{A}(j)+\\ K_1^{\mathrm{T}}(j)R_{21}(j)K_1(j)+P_2(j)C(j)K_2(j)=0,\\ P_2(T,j)=0,\\ K_2(j)=-R_{22}^{-1}(j)C^{\mathrm{T}}(j)P_2(i) \end{cases} \tag{20}$$

存在解 $P=(P_1,P_2)\in\boldsymbol{S}_n^l\times\boldsymbol{S}_n^l$. 其中 $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\geqslant 0$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\geqslant 0$. 则随机Nash微分博弈问题1存在均衡解

$$u^*(t)=\sum_{i=1}^{l}K_1(i)\chi_{r_t=i}(t)x(t),$$

$$v^*(t)=\sum_{i=1}^{l}K_2(i)\chi_{r_t=i}(t)x(t).$$

证明 设 $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\in\boldsymbol{S}_n^l$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\in\boldsymbol{S}_n^l$ 是微分Riccati方程(19)和(20)的解. 注意到

$$v^*(t)=\sum_{i=1}^{l}K_2(i)\chi_{r_t=i}(t)x(t),$$

将 $v^*(t)$ 代入系统(2), 有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=[(A(r_t)+C(r_t)K_2(r_t))x(t)+\\ \qquad B(r_t)u(t)]\mathrm{d}t+\tilde{A}(r_t)x(t)\mathrm{d}W(t),\\ x(0)=x_0. \end{cases} \tag{21}$$

考虑标量函数 $V_1(t,x,r_t)=x^{\mathrm{T}}(t)P_1(t,r_t)x(t)$, 对 $V_1(t,x,r_t)$ 应用广义Itô微分公式, 有

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}[V_1(t,x,r_t)]=\\ &\Big\{x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\dot{P}_1(r_t)+(A(r_t)+C(r_t)K_2(r_t))^{\mathrm{T}}P_1(r_t)+\\ &P_1(r_t)(A(r_t)+C(r_t)K_2(r_t))+\sum_{j=1}^{l}\pi_{r_tj}P_1(j)+\\ &\tilde{A}^{\mathrm{T}}(r_t)P_1(r_t)\tilde{A}(r_t)\Big]x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(r_t)P_1(r_t)x(t)+\\ &x^{\mathrm{T}}(t)P_1(r_t)B(r_t)u(t)\Big\}\mathrm{d}t+(\cdots)\mathrm{d}W(t). \end{aligned} \tag{22}$$

在区间 $[0,T]$ 上对式(22)两边积分, 再取数学期望后代入 $J_1(u,v^*;x_0,i)$ 中, 经过适当运算, 得

$$\begin{aligned} &J_1(u,v^*;x_0,i)=\\ &-E[x^{\mathrm{T}}(T)P_1(T,i)x(T)]+x_0^{\mathrm{T}}P_1(i)x_0+\\ &E\Big\{\int_0^T x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\dot{P}_1(r_t)+Q_1^{\mathrm{T}}(r_t)Q_1(r_t)+\\ &(A(r_t)+C(r_t)K_2(r_t))^{\mathrm{T}}P_1(r_t)+\\ &P_1(r_t)(A(r_t)+C(r_t)K_2(r_t))+\\ &\sum_{j=1}^{l}\pi_{r_tj}P_1(j)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(r_t)P_1(r_t)\tilde{A}(r_t)+\\ &K_2^{\mathrm{T}}(r_t)R_{12}(r_t)K_2(r_t)+\\ &P_1(r_t)B(r_t)K_1(r_t)\Big]x(t)\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}+\\ &E\Big\{\int_0^T[u(t)-K_1(r_t)x(t)]^{\mathrm{T}}R_{11}(r_t)\times\\ &[u(t)-K_1(r_t)x(t)]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\}. \end{aligned} \tag{23}$$

注意到 $R_{11}(r_t)>0$, 结合式(19)和(20), 可得 $J_1(u,v^*;x_0,i)\geqslant x_0^{\mathrm{T}}P_1(i)x_0$, 故有 $u^*(t)=K_1(r_t)x(t)$, 且最优值为 $x_0^{\mathrm{T}}P_1(i)x_0$. 类似地, 给定 $u^*(t)=K_1(r_t)x(t)$, 取

标量函数 $V_2(t,x,r_t)=x^{\rm T}(t)P_2(t,r_t)x(t)$, 采用与上面类似的分析步骤, 则有 $v^*(t)=K_2(r_t)x(t)$, $J_2(u^*,v^*;x_0,i)=x_0^{\rm T}P_2(i)x_0$. □

定理 3 只给出了 Nash 均衡策略 (u^*,v^*) 存在的充分条件, 在一些实际情况中, 还需要知道它的必要条件, 下述定理将给出 (u^*,v^*) 存在的必要条件, 其详细证明过程类似于定理 2, 这里从略.

定理 4　假设随机 Nash 微分博弈问题 1 存在形如 $u^*(t)=K_1(r_t)x(t)$, $v^*(t)=K_2(r_t)x(t)$ 的均衡解 (u^*,v^*), 其中 $K_\tau\in M^l_{m_\tau,n}(\tau=1,2)$ 是连续矩阵值函数, 则微分 Riccati 方程 (19) 和 (20) 存在解 $P=(P_1,P_2)\in \boldsymbol{S}^l_n\times\boldsymbol{S}^l_n$. 其中: $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\geqslant 0$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\geqslant 0$. 此时

$$K_1(r_t)=R_{11}^{-1}(r_t)B^{\rm T}(r_t)P_1(r_t),$$
$$K_2(r_t)=R_{22}^{-1}(r_t)C^{\rm T}(r_t)P_2(r_t).$$

2　无限时域随机 Nash 微分博弈

2.1　预备知识

首先介绍无限时域随机最优控制中的一个重要概念——随机稳定性.

考虑下述随机微分方程描述的线性 Markov 切换系统:

$$\begin{aligned}{\rm d}x(t)=&[A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)]{\rm d}t+\\&\tilde A(r_t)x(t){\rm d}W(t).\end{aligned}\tag{24}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是状态变量, $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 是控制变量, 系数矩阵 $A(r_t)$、$\tilde A(r_t)\in M^l_n$, $B(r_t)\in M^l_{n,m}$ 为常数阵.

定义 1[8]　给定任意的初始状态 $x(0)=x_0$, $r_0=i$, 系统 (24) 或 $(A,B,\tilde A)$ 是 (均方意义下) 随机稳定的, 如果存在一个反馈控制 $u(t)=\sum\limits_{i=1}^{l}K(i)x(t)\chi_{r_t=i}$, 其中 $K(i)\in M^l_{m,n}$, $i\in\varphi$ 为常数阵, 使得闭环系统

$$\begin{aligned}{\rm d}x(t)=&[A(r_t)x(t)+B(r_t)K(r_t)]x(t){\rm d}t+\\&\tilde A(r_t)x(t){\rm d}W(t)\end{aligned}$$

是渐近均方稳定的, 即

$$\lim_{t\to\infty}E[x^{\rm T}(t)x(t)|r_0=i]=0.$$

引理 3[8]　系统 (24) 或 $(A,B,\tilde A)$ 随机稳定当且仅当下述 Lyapunov 型方程:

$$\begin{aligned}L(P):=&P(i)A(i)+A^{\rm T}(i)P(i)+\\&\tilde A^{\rm T}(i)P(i)\tilde A(i)+\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}P(j)+\\&C_1^{\rm T}(i)C_1(i)=0,\ i\in\varphi\end{aligned}\tag{25}$$

存在唯一解 $P=(P(1),P(2),\cdots,P(l))\geqslant 0\in\boldsymbol{S}^l_n$.

2.2　无限时域的主要结论

仍考虑式 (2) 所示的线性 Markov 切换系统, 为了叙述方便, 将式 (2) 复制为下式:

$$\begin{cases}{\rm d}x(t)=[A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)+\\\qquad C(r_t)v(t)]{\rm d}t+\tilde A(r_t)x(t){\rm d}W(t),\\x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{26}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是状态变量, $u(t)\in\boldsymbol{R}^{m_1}$、$v(t)\in\boldsymbol{R}^{m_2}$ 是两博弈人的决策控制变量, 系数矩阵 $A(r_t)$、$\tilde A(r_t)\in M^l_n$, $B(r_t)$、$C(r_t)\in M^l_{n,m_\tau}$ $(\tau=1,2)$ 为常数阵.

设 $(0,x_0)\in[0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n$ 是给定的初始时间和初始状态, 令 $U_\tau[0,\infty)$ 表示一个 $\boldsymbol{R}^{m_\tau}$ 维的自适应平方可积过程, $\tau=1,2$. 对应于每一个 $(u,v)\in U[0,\infty)\equiv U_1[0,\infty)\times U_2[0,\infty)$, 每个博弈人都有一个二次型性能指标 $J_\tau(u,v;x_0,i)$, 即

$$\begin{aligned}&J_\tau(u,v;x_0,i)=\\&E\Big\{\int_0^\infty\Big[x^{\rm T}(t)Q_\tau^{\rm T}(r_t)Q_\tau(r_t)x(t)+\\&u^{\rm T}(t)R_{\tau1}(r_t)u(t)+\\&v^{\rm T}(t)R_{\tau2}(r_t)v(t){\rm d}t\Big]|r_0=i\Big\},\ \tau=1,2.\end{aligned}\tag{27}$$

其中: 控制权矩阵 $R_{11}(r_t)>0$, $R_{22}(r_t)>0$, $R_{12}(r_t)\geqslant 0$, $R_{21}(r_t)\geqslant 0$; 状态权矩阵 $Q_1^{\rm T}(r_t)Q_1(r_t)\geqslant 0$, $Q_2^{\rm T}(r_t)Q_2(r_t)\geqslant 0$; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

在式 (26) 和 (27) 中, 当 $r_t=i$, $i\in\varphi$ 时, $A(r_t)=A(i)$, $\cdots$. 于是, 无限时域两人随机 Nash 微分博弈问题定义如下.

随机 Nash 微分博弈问题 2　给定式 (26) 描述的随机系统, 寻找可行控制 $(u^*,v^*)\in U[0,\infty)$, 使得下式成立:

$$\begin{cases}J_1(u^*,v^*;x_0,i)\leqslant J_1(u,v^*;x_0,i),\\J_2(u^*,v^*;x_0,i)\leqslant J_2(u^*,v;x_0,i).\end{cases}\tag{28}$$

类似于上一节得到的有限时域随机 Nash 微分博弈问题的相关结果, 结合引理 3, 得到随机 Nash 微分博弈问题 2 存在均衡解的充分条件和必要条件分别如以下定理 5 和定理 6 所示 (由于证明方法与定理 3 和定理 4 类似, 这里不再赘述).

定理 5　对于系统 (26), 假设如下代数 Riccati 方程 $(i,j\in\varphi)$:

$$\begin{cases}[A(i)+C(i)K_2(i)]^{\rm T}P_1(i)+\\P_1(i)[A(i)+C(i)K_2(i)]+Q_1^{\rm T}(i)Q_1(i)+\\\sum\limits_{j=1}^{l}\pi_{ij}P_1(j)+\tilde A^{\rm T}(i)P_1(i)\tilde A(i)+\\K_2^{\rm T}(i)R_{12}(i)K_2(i)+P_1(i)B(i)K_1(i)=0,\\K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\rm T}(i)P_1(i);\end{cases}\tag{29}$$

$$
\begin{cases}
[A(j)+B(j)K_1(j)]^{\mathrm{T}}P_2(j)+\\
P_2(j)[A(j)+B(j)K_1(j)]+Q_2^{\mathrm{T}}(j)Q_2(j)+\\
\sum_{k=1}^{l}\pi_{jk}P_2(k)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}(j)P_2(j)\tilde{A}(j)+\\
K_1^{\mathrm{T}}(j)R_{21}(j)K_1(j)+P_2(j)C(j)K_2(j)=0,\\
K_2(i)=-R_{22}^{-1}(i)C^{\mathrm{T}}(i)P_2(i)
\end{cases}
\tag{30}
$$

存在解 $P=(P_1,P_2)\in \boldsymbol{S}_n^l\times \boldsymbol{S}_n^l$. 其中: $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\geqslant 0$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\geqslant 0$. 如果 $(A,B,C,\tilde{A})$ 随机稳定, 则随机 Nash 微分博弈问题 2 存在线性状态反馈均衡解

$$
u^*(t)=\sum_{i=1}^{l}K_1(i)x(t)\chi_{r_t=i},
$$

$$
v^*(t)=\sum_{i=1}^{l}K_2(i)x(t)\chi_{r_t=i}.
$$

定理 6 假设随机 Nash 微分博弈问题 2 存在形如 $u^*(t)=K_1(r_t)x(t)$, $v^*(t)=K_2(r_t)x(t)$ 的均衡解 (u^*,v^*), 其中 $K_\tau\in M_{m_\tau,n}^l(\tau=1,2)$ 是常数函数. 若 $(A,B,C,\tilde{A})$ 随机稳定, 则代数 Riccati 方程 (29) 和 (30) 存在解 $P=(P_1,P_2)\in \boldsymbol{S}_n^l\times \boldsymbol{S}_n^l$. 其中: $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\geqslant 0$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\geqslant 0$. 此时

$$
K_1(r_t)=R_{11}^{-1}(r_t)B^{\mathrm{T}}(r_t)P_1(r_t),
$$

$$
K_2(r_t)=R_{22}^{-1}(r_t)C^{\mathrm{T}}(r_t)P_2(r_t).
$$

注 1 对于形如式 (29) 和 (30) 的 Riccati 方程, 可以使用一些标准的数值积分方法进行求解, 如迭代算法[10]和线性矩阵不等式 (LMI) 方法[3]等.

3 微分博弈应用于混合 H_2/H_∞ 控制

将上述所得的有关随机 Nash 微分博弈的结论应用于线性 Markov 切换系统的混合 H_2/H_∞ 控制中. 首先给出混合 H_2/H_∞ 控制问题的数学描述, 然后利用 Nash 均衡策略理论求解混合 H_2/H_∞ 控制策略.

为了简单, 仅分析无限时域的线性 Markov 切换系统的混合 H_2/H_∞ 控制, 有限时域的分析与此类似.

考虑如下受控系统:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}x(t)=[A(r_t)x(t)+B_1(r_t)v(t)+\\
\qquad B_2(r_t)u(t)]\mathrm{d}t+A_1(r_t)x(t)\mathrm{d}W(t),\\
z(t)=\begin{bmatrix}C(r_t)x(t)\\ u(t)\end{bmatrix},\ x(0)=x_0\in \boldsymbol{R}^n.
\end{cases}
\tag{31}
$$

定义两个性能指标

$$
J_1(u,v;x_0,i)=
E\Big\{\int_0^\infty[\gamma^2v^{\mathrm{T}}(t)v(t)-z^{\mathrm{T}}(t)z(t)]\mathrm{d}t|r_0=i\Big\},
\tag{32a}
$$

$$
J_2(u,v;x_0,i)=
E\Big\{\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t|r_0=i\Big\},\ i\in\varphi.
\tag{32b}
$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是状态变量, $u(t)\in\boldsymbol{R}^{m_2}$ 是控制输入, $v(t)\in\boldsymbol{R}^{m_1}$ 是外界不确定性干扰, 系数矩阵 $A(r_t)$ 等为具有适当维数的常数阵.

无限时域的混合 H_2/H_∞ 控制的定义如下.

定义 2 给定干扰抑制水平 $\gamma>0$, 如果存在 $(u^*,v^*)\in U[0,\infty)$, 使得:

1) $u^*(t)$ 使系统 (31) 内部稳定, 即当 $v(t)=0$ 时, $u=u^*$, 且对于任意的初始值 $(x_0,i)\in\boldsymbol{R}^n\times\varphi$, 闭环系统 (31) 的状态轨迹满足

$$
\lim_{t\to\infty}E[x^{\mathrm{T}}(t)x(t)|r_0=i]=0.
$$

2) $|L_{u*}|_\infty<\gamma$, 其中

$$
|L_{u*}|_\infty=
\sup_{v\in U_2,x_0=0}\frac{\Big\{\sum_{i=1}^{l}E\Big[\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t|r_0=i\Big]\Big\}^{1/2}}{\Big\{\sum_{i=1}^{l}E\Big[\int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t|r_0=i\Big]\Big\}^{1/2}}.
$$

3) 假设存在最坏干扰 $v^*(t)\in U_2[0,\infty)$, 将其代入系统 (31), $u^*(t)$ 最小化输出能量

$$
J_2(u,v;x_0,i)=
E\Big\{\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t|r_0=i\Big\},\ i\in\varphi.
$$

当上述的 (u^*,v^*) 存在时, 称无限时域的混合 H_2/H_∞ 控制问题是可解的.

简单地说, 混合 H_2/H_∞ 控制问题是指: 给定式 (31) 描述的系统, 寻找一个控制器 u^*, 将它代入系统不仅使闭环系统满足 H_∞ 指标, 而且当最坏干扰 v^* 进入系统时, u^* 同时最小化 H_2 指标泛函. 特别地, 从理论上讲, 如果将混合 H_2/H_∞ 控制问题中的 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别看成两博弈人的决策控制变量, 则混合 H_2/H_∞ 控制问题将转化为求解一个随机微分博弈问题, 而混合 H_2/H_∞ 控制策略等价于寻找这两个指标泛函 $J_1(u,v)$ 和 $J_2(u,v)$ 的 Nash 均衡点 (u^*,v^*)[8]. 因此根据定理 5 和定理 6, 不难得到下述结论.

定理 7 对于系统 (31), 假设如下代数 Riccati 方程 $(i,j\in\varphi)$:

$$
P_1(i)A(i)+A^{\mathrm{T}}(i)P_1(i)+A_1^{\mathrm{T}}(i)P_1(i)A_1(i)+
C^{\mathrm{T}}(i)C(i)+\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}P_1(j)+\begin{bmatrix}P_1(i)\\P_2(i)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times
\begin{bmatrix}\gamma^{-2}B_1(i)B_1^{\mathrm{T}}(i) & -B_2(i)B_2^{\mathrm{T}}(i)\\ -B_2(i)B_2^{\mathrm{T}}(i) & B_2(i)B_2^{\mathrm{T}}(i)\end{bmatrix}\times
\begin{bmatrix}P_1(i)\\P_2(i)\end{bmatrix}=0,
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_2(j)A(j)+A^{\mathrm{T}}(j)P_2(j)+A_1^{\mathrm{T}}(j)P_2(j)A_1(j)+\\
&C^{\mathrm{T}}(j)C(j)+\sum_{k=1}^{l}\pi_{jk}P_2(k)+\begin{bmatrix}P_1(j)\\P_2(j)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times\\
&\begin{bmatrix}0 & \gamma^{-2}B_1(j)B_1^{\mathrm{T}}(j)\\ \gamma^{-2}B_1(j)B_1^{\mathrm{T}}(j) & -B_2(j)B_2^{\mathrm{T}}(j)\end{bmatrix}\times\\
&\begin{bmatrix}P_1(j)\\P_2(j)\end{bmatrix}=0
\end{aligned}\tag{34}
$$

存在解 $P=(P_1,P_2)\in\boldsymbol{S}_n^l\times\boldsymbol{S}_n^l$. 其中: $P_1=(P_1(1),P_1(2),\cdots,P_1(l))\geqslant 0$, $P_2=(P_2(1),P_2(2),\cdots,P_2(l))\geqslant 0$. 这里

$$
\begin{aligned}
&K_1(r_t)=\gamma^{-2}B_1^{\mathrm{T}}(r_t)P_1(r_t),\\
&K_2(r_t)=-B_2^{\mathrm{T}}(r_t)P_2(r_t).
\end{aligned}
$$

此时, u^* 称为系统 (31) 的混合 H_2/H_∞ 鲁棒控制策略, v^* 称为最坏干扰.

例 1　考虑各系数矩阵取如下值的系统 (31):

$$
\varphi=\{1,2\},\ \Pi=\begin{bmatrix}-7 & 7\\ 1 & -1\end{bmatrix},
$$

$$
A(1)=\begin{bmatrix}-20 & 1.5\\ 0.3 & -50\end{bmatrix},\ A(2)=\begin{bmatrix}-30 & 1.2\\ 3.6 & -10\end{bmatrix},
$$

$$
A_1(1)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ A_2(2)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0.5\end{bmatrix},
$$

$$
B_1(1)=\begin{bmatrix}3\\0.8\end{bmatrix},\ B_1(2)=\begin{bmatrix}1\\1.2\end{bmatrix},\ B_2(1)=\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix},
$$

$$
B_2(2)=\begin{bmatrix}0.5\\8\end{bmatrix},\ C(1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ C(2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.
$$

令 $\gamma=0.9$, 利用 LMI 解式 (33) 和 (34), 得

$$
P(1)=\begin{bmatrix}0.054\,8 & 0.023\,0\\ 0.023\,0 & 0.031\,3\end{bmatrix},\ P(2)=\begin{bmatrix}0.038\,9 & 0.072\,0\\ 0.072\,0 & 0.300\,4\end{bmatrix}.
$$

因此可得系统的混合 H_2/H_∞ 控制策略为: 当 $r_t=1$ 时, $u(t)=-0.594\,0x_1(t)-0.292\,6x_2(t)$; 当 $r_t=2$ 时, $u(t)=-0.595\,4x_1(t)-2.439\,2x_2(t)$.

注 2　尽管本文的结论都是限定在单噪声随机系统的条件下得出的, 但是, 对于多噪声情形, 本文所得的结论仍然成立. 例如, 如果将式 (26) 改写成如下形式:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}x(t)=[A(r_t)x(t)+B(r_t)u(t)+\\
\qquad C(r_t)v(t)]\mathrm{d}t+\\
\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{d}\tilde{A}_k(r_t)x(t)\mathrm{d}W_k(t),\\
x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n,
\end{cases}\tag{35}
$$

其中 $\{W_k\}$, $k=1,\cdots,d$ 是相互独立的一维 Wiener 过程. 则定理 5 仍然成立, 此时的代数 Riccati 方程 (29) 和 (30) 将变为

$$
\begin{cases}
[A(i)+C(i)K_2(i)]^{\mathrm{T}}P_1(i)+\\
P_1(i)[A(i)+C(i)K_2(i)]+Q_1^{\mathrm{T}}(i)Q_1(i)+\\
\displaystyle\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}P_1(j)+\sum_{k=1}^{d}\tilde{A}_k^{\mathrm{T}}(i)P_1(i)\tilde{A}_k(i)+\\
K_2^{\mathrm{T}}(i)R_{12}(i)K_2(i)+P_1(i)B(i)K_1(i)=0,\\
K_1(i)=-R_{11}^{-1}(i)B^{\mathrm{T}}(i)P_1(i);
\end{cases}\tag{36}
$$

$$
\begin{cases}
[A(j)+B(j)K_1(j)]^{\mathrm{T}}P_2(j)+\\
P_2(j)[A(j)+B(j)K_1(j)]+Q_2^{\mathrm{T}}(j)Q_2(j)+\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{l}\pi_{jk}P_2(k)+\sum_{k=1}^{d}\tilde{A}_k^{\mathrm{T}}(j)P_2(j)\tilde{A}_k(j)+\\
K_1^{\mathrm{T}}(j)R_{21}(j)K_1(j)+P_2(j)C(j)K_2(j)=0,\\
K_2(j)=-R_{22}^{-1}(j)C^{\mathrm{T}}(j)P_2(j).
\end{cases}\tag{37}
$$

4　结　论

本文针对线性 Markov 切换系统, 在有限时域和无线时域两种情况下, 分别讨论其随机 Nash 微分博弈问题, 利用线性 Markov 切换系统随机最优控制的相关结果, 结合 Riccati 方程法, 得到了 Nash 均衡策略存在的充分必要条件, 并将其应用于线性 Markov 切换系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题. 数值例子验证了本文方法的有效性. 然而, 本文仅研究了噪声依赖于状态的线性 Markov 切换系统随机 Nash 微分博弈问题, 而在实际问题中, 许多可以用 Itô 型随机微分方程描述的系统, 其噪声往往不仅依赖于状态, 还依赖于控制或干扰[20-21]. 因此噪声依赖于状态、控制或干扰的随机微分博弈, 包括零和博弈、Nash 博弈和 Stackelberg 博弈等问题将是下一步的研究目标.

参考文献(References)

[1] Feng X, Loparo K A, Chizeck H J. Stochastic stability properties of jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(1): 38-53.

[2] Mao X, Yuan C. Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press, 2006: 164-267.

[3] Ait Rami M, El Ghaoui L. LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 44(11): 1666-1671.

[4] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(7): 777-788.

[5] Ji Y, Chizeck H J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous-time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(12): 1884-1892.

[6] Li X, Zhou X Y. Indefinite stochastic LQ control with Markovian jumps in finite time horizon[J]. Communications in Information and Systems, 2002, 2(3): 265-282.

[7] Li X, Zhou X Y, Ait Rami M. Indefinite stochastic linear quadratic control with Markovian jumps in infinite time horizon[J]. J of Global Optimization, 2003, 27(2/3): 149-175.

[8] Huang Y L, Zhang W H, Feng G. Infinite horizon H_2/H_∞ control for stochastic systems with Markovian jumps[J]. Automatica, 2008, 44(3): 857-863.

[9] Lin Z W, Lin Y, Zhang W H. An unified design for state and output feedback H_∞ control of nonlinear stochastic Markovian jump systems with state and disturbance-dependent noise[J]. Automatica, 2009, 45(12): 2955-2962.

[10] Dragan V, Morozan T. Game-theoretic coupled Riccati equations associated to controlled linear differential systems with jump Markov perturbations[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2001, 19(5): 715-751.

[11] Dragan V, Ivanov I. A numerical procedure to compute the stabilising solution of game theoretic Riccati equations of stochastic control[J]. Int J of Control, 2011, 84(4): 783-800.

[12] Sun C, Liu H P, He K Z, et al. Reduced order H_∞ filtering for linear systems with Markovian jump parameters[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(8): 739-746.

[13] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative game theory[M]. The 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 1999: 215-230.

[14] Dockner E, Jorgensen S N V Long, Sorger G. Differential games in economics and management science[M]. London: Cambridge University Press, 2000: 1-7.

[15] Friesz, Terry L. Dynamic optimization and differential games[M]. Boston: Springer, 2010: 277-281.

[16] Yeung D W K, Petrosyan L A. Cooperative stochastic differential games[M]. New York: Springer, 2006: 1-6.

[17] Song Q S, Yin G G, Zhang Z M. Numerical solutions for stochastic differential games with regime switching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(2): 509-520.

[18] Robert J Elliott, Tak Kuen Siu. A Markovian regime-switching stochastic differential game for portfolio risk minimization[C]. Proc of the American Control Conf. Washington: AACC Press, 2008: 1017-1022.

[19] Pan Z, Basar T. H_∞ control of Markovian jump systems and solutions to associated piecewise-deterministic differential games[C]. New Trends in Dynamic Games and Applications. Boston, 1995: 61-94.

[20] Hinrichsen D, Pritchard A J. Stochastic H_∞[J]. SIAM J on Control and Optimization, 1998, 36(5): 1504-1538.

[21] Ugrinovskii V A. Robust H_∞ control in the presence of stochastic uncertainty[J]. Int J of Control, 1998, 71(2): 219-237.

(上接第1156页)

[13] Osuka K, Sugimoto Y. Stabilization of quasi-passive-dynamic-walking based on delayed feedback control[C]. Proc of the 7th Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision. Marine Mandarin, 2002: 803-808.

[14] Sugimoto Y, Osuka K. Walking control of quasi passive dynamic walking robot “quart III” based on continuous delayed feedback control[C]. Proc of the Int Conf on Robotics and Biomimetics. Shenyang, 2004: 606-611.

[15] 刘向东, 黄文虎. 混沌系统延迟反馈控制的理论与实验研究[J]. 力学进展, 2001, 31(1): 18-32.
(Liu X D, Huang W H. Delayed feedback control of chaotic systems and its theoretical and experimental reseatches[J]. Advances in Mechanics, 2001, 31(1): 18-32.)

[16] Toshimitsu Ushio, Shigeru Yamamoto. Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems[J]. Physics Letters A, 1998, 247(1/2): 112-118.

[17] 张佩杰, 张冬梅, 田彦涛, 等. 欠驱动双足步行机器人动力学建模与稳定性分析[J]. 北京工业大学学报, 2009, 35(2): 258-263.
(Zhang P J, Zhang D M, Tian Y T, et al. Dynamic modeling and stability analysis of passive biped robot[J]. J of Beijing University of Technology, 2009, 35(2): 258-263.)

[18] 付成龙, 黄元林, 王健美, 等. 半被动双足机器人的准开环控制[J]. 机器人, 2009, 31(2): 110-123.
(Fu C L, Huang Y L, Wang J M, et al. Quasi open-loop control for semi-passive biped robots[J]. Robot, 2009, 31(2): 110-123.)

[19] Shigeru Y, Toru H, Toshimitsu U. Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems－I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(6): 785-789.