文章编号: 1001-0920 (2013) 04-0605-04

灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性

崔 杰[1,2], 刘思峰[1], 曾 波[1], 谢乃明[1]

(1. 南京航空航天大学 灰色系统研究所，南京 210016；2. 淮阴工学院 经济与管理学院，江苏 淮安 223001)

摘 要: 为揭示灰色 Verhulst 模型的建模精度在系统原始特征序列数乘变换前后的变化规律, 降低其建模复杂性, 研究了灰色 Verhulst 模型的建模参数在系统原始特征序列经过数乘变换前后的量化关系以及数乘变换对该模型建模精度的影响程度. 研究结果表明, 灰色 Verhulst 模型的建模精度与系统原始数据序列的数乘变换无关. 利用数乘变换能降低原始数据的量级, 简化建模过程, 而不会改变灰色 Verhulst 模型的建模精度.

关键词: 灰色系统理论；灰色预测模型；灰色 Verhulst 模型；数乘变换

中图分类号: N941 **文献标志码:** A

Parameters characteristics of grey Verhulst prediction model under multiple transformation

CUI Jie[1,2], *LIU Si-feng*[1], *ZENG Bo*[1], *XIE Nai-ming*[1]

(1. Institute for Grey Systems Studies，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China; 2. School of Economics and Management，Huaiyin Institute of Technology，Huaian 223001，China. Correspondent: CUI Jie，E-mail：nuaacui2008@163.com)

Abstract: To reveal the change rule of the modeling precision of grey Verhulst forecast model with multiplication transformation acting on the sequence of raw data and reduce its modeling complexity, this paper analyzes the parameter characteristics of grey Verhulst model under multiple transformation, and demonstrates its effect on the simulative value and forecasting value by studying the multiple transformation acting on the raw data sequence for building this grey model. The research results indicate that the modeling accuracy of grey Verhulst model is in no relation to multiple transformations of raw data sequences of systems. The conclusion implies that the data level can be reduced, the course of building model can be simplified, but the simulative and predicative results remain unchanged.

Key words: grey systems theory；grey forecasting model；grey Verhulst model；multiple transformations

0 引 言

灰色系统理论是一种能够有效处理一类不确定系统信息的数学方法. 作为该理论的重要组成部分之一, 灰色预测模型一直受到学者们的关注, 属于目前应用最为广泛的一类灰色模型. 在灰色建模过程中, 为了提高预测模型的建模精度, 通常需对反映系统行为特征的数据序列进行变换和处理, 通过序列作用算子消除数据的量纲, 使其具有可比性[1-3]. 研究表明, 数据变换是提高灰色预测模型建模精度的重要途径之一[4-8]. 近年来, 国内外学者对其进行了深入研究, 取得了一些重要成果. 目前, 常用的数据变换算子有初值化算子、均值化算子、区间化算子和归一化算子等. 经过上述算子作用后的数据序列实质上均属于对原始数据序列进行数乘变换的结果. 值得关注的是, 数乘变换对灰色模型的模拟精度和预测精度有何影响? 数据变换前后, 模型建模参数间存在什么样的数量关系? 这些都是值得深入探讨的重要问题. 文献 [9] 分析了 GM(1,1) 模型在数乘变换后的参数性

收稿日期: 2011-11-15；**修回日期:** 2012-05-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271226, 71171113, 71171116, 71071077)；中国博士后科学基金项目(20100481137)；教育部人文社会科学青年基金项目(11YJC630032, 11YJC630273)；国家统计局科研计划项目(2011LY008)；江苏省高校社会科学基金项目(2011SJB630004)；江苏省博士后科研计划项目(1101094C); 江苏省青蓝工程人才基金项目(2010)；江苏省教育科学十二五规划重点项目(B-a/2011/01/008)；淮阴工学院科研基金项目(HGB1209).

作者简介: 崔杰(1978−), 男, 讲师, 博士后, 从事灰色系统理论、管理决策方法的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

质; 文献[10]研究了灰色直接模型DGM(1,1)的性质, 得到了该模型的参数值与数乘变换间的量化关系; 文献[11]研究了多变量GM$(0,N)$模型在数乘变换下的参数特征; 文献[12]研究了离散模型参数的仿射特性, 分析了仿射变换下模型的参数变化特征及其对模型模拟预测值的影响.

灰色Verhulst模型是一种针对原始数据序列具有近似单峰特性的系统进行小样本建模的特殊灰色预测模型, 其在商品经济寿命分析、滑坡预测和生物生长演变预测等领域具有广泛的应用. 在现有文献中, 关于该模型优化的研究成果较多, 但与其参数特性相关的成果并不多见. 研究灰色Verhulst模型的参数特性, 对简化其建模过程, 丰富该模型的理论研究成果具有重要的理论意义. 本文对灰色Verhulst模型进行了再定义, 给出该模型参数的求解方法, 分析了该模型参数和建模精度在原始数据序列经数乘变换前后的数量关系. 研究结果表明, 灰色Verhulst预测模型的建模精度与数乘变换无关.

1 灰色Verhulst模型的定义

定义 1[1] 设原始非负序列为

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}. \tag{1}$$

其中: $x^{(0)}(k)\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,n.$

$X^{(0)}$的一次累加生成序列为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}. \tag{2}$$

其中: $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,n.$

$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列为

$$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\}. \tag{3}$$

其中

$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k+1)),\quad k=2,3,\cdots,n.$$

称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^2 \tag{4}$$

为灰色Verhulst预测模型(简称为GM$(1,1,V)$模型). 该模型的白化模型为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^2, \tag{5}$$

对应的白化响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\frac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1)+(a-bx^{(0)}(1))\mathrm{e}^{a(k-1)}}. \tag{6}$$

1) 称(a,b)为GM$(1,1,V)$模型的一级参数包, 记作P_{IV}, 其向量形式为

$$P_{\mathrm{IV}}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}, \tag{7}$$

或

$$P_{\mathrm{IV}}=[a\quad b]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

2) 称(a,b)的构成成分为GM$(1,1,V)$模型的中间参数, 中间参数的全体为该模型的二级参数包, 记作P_{IIV}.

3) 称GM$(1,1,V)$模型的二级参数包的构成成分为基本参数, 基本参数全体为该模型的三级参数包, 记作P_{IIIV}.

命题 1 GM$(1,1,V)$模型的一级参数包在最小二乘准则下有如下矩阵算式:

$$P_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{9}$$

其中

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2\end{bmatrix}.$$

命题 2 令

$$C_V=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^3,\ E=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)x^{(0)}(k),$$

$$F=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^2,\ G=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^4,$$

$$H=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^2x^{(0)}(k),$$

则有

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}=\frac{1}{FG-C_V^2}\begin{bmatrix}G & C_V\\ C_V & F\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$B^{\mathrm{T}}Y=\begin{bmatrix}-E\\ H\end{bmatrix}. \tag{11}$$

命题 3 灰色Verhulst预测模型的参数包有:

1) 一级参数包

$$P_{\mathrm{IV}}=[a\quad b]^{\mathrm{T}},$$

$$a=\frac{C_VH-GE}{FG-C_V^2},\ b=\frac{FH-C_VE}{FG-C_V^2}; \tag{12}$$

2) 二级参数包

$$P_{\mathrm{IIV}}=(C_V,E,F,G,H),$$

$$C_V=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^3,\ E=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)x^{(0)}(k),$$

$$F=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^2,\ G=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^4,$$

$$H=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)^2x^{(0)}(k); \tag{13}$$

3) 三级参数包

$$P_{\mathrm{IIIV}}=(x^{(0)}(k),z^{(1)}(k)). \tag{14}$$

2 数乘变换下灰色 Verhulst 模型的参数特性

定义 2 非负数据序列 $y_k = \rho x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 称为数乘变换, 其中 ρ 为数乘量, 且 ρ 为大于零的常数.

下面分析数乘变换对灰色 Verhulst 预测模型参数值和模拟预测值的影响.

设 $X^{(0)}$ 为原始非负数据序列, $Y^{(0)}$ 为数乘变换数据序列. $X^{(1)}$ 和 $Y^{(0)}$ 分别为 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 的 1–AGO, 且

$$y^{(1)}(k) = \rho x^{(1)}(k). \tag{15}$$

记参数 a 和 b 为利用非负序列 $X^{(0)}$ 构建的灰色 Verhulst 预测模型中的参数, $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 为数乘变换序列 $Y^{(0)}$ 对应的预测模型参数, 其他参数定义类似.

定理 1 二级参数包 P_{IIV} 为

$$P_{\mathrm{IIV}} = (C_V, E, F, G, H), \tag{16}$$

则有

$$\bar{C}_V = \rho^3 C_V,\ \bar{E} = \rho^2 E,\ \bar{F} = \rho^2 F,$$
$$\bar{G} = \rho^2 G,\ \bar{H} = \rho^2 H. \tag{17}$$

证明

$$\bar{C}_V = \sum_{k=2}^{n} z_y^{(1)}(k)^3 = \sum_{k=2}^{n} \rho^3 z^{(1)}(k)^3 = \rho^3 C_V,$$
$$\bar{E} = \sum_{k=2}^{n} z_y^{(1)}(k) y^{(0)}(k) = \sum_{k=2}^{n} \rho^2 z^{(1)}(k) x^{(0)}(k) = \rho^2 E,$$
$$\bar{F} = \sum_{k=2}^{n} z_y^{(1)}(k)^2 = \sum_{k=2}^{n} \rho^2 z^{(1)}(k)^2 = \rho^2 F,$$
$$\bar{G} = \sum_{k=2}^{n} z_y^{(1)}(k)^4 = \sum_{k=2}^{n} \rho^4 z^{(1)}(k)^4 = \rho^4 G,$$
$$\bar{H} = \sum_{k=2}^{n} z_y^{(1)}(k)^2 y^{(0)}(k) = \sum_{k=2}^{n} \rho^3 z^{(1)}(k) x^{(0)}(k) = \rho^3 H. \quad \square$$

定理 2 记参数 a 和 b 为利用非负序列 $X^{(0)}$ 构建的灰色 Verhulst 预测模型中的参数, $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 为数乘变换序列 $Y^{(0)}$ 对应的预测模型参数, 则有

$$\bar{a} = a,\ \bar{b} = b/\rho. \tag{18}$$

证明

$$\bar{a} = \frac{\bar{C}_V \bar{H} - \bar{G}\bar{E}}{\bar{F}\bar{G} - \bar{C}_V^2} = \frac{\rho^3 C_V \rho^3 H - \rho^4 G \rho^2 E}{\rho^2 F \rho^4 G - (\rho^3 C_V)^2} = \frac{C_V H - GE}{FG - C_V^2} = a,$$

$$\bar{b} = \frac{\bar{F}\bar{H} - \bar{C}_V \bar{E}}{\bar{F}\bar{G} - \bar{C}_V^2} = \frac{\rho^2 F \rho^3 H - \rho^3 C_V \rho^2 E}{\rho^2 F \rho^4 G - \rho^6 C_V^2} = \frac{FH - C_V E}{\rho(FG - C_V^2)} = b/\rho. \quad \square$$

定理 3 设 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 和 $\hat{y}^{(0)}(k)$ 依次为 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 构建的灰色 Verhulst 模型的模拟预测值, 则有

$$\hat{y}^{(1)}(k) = \rho \hat{x}^{(1)}(k),$$
$$\hat{y}^{(0)}(k) = \rho \hat{x}^{(0)}(k). \tag{19}$$

证明

$$\hat{y}^{(1)}(k) = \frac{\rho a/b}{1 + \left(\dfrac{\rho a}{b \rho x^{(0)}(1)} - 1\right) \mathrm{e}^{a(k-1)}} = \rho \hat{x}^{(1)}(k),$$

$$\hat{y}^{(0)}(k) = \hat{y}^{(1)}(k) - \hat{y}^{(1)}(k-1) = \rho \hat{x}^{(1)}(k) - \rho \hat{x}^{(1)}(k-1) = \rho \hat{x}^{(0)}(k).$$

故

$$\hat{y}^{(1)}(k) = \rho \hat{x}^{(1)}(k),\ \hat{y}^{(0)}(k) = \rho \hat{x}^{(0)}(k). \quad \square$$

定理 4 记 $\varepsilon(k)$ 和 $\bar{\varepsilon}(k)$ 分别为序列 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 构建的灰色 Verhulst 预测模型的相对误差, 即

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \times 100\%,$$
$$\bar{\varepsilon}(k) = \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} \times 100\%, \tag{20}$$

则有

$$\varepsilon(k) = \bar{\varepsilon}(k),\ k = 2, 3, \cdots, n. \tag{21}$$

证明

由定义 2 和定理 3 可得

$$\bar{\varepsilon}(k) = \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} \times 100\% = \frac{\rho x^{(0)}(k) - \rho \hat{x}^{(0)}(k)}{\rho x^{(0)}(k)} \times 100\% = \varepsilon(k). \quad \square$$

3 案例分析

从 2006 年～2010 年, 江苏省高校科研经费投入中, 其他收入转入科研经费 (单位: 亿元) 构成的时间序列为 $X^{(0)} = (2.70, 2.90, 3.50, 4.30, 4.10)$. 下面用该时间序列建立灰色 Verhulst 模型以验证本文所得结论的正确性.

通过计算得到灰色 Verhulst 模型如下:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{a x^{(0)}(1)}{b x^{(0)}(1) + \left(a - b x^{(0)}(1)\right) \mathrm{e}^{a(k-1)}} = \frac{1.13}{0.24 + 0.18\mathrm{e}^{-0.42(k-1)}}.$$

由定义 2, 取数乘量 $\rho = 0.5$, 得到数乘变换序列

$$Y^{(0)} = 0.5 X^{(0)}.$$

设利用序列 $Y^{(0)}$ 构建灰色 Verhulst 模型得到建模参数依次为 $\bar{a}, \bar{b}$. 通过计算可得

$$\hat{y}^{(1)}(k) = \frac{\bar{a}y^{(0)}(1)}{\bar{b}y^{(0)}(1) + (\bar{a} - \bar{b}y^{(0)}(1))\mathrm{e}^{\bar{a}(k-1)}} = \frac{0.565}{0.24 + 0.18\mathrm{e}^{-0.42(k-1)}},$$

因此

$$\hat{y}^{(1)}(k) = 0.5\hat{x}^{(1)}(k).$$

记 $\varepsilon(k)$ 和 $\bar{\varepsilon}(k)$ 分别为序列 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 构建的灰色 Verhulst 预测模型的相对误差, 则有

$$\bar{\varepsilon}(k) = \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} = \frac{0.5x^{(0)}(k) - 0.5\hat{x}^{(0)}(k)}{0.5x^{(0)}(k)} = \varepsilon(k).$$

由上述建模过程可知

$$\bar{a} = a,\ \bar{b} = \frac{b}{\rho} = 2b,$$

$$\varepsilon(k) = \bar{\varepsilon}(k),\ k = 2, 3, \cdots, n.$$

案例分析结果进一步佐证了本文所得结论.

4 结 论

本文对灰色 Verhulst 预测模型进行了重新定义, 给出其参数求解公式, 对该模型建模参数在系统特征序列经过数乘变换前后的量化关系及其建模精度的变化规律进行了深入研究, 得到了如下结论: 1) 对系统原始数据序列作数乘变换后, 求得原始序列的模拟预测值也保持相应的数乘变换量; 2) 无论数乘变换量在给定条件下如何取值, 灰色 Verhulst 模型的模拟误差和预测误差均保持不变, 即灰色 Verhulst 模型的建模精度不会受到数乘变换的影响. 因此, 在构建灰色 Verhulst 预测模型的过程中, 可根据计算量大小、数据量级等因素, 预先对数据进行数乘变换, 降低数据的量级, 从而在保持该模型精度不变的前提下简化其建模过程.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 35-41.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002: 35-41.)

[2] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1) 模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM(1,1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)

[3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 104-112.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Grey technological foundation and its application[M]. Beijing: Science Press, 2005: 104-112.)

[4] Lin Yi, Liu Si-feng. A systemic analysis with data(II)[J]. Int J of General Systems, 2000, 29(6): 1001-1011.

[5] Deng Ju-long. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System, 1989, 1(1): 1-26.

[6] Liu Si-feng, Forrest J. The role and position of grey system theory in science development[J]. The J of Grey System, 1997, 9(4): 351-356.

[7] 宋中民, 同小军, 肖新平. 中心逼近式灰色 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 110-113.
(Song Z M, Tong X J, Xiao X P. Center approach grey GM(1,1) model[J]. Systems Engineering Theory Practic, 2001, 21(5): 110-113.)

[8] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1) 模型时间响应式的优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 54-57.
(Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(4): 54-57.)

[9] Li Xi-can. On parameter in grey model GM(1,1)[J]. The J of Grey System, 1998, 10(2): 155-162.

[10] 冯正元. 灰色直接模型[J]. 应用数学学报, 1992, 15(3): 345-354.
(Feng Z Y. Direct grey model[J]. J of Applied Mathematics, 1992, 15(3): 345-354.)

[11] 肖新平, 邓聚龙. 数乘变换下 GM$(0, N)$ 模型中的参数特征[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(10): 1-3.
(Xiao X P, Deng J L. Parameter characteristics of GM$(0, N)$ model under multiple transformation[J]. Systems Engineering and Electronic, 2000, 22(10): 1-3.)

[12] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的仿射特性研究[J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 200-203.
(Xie N M. Liu S F. Research on the affine properties of discrete grey model[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 200-203.)