2013年12月 运 筹 学 学 报 第17卷 第4期
Dec., 2013 Operations Research Transactions Vol.17 No.4

一类特殊二次分配问题的线性化求解新方法*

张惠珍[1,2,†] 魏 欣[1] 马 良[1]

摘要 许多抽象于实际的二次分配问题, 其流矩阵与距离矩阵中有很多零元素, 求解该类二次分配问题时, 可通过先行利用零元素的信息减小问题规模, 缩短计算时间. 以二次分配问题的线性化模型为基础, 提出了一种求解流矩阵与距离矩阵中同时存在大量零元素的二次分配问题新方法, 不仅从理论上证明了方法的可行性, 而且从实验的角度说明了该方法比以往方法更加优越.

关键词 二次分配问题，线性化，稀疏二次分配问题，模型
中图分类号 O221.7
2010 数学分类号 90C27

A new solution method by linearization for a special kind of quadratic assignment problem*

ZHANG Huizhen[1,2,†] WEI Xin[1] MA Liang[1]

Abstract Usually, there are many zero elements in the flow matrix and distance matrix of the quadratic assignment problem (QAP) instances abstracted from the practical problems, and the computation time of solving this kind of QAP can be dramatically decreased by using its zero elements to reduce the size of the problem. Based on the linearization of the QAP, we proposed a new solution method for the QAP with many zero elements in both flow matrix and distance matrix in this paper. Moreover, the feasibilities and advantages of solving this special kind of QAP by using the new linearization are approved from the theoretical and experimental point of view, respectively.

Keywords quadratic assignment problem (QAP), linearization, sparse quadratic assignment problem (SQAD), model
Chinese Library Classification O221.7
2010 Mathematics Subject Classification 90C27

0 引 言

二次分配问题是易于表述却难以求解的组合优化NP难题，其一般可描述为: 给定n个

收稿日期：2012年9月26日
* 基金项目：上海市一流学科建设 (No. S1201YLXK)，高等学校博士学科点专项科研基金联合资助课题 (No. 20123120120005)，上海高校青年教师培养资助计划 (No. slg12010)，上海市教育委员会科研创新 (No. 14YZ090)，上海理工大学博士科研启动项目 (No. 1D-10-303-002)

1. 上海理工大学管理学院, 上海 200093，School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China
2. 上海理工大学超网络(中国)研究中心, 上海 200093，Center for Supernetworks Research, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China
† 通讯作者 Corresponding author, Email: zhzzywz@gmail.com

设施和n个地点，3个$n\times n$矩阵，$F=(f_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$D=(d_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$C=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其中，$f_{ij}$表示设施$i$和$j$之间的流量，$d_{ij}$表示位置$i$和$j$之间的距离，$c_{ij}$表示设施$i$位于位置$j$的花费，要求给每个设施分配到一个位置，并使设施之间的总流量(或费用)最小，

$$\min_{x\in X} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}\ x_{ij}x_{kl}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{0.1}$$

其中，X 满足

$$X=\left\{x\,\middle|\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,\cdots,n;\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,\cdots,n;\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i,j=1,\cdots,n\ \right\}.$$

许多抽象于实际问题的二次分配问题，其流矩阵与距离矩阵中有很多零元素，而且非零元素的分布很不均匀[1]. 在二次分配问题的求解中，如果能够先行利用零元素信息减小问题规模，将会节省大量运算时间. 文献[2，3]已对这类具有大量零元素的特殊二次分配问题的求解进行了探讨，并给出了仅具有零流或零距离的QAP求解方法，但并未涉及同时具有零流和零距离的QAP求解方法.

本文引入新的概念，将流矩阵与距离矩阵中有很多零元素的二次分配问题定义为稀疏二次配问题(SQAP)，并以二次分配问题的线性化模型为基础，对稀疏二次分配问题的求解进行了探讨，给出了理论依据. 同时，对二次分配基准问题库QAPLIB中部分具有稀疏流矩阵和稀疏距离矩阵的实例进行了测试，从实验的角度说明了相应的理论意义和利用零元素信息的重要性.

1 QAP 线性化模型

二次分配问题目标函数中的二次项在一定程度上增加了问题的求解复杂度，为此，通过一定方法将其二次项线性化，得到与原问题等价的(混合)整数规划模型，从而使问题的求解复杂度得到一定降低，能够应用既有的(混合)整数规划求解方法求解QAP问题；而且当问题规模较大，较难求解时，可通过求解该(混合)整数规划模型的线性松弛，求得原QAP问题最优解的下界值.

迄今为止，许多二次分配问题线性化方法已被提出，其大体可分为四类：(1) 通过引入变量$y_{ij}:=x_{ij}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}q_{ijkl}x_{kl}(1\leqslant i,j\leqslant n)$及其相应约束条件而得的QAP线性化模型[4−6]；(2) 通过引入0-1(或连续)变量$y_{ijkl}:=x_{ij}x_{kl}(1\leqslant i,j,k,l\leqslant n)$及其相应约束条件而得的QAP线性化模型[7−9]；(3)基于流矩阵的QAP线性化模型[10]；(4) QAP高阶模型[11,12].

虽然上述几种QAP线性化模型在理论上相互等价，但在求解QAP实例时，人们往往更青睐于所耗费的计算资源少，利用其连续或线性松弛所求解的下界接近于最优目标函数值的模型. 综合考虑这些因素，Adams-Johnson 模型是截至目前应用相对较多较广的QAP线性化模型，但该模型中仍存在大量冗余变量和约束. 文献[3]和[13]通过消除Adams-Johnson

模型中的冗余变量和约束，得到如下求解规模较小且较松弛的QAP模型QAPLP-RIII：

$$\text{QAPLP-RIII} \quad \min_{x\in X} \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k>i}^{n}\sum_{l\neq j}^{n} \tilde{q}_{ijkl}y_{ijkl} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} \tag{1.2}$$

$$\text{s.t.} \quad -x_{kl} + \sum_{j=1}^{l-1} y_{ijkl} + \sum_{j=l+1}^{n} y_{ijkl} = 0, \quad i,k,l = 1,\cdots,n,\ k>i, \tag{1.3}$$

$$-x_{ij} + \sum_{l=1}^{j-1} y_{ijkl} + \sum_{l=j+1}^{n} y_{ijkl} = 0, \quad i,j,k = 1,\cdots,n,\ k>i, \tag{1.4}$$

$$y_{ijkl} \geqslant 0, \quad 1\leqslant i<k\leqslant n,\ 1\leqslant j\neq l\leqslant n, \tag{1.5}$$

其中，$\tilde{q}_{ijkl} = f_{ik}d_{jl} + f_{ki}d_{lj}$，$\tilde{c}_{ij} = q_{ijij} + c_{ij} = f_{ii}d_{jj} + c_{ij}$.

2 SQAP 线性化模型

本文以QAP的线性化模型QAPLP-RIII为基础，研究稀疏二次分配问题的求解方法. 设F和D分别为QAP目标函数中的流矩阵和距离矩阵. 抽象于实际的QAP问题中，许多工厂之间的流量或许多地点之间的距离为0，即F和D中存在$f_{i_0k_0} = f_{k_0i_0} = 0$ $(1\leqslant i_0\neq k_0\leqslant n)$，$d_{j_0l_0} = d_{l_0j_0} = 0$ $(1\leqslant j_0\neq l_0\leqslant n)$，这使得变量$y_{i_0jk_0l}$和$y_{ij_0kl_0}$的目标函数系数为0，即$\tilde{q}_{i_0jk_0l} = 0$ $(1\leqslant j\neq l\leqslant n, 1\leqslant i_0<k_0\leqslant n)$，$\tilde{q}_{ij_0kl_0} = 0$ $(1\leqslant j_0\neq l_0\leqslant n, 1\leqslant i<k\leqslant n)$. 本文将变量$y_{i_0jk_0l}$和$y_{ij_0kl_0}$分别称为零流变量和零距离变量，统称为零变量.

从目标函数值的角度考虑，不管零变量$y_{i_0jk_0l}$和$y_{ij_0kl_0}$取值为0或1，它们对目标函数值的贡献量均为0. 那么，如果通过一定的方法将这些目标函数系数为0的变量消除，将会减小问题的求解规模，节省大量运算资源[2,3].

定理 2.1 *若$y_{ijkl}$$(1\leqslant i<k\leqslant n, 1\leqslant j\neq l\leqslant n)$为模型QAPLP-RIII中的零变量，则零变量$y_{ijkl}$不能被单独消除.*

证明 不失一般性，假设变量$y_{i_0j_0k_0l_0}$ $(1\leqslant i_0<k_0\leqslant n，1\leqslant j_0\neq l_0\leqslant n)$为零流变量. 设$x^0\in X$，$x^0_{i_0j_0} = x^0_{k_0l_0} = 1$ $(1\leqslant i_0<k_0\leqslant n，1\leqslant j_0\neq l_0\leqslant n)$且$\tilde{q}_{i_0j_0k_0l_0} = 0$.

若将变量$y_{i_0j_0k_0l_0}$消除，由$\sum\limits_{l=1,l\neq j}^{n} y_{ijkl} = x_{ij}$，可得：

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j_0,l_0}}^{n} y_{i_0j_0k_0l} = x^0_{i_0j_0} = 1.$$

从上式可知，存在$y_{i_0j_0k_0l_1} = 1$且$l_1\neq l_0$. 进而，由$\sum\limits_{j=1}^{l-1} y_{ijkl} + \sum\limits_{j=l+1}^{n} y_{ijkl} = x_{kl}$，得：

$$1 = y_{i_0j_0k_0l_1} \leqslant \sum_{j=1}^{l_1-1} y_{i_0jk_0l_1} + \sum_{j=l_1+1}^{n} y_{i_0jk_0l_1} = x^0_{k_0l_1} \leqslant 1.$$

因此，$x^0_{k_0l_1} = 1 (l_1\neq l_0)$. 这与$x^0\in X$且$x^0_{k_0l_0} = 1$相矛盾.

推论 2.1 任意通过引入$y_{ijkl} := x_{ij}x_{kl}$ $(1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n)$及其相应约束条件而得的QAP线性化模型中的零变量不能被单独消除.

定理2.1和推论2.1表明：为了得到与原QAP等价的SQAP线性化模型，消除QAP线性化模型中的零变量时，必须同时消除包含零变量的约束.

记$N=\{1,2,\cdots,n\}$；$F_0=\{(i,k)|f_{ik}=f_{ki}=0,i\in N,k\in N,i\neq k\}$；$D_0=\{(j,l)|d_{jl}=d_{lj}=0,j\in N,l\in N,j\neq l\}$. I，J，K和L分别为N的子集，且满足：$\forall i\in I$，$\exists k\in K$，使得$(i,k)\in F_0$，反之亦然；$\forall j\in J$，$\exists l\in L$，使得$(j,l)\in D_0$，反之亦然. 文献[2]分别将Adams-Johnson 模型中的零流变量和零距离变量及其相应约束消除，得到如下SQAP线性化模型SQAP-I和SQAP-II：

$$\text{SQAP-I}\quad \min_{x\in X}\sum_{\substack{i,k=1\\k>i\\(i,k)\notin F_0}}^{n}\sum_{\substack{j,l=1\\j\neq l}}^{n}\tilde{q}_{ijkl}y_{ijkl}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} \tag{2.6}$$

$$\text{s.t.}\quad -x_{ij}+\sum_{k=1}^{i-1}y_{klij}+\sum_{k=i+1}^{n}y_{ijkl}=0,\qquad i,j,l=1,\cdots,n,\ j\neq l,\ i\notin I, \tag{2.7}$$

$$-x_{ij}+\sum_{l=1}^{j-1}y_{klij}+\sum_{l=j+1}^{n}y_{klij}=0,\qquad i,j,k=1,\cdots,n,\ k<i,\ (i,k)\notin F_0, \tag{2.8}$$

$$-x_{ij}+\sum_{l=1}^{j-1}y_{ijkl}+\sum_{l=j+1}^{n}y_{ijkl}=0,\qquad i,j,k=1,\cdots,n,\ k>i,\ (i,k)\notin F_0, \tag{2.9}$$

$$y_{ijkl}\geqslant 0,\qquad k>i,\ j\neq l,\ (i,k)\notin F_0. \tag{2.10}$$

$$\text{SQAP-II}\quad \min_{x\in X}\sum_{\substack{i,k=1\\k>i}}^{n}\sum_{\substack{j,l=1\\j\neq l\\(j,l)\notin D_0}}^{n}\tilde{q}_{ijkl}y_{ijkl}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} \tag{2.11}$$

$$\text{s.t.}\quad -x_{ij}+\sum_{k=1}^{i-1}y_{klij}+\sum_{k=i+1}^{n}y_{ijkl}=0,\qquad i,j,l=1,\cdots,n,\ j\neq l,\ (j,l)\notin D_0, \tag{2.12}$$

$$-x_{ij}+\sum_{l=1}^{j-1}y_{klij}+\sum_{l=j+1}^{n}y_{klij}=0,\qquad i,j,k=1,\cdots,n,\ k<i,\ j\notin J, \tag{2.13}$$

$$-x_{ij}+\sum_{l=1}^{j-1}y_{ijkl}+\sum_{l=j+1}^{n}y_{ijkl}=0,\qquad i,j,k=1,\cdots,n,\ k>i,\ j\notin J, \tag{2.14}$$

$$y_{ijkl}\geqslant 0,\qquad k>i,\ j\neq l,\ (j,l)\notin D_0 \tag{2.15}$$

对于流矩阵F和距离矩阵D同为稀疏矩阵的QAP，模型SQAP-I和SQAP-II中仍存在大量零变量，为了消除所有零变量，定义如下变量z_{ijk}:

$$z_{ijk} := \sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} y_{ijkl}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J, \tag{2.16}$$

并以QAPLP-RIII为基础，得到一种线性化新模型SQAP-III：

$$\text{SQAP-III} \quad \min_{x\in X} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k>i \\ (i,k)\notin F_0}}^{n} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j\neq l \\ (j,l)\notin D_0}}^{n} \tilde{q}_{ijkl} y_{ijkl} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \tag{2.17}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} y_{ijkl} = x_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\notin J, \tag{2.18}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\notin D_0}}^{n} y_{ijkl} + z_{ijk} = x_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J, \tag{2.19}$$

$$x_{ij} + \sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} x_{kl} \leqslant 1 + z_{ijk}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J, \tag{2.20}$$

$$z_{ijk} \leqslant \sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} x_{kl}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J, \tag{2.21}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\notin D_0}}^{n} y_{ijkl} \leqslant x_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J, \tag{2.22}$$

$$y_{ijkl} \in \{0,1\}, \quad 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ (j,l)\notin D_0, \tag{2.23}$$

$$z_{ijk} \in \{0,1\}, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J. \tag{2.24}$$

定理 2.2 SQAP-III是SQAP的线性化模型.

证明 记$F_{\text{QAPLP-RIII}}$和$F_{\text{SQAP-III}}$分别为QAPLP-RIII和SQAP-III的可行解集. 由$y_{ijkl} = x_{ij}x_{kl}$，可得

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} y_{ijkl} = x_{ij}\Big(\sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} x_{kl}\Big).$$

证明该定理成立，当且仅当下述(2.25)成立，

$$z_{ijk} = \sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} y_{ijkl} = x_{ij}\left(\sum_{\substack{l=1 \\ (j,l)\in D_0}}^{n} x_{kl}\right), \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n,\ i<k,\ (i,k)\notin F_0,\ j\in J. \tag{2.25}$$

首先，$\forall(x,y)\in F_{\text{QAPLP-RIII}}$，满足$y_{ijkl}=x_{ij}x_{kl}$ $(1\leqslant i,j,k,l\leqslant n,\ k>i,\ j\neq l)$. 令$z_{ijk}:=\sum\limits_{l=1,(j,l)\in D_0}^{n}y_{ijkl}$，显然，(2.25)成立.

其次，$\forall(x,y,z)\in F_{\text{SQAP-III}}$，考虑如下3种情况：

- 若$x_{ij}=0$，由(2.19)可得，$z_{ijk}=0,\ 1\leqslant i,j,k\leqslant n$，$(i,k)\notin F_0,\ j\in J$；
- 若$\sum\limits_{l=1,(j,l)\in D_0}^{n}x_{kl}=0$，由(2.21)可得：$z_{ijk}=0$，$1\leqslant i,j,k\leqslant n$，$(i,k)\notin F_0,\ j\in J$；
- 若$x_{ij}=\sum\limits_{l=1,(j,l)\in D_0}^{n}x_{kl}=1$，则由(2.20)及(2.21)知，$z_{ijk}=1$.

由此可知：$\forall(x,y,z)\in F_{\text{SQAP-III}}$，满足式(2.25).

因此，$F_{\text{QAPLP-RIII}}=F_{\text{SQAP-III}}$.

3 算例分析

选择二次分配基准问题库QAPLIB中10个具有代表性的难解QAP实例来测试本文提出的方法，这10个实例的流矩阵和距离矩阵均为稀疏矩阵. 实验环境：Intel(R) Core(TM) i5 CPU, 3.20GHz，4GB内存，操作系统为Win XP，优化软件为Cplex12.1，数据前期处理由Matlab R2008b完成，Cplex最长CPU计算时间为4小时.

表1给出了所求实例及其规模n，最优目标函数值或当前已知最优目标函数值(Opt. or BK Sol.)，所求实例的流矩阵与距离矩阵的密度(DOM(%))，以及利用SQAP-I，SQAP-II和SQAP-III求解QAP实例时的变量数(No. of Vars.)和约束数(No. of Cons.).

表 1 16个QAP 求解实例

Ins.	n	Opt. or BK Sol.	DOM(%) Flow	DOM(%) Dis.	No. of Vars. I	No. of Vars. II	No. of Vars. III	No. of Cons. I	No. of Cons. II	No. of Cons. III
Esc16h	16	996 (Opt.)	89.84	68.75	27 856	21 376	22 336	6 112	2 848	7 392
Esc16i	16	14 (Opt.)	11.72	68.75	3 856	21 376	3 136	512	2 848	992
Esc16j	16	8 (Opt.)	9.38	68.75	3 136	21 376	2 560	416	2 848	800
Esc32a	32	130 (B)	14.45	81.25	74 432	413 696	64 960	4 800	26 688	9 536
Esc32b	32	168 (B)	21.09	81.25	108 160	413 696	94 336	6 976	26 688	13 888
Esc32c	32	642 (B)	25.59	81.25	130 976	413 696	114 208	8 448	26 688	16 832
Esc32d	32	200 (B)	17.58	81.25	90 304	413 696	78 784	5 824	26 688	11 584
Esc32f	32	2 (Opt.)	1.17	81.25	6 976	413 696	6 208	448	26 688	832
Esc32g	32	6 (Opt.)	1.76	81.25	9 952	413 696	8 800	640	26 688	1 216
Esc32h	32	438	27.54	81.25	140 896	413 696	122 848	9 088	26 688	18 112

表2—表4分别给出了QAP实例由SQAP-I，SQAP-II和SQAP-III求解的结果. 4小时计算时间内Cplex没有给出任何B& B Gap (%)时，用“－”表示；由于计算时间的限制，计算过程在未得到最优解前而强行结束，用“*”表示. 表2—表4中B& B Gap (%)和LP

Gap(%)的计算公式分别为：

$$\text{B\&B Gap} = \frac{\text{Cost-bestnode}}{\text{Cost}} \times 100\% \tag{3.1}$$

$$\text{LP Gap} = \frac{\text{Opt. or BK Sol.-LPCost}}{\text{Opt. or BK Sol.}} \times 100\% \tag{3.2}$$

其中，bestnode为计算过程中Cplex所给出的下界值.

表 2 利用SQAP-I求解QAP实例的运行结果

Ins.	(Mixed) Integer programming				LP Relaxation		
	Cost	B& B Gap (%)	Cpu time(Sec.)	No. of Nodes	LP Cost	LPGap (%)	Cpu time(Sec.)
Esc16h	996	2.43	14 400(*)	498	690	30.72	467.75
Esc16i	14	0.00	1.41	180	0	100.00	0.05
Esc16j	8	0.00	0.53	37	0	100.00	0.03
Esc32a	152	83.22	14 400(*)	1 285	0	100.00	54.59
Esc32b	212	87.84	14 400(*)	556	0	100.00	180.23
Esc32c	660	88.64	14 400(*)	568	0	100.00	239.72
Esc32d	216	85.19	14 400(*)	1 590	0	100.00	102.17
Esc32f	2	0.00	0.28	2	0	100.00	0.02
Esc32g	6	0.00	7.92	594	0	100.00	0.06
Esc32h	454	88.55	14 400(*)	526	0	100.00	268.00

表 3 利用SQAP-II求解QAP实例的运行结果

Ins.	(Mixed) Integer programming				LP Relaxation		
	Cost	B& B Gap(%)	Cpu time(Sec.)	No. of Nodes	LP Cost	LP Gap(%)	Cpu time(Sec.)
Esc16h	996	0	2 182.56	6 225	340	65.86	8.67
Esc16i	14	0	6 942.53	25 733	0	100.00	6.44
Esc16j	8	0	2 568.22	4 461	0	100.00	5.86
Esc32a	368	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32b	320	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32c	866	100	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32d	340	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32f	30	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32g	28	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)
Esc32h	630	-	14 400(*)	1	0	100.00	14 400(*)

由表1可知: 所求10个算例中，除算例Esc16h外，其余9个算例的流矩阵密度均小于距离矩阵的密度，因此，他们利用SQAP-I的求解规模小于利用SQAP-II的求解规模. 为了同时消除QAPLP-RIII中的零流变量和零距离变量，并且得到与QAPLP-RIII等价的QAP线性化模型，SQAP-III中引入了新变量及其相应约束，因此，当所求问题距离矩阵的密度

及流矩阵的密度较大时，利用SQAP-III 求解问题的变量数及约束数可能大于利用SQAP-I或SQAP-II求解问题的变量数及约束数，如：算例Esc16h利用SQAP-III求解时的规模大于利用SQAP-II的求解规模. 不过，这也导致当所求实例的流矩阵密度或距离矩阵密度特别低时，利用SQAP-I或SQAP-II求解该实例的效果(计算时间或Cost值)优于利用SQAP-III的求解效果，如：利用SQAP-I求解Esc16i，Esc16j，Esc32a，Esc32g的求解效果优于利用SQAP-III的求解效果; 利用SQAP-II求解Esc16h的求解效果优于利用SQAP-III的求解效果. 可见，SQAP-III适用于求解规模较大且流矩阵密度和距离矩阵密度均较低的SQAP实例.

对比表2—表4中的计算结果，不难发现：由于模型SQAP-III中的变量数小于SQAP-I和SQAP-II中的变量数, 导致同一求解算例利用SQAP-III求解的结果(Cost值)优于利用SQAP-I和SQAP-II求解的结果(Cost值)， 但由于利用SQAP-III求解时的约束数大于由SQAP-I求解时的约束数，因此利用SQAP-III求解时的计算时间大于利用SQAP-I求解时的计算时间. 此外，由于所求问题的距离矩阵密度较大，因此利用SQAP-II求解时所花费的计算时间最长. 最后，由表2—表4中的数据容易得知，由SQAP-III求解算例Esc16h所求得的下界比由SQAP-I和SQAP-II计算的下界差，即利用SQAP-III的连续松弛计算的下界不一定优于由SQAP-I和SQAP-II的连续松弛计算的下界，这是SQAP-III的不足之处.

表 4 利用SQAP-III求解QAP实例的运行结果

Ins.	(Mixed) Integer programming				LP Relaxation		
	Cost	B& B Gap(%)	Cpu time(Sec.)	No. of Nodes	LP Cost	LP Gap(%)	Cpu time(Sec.)
Esc16h	996	83.93	14 400(*)	97 581	0	100.00	0.19
Esc16i	14	0.00	15.98	14 43	0	100.00	0.02
Esc16j	8	0.00	0.98	172	0	100.00	0.00
Esc32a	158	81.01	14 400(*)	10 154	0	100.00	2.17
Esc32b	196	94.37	14 400(*)	5 501	0	100.00	3.44
Esc32c	652	97.24	14 400(*)	3 688	0	100.00	1.41
Esc32d	212	83.38	14 400(*)	19 086	0	100.00	1.05
Esc32f	2	0.00	0.22	2	0	100.00	0.02
Esc32g	6	0.00	90.86	6 619	0	100.00	0.02
Esc32h	448	94.55	14 400(*)	3 507	0	100.00	3.52

4 结 论

本文以二次分配问题的线性化模型为基础，研究了一类特殊二次分配问题—-稀疏二次分配问题的求解新方法，给出了适用于稀疏二次分配问题的线性化模型SQAP-III. 与以往求解方法SQAP-I和SQAP-II相比，当所求问题的流矩阵和距离矩阵均为较大规模稀疏矩阵时，SQAP-III能够先行充分利用所有零元素的信息，缩减求解问题的规模，在有限计算时间内求得较优解.

QAP的多个线性化模型，如：Frieze-Yadegar模型，Adams-Johnson模型，高阶模型，及由这些模型变形而得的其他QAP模型，其本质均是通过引入$y_{ijkl} := x_{ij}x_{kl}$，将QAP目

标函数中的二次项转化为线性项而得. 那么，根据文献[2，3]，及本文定理2.1和定理2.2的讨论，我们可以给出与其他类似QAP模型相应的稀疏线性化模型，但由于篇幅所限，本文不再一一赘述.

最后，就SQAP的求解方法而言，作者今后研究的两大方向为：(1) 利用半拉格朗日松弛方法和SQAP-III求解SQAP问题；(2) 借鉴建立SQAP-III的思想，研究基于Lawler QAP线性化模型和Kaufman-Broeckx类QAP线性化模型求解SQAP的缩减方法.

参 考 文 献

[1] Misevicius A. An improved hybrid genetic algorithm: new result for the quadratic assignment Problem [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2004, **17**(2-4): 65-73.

[2] 张惠珍, 马良. 一类特殊二次分配问题及其求解 [J]. *系统工程*, 2008, **26**(8): 113-117.

[3] Zhang H Z, Beltran-Royo C, Constantino M. Effective formulation reductions for the quadratic assignment problem [J]. *Computers & Operations Research*, 2010, **37**(11): 2007-2016.

[4] Kaufman L, Broeckx F. An algorithm for the quadratic assignment problem using Bender's decomposition [J]. *European Journal of Operational Research*, 1978, **2**(3): 204-211.

[5] Xia Y, Yuan Y X. A new linearization method for quadratic assignment problems [J]. *Optimization Methods and Software*, 2006, **21**(5): 805-818.

[6] Zhang H Z, Beltran-Royo C, Ma L. Solving the quadratic assignment problem by means of general purpose mixed integer linear programming solvers [J]. *Annals of Operations Research*, 2013, **207**(1): 261-278.

[7] Lawler E L. The quadratic assignment problem [J]. *Management Science*, 1963, **9**(4): 586-599.

[8] Frieze A M, Yadegar J. On the quadratic assignment problem [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1983, **5**(1): 89-98.

[9] Adams W P, Johnson T A. Improved linear programming-based lower bounds for the quadratic assignment problem [C]//*Quadratic Assignment and Related Problems*. New York: American Mathematical Society, 1994, **16**: 43-75.

[10] Erdoğan G, Tansel B. A branch and cut algorithm for quadratic assignment problems based on linearizations [J]. *Computers and Operations Research*, 2007, **34**(4): 1085-1106.

[11] Ramachandran B, Pekny J F. Higher order lifting techniques in the solution of the quadratic assignment problem [C]//*State of the Art in Global Optimization: Computational Methods and Applications*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996: 75-92.

[12] Ramakrishnan K G, Resende M G C, Ramachandran B, et al. Tight QAP bounds via linear programming [C]//*Combinatorial and Global Optimization*. Singapore: World Scientific Publishing Co. 2002, 297-303.

[13] 张惠珍, 马良. 一种求解二次分配问题的新方法 [J]. *系统管理学报*, 2010, **19**(6): 645-650.