第 28 卷 第 4 期
Vol. 28 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 4 月
Apr. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 04-0623-04

切换系统的二类共同 Lyapunov 函数

陈 征[1,2], 高 岩[1]

(1. 上海理工大学 管理学院，上海 200093；2. 宁波工程学院 理学院，浙江 宁波 315016)

摘 要: 研究切换系统的共同 Lyapunov 函数存在问题. 对于一类正切换系统, 给出了共同 Lyapunov 函数存在的充分条件. 当系统矩阵集为二阶矩阵紧集时, 给出了判断共同 Lyapunov 函数存在的方法, 并给出了计算共同 Lyapunov 函数的算法. 最后通过算例验证了所提出算法的有效性.

关键词: 共同 Lyapunov 函数；切换系统；稳定性

中图分类号: TP13　　**文献标志码:** A

Two classes of common Lyapunov functions for switched systems

CHEN Zheng[1,2], *GAO Yan*[1]

(1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2. School of Sciences, Ningbo University of Technology, Ningbo 315016, China. Correspondent: CHEN Zheng, E-mail: chenzheng@nbut.cn)

Abstract: The existence of common Lyapunov functions for switched systems is studied. For a special positive switched systems, a sufficient condition for the existence of common Lyapunov functions is given. While the system matrices are a compact set of second order matrices, a method of determining the existence of common Lyapunov functions is obtained, and an algorithm of common Lyapunov function is presented. Finally, some examples are given to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: common Lyapunov functions; switched systems; stability

0 引 言

近年来, 切换系统的稳定性研究引起了人们的广泛关注[1-5]. 切换系统实际上是一类最简单的混杂系统, 它由一组连续或离散控制子系统和切换规则组成, 其中切换规则决定了某一时刻系统启动哪个子系统[6]. 保证系统的稳定性的一个重要方法是寻找共同 Lyapunov 函数, 因此, 证明共同 Lyapunov 函数的存在性和计算其具体的表达式在理论上和实际应用中有着非常重要的意义. 常见的一种较为简单的共同 Lyapunov 函数是二次形式的函数[7-8], 由于共同 Lyapunov 函数的存在是系统稳定的充分条件, 人们开始寻找其他形式的共同 Lyapunov 函数[9-11].

对于一般意义上的切换系统研究在文献中较为少见, 人们大都对特殊的切换系统进行研究, 给出了系统稳定的代数条件和解析结果[12-14]. 其中较为重要的一类切换系统是正切换系统, 它广泛地应用于生物学、经济学和社会科学等领域. 正切换系统是指每个子系统都是正系统, 即只要系统的初始点非负, 其后的运动轨迹都非负.

本文将给出一类正切换系统共同 Lyapunov 函数存在的充分条件, 并针对子系统为二阶的离散切换系统, 给出求共同二次 Lyapunov 函数的方法.

1 预备知识和问题描述

下面给出一些数学记号和定义, 并描述要解决的两个问题.

R^n 表示 n 维向量空间. 设 $v \in R^n$, $[v]_i$ 表示向量 v 的第 i 个分量, $\|v\|$ 表示向量 v 的范数, $v \succ 0$ 表示 $[v]_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

$R^{n\times n}$ 为 n 阶矩阵全体组成的集合, S^n 为 n 阶对称矩阵的全体. 设 $A \in R^{n\times n}$, A^{T} 表示矩阵 A 的转置,

收稿日期: 2011-11-27；**修回日期:** 2012-02-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171221, 40901241)；浙江省教育厅科研项目(Y201016275)；上海市科委与地方院校能力建设项目(10550500800).

作者简介: 陈征(1977−), 男, 博士, 从事混杂系统控制、切换系统稳定性的研究；高岩(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统控制、非线性控制等研究.

det(A) 表示 A 所形成的行列式. 设 $A \in S^n$, $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A 的所有特征值中的最大值. 设 $P \in S^n$, $P \succ 0$ 表示 P 为正定矩阵, $P \prec 0$ 表示 P 为负定矩阵.

定义 1 设 $S \subset R^n$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in S$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$, 则称 S 为凸集.

定义 2 设 S 为 R^n 上的凸集, $f(x)$ 为定义于 S 到 R^n 上的函数. 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in S$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为 S 上的凸函数.

定义 3 R^n 中有限点集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 的凸包为如下的集合:

$$\Big\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ i = 1, 2, \cdots, m\Big\},$$

记作 co$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$.

考虑如下的正切换系统:

$$\dot{x} = A(t)x,\ A(t) \in \varLambda,\ x(0) = x_0. \tag{1}$$

其中: $x \in R^n, t \geqslant 0, \varLambda \subset R^{n \times n}$.

由于考虑在任意的切换下系统都是稳定的, 假设每个子系统本身都是稳定的. 否则, 如果存在一个子系统是不稳定的, 则切换规则可以始终取这个不稳定的子系统, 显然整个切换系统是不稳定的.

系统 (1) 稳定的一个充分条件是: 存在向量 v, 使得

$$-A^{\mathrm{T}} v \succ 0,\ A \in \varLambda. \tag{2}$$

此时, 称 $V(x) = v^{\mathrm{T}} x$ 为系统 (1) 的共同线性正 Lyapunov 函数, 而向量 v 称为 (2) 的共同解, 或 $A \in \varLambda$ 存在共同向量 v.

考虑离散切换系统

$$\dot{x}(k+1) = A_\sigma x(k). \tag{3}$$

其中: $x(k) \in R^n$, k 为整数, $A_\sigma \in \varDelta \subset R^{n \times n}$.

系统 (3) 稳定的一个充分条件是: 存在 $P \succ 0$, 使得

$$A_\sigma^{\mathrm{T}} P A_\sigma - P \prec 0,\ A_\sigma \in \varDelta. \tag{4}$$

此时, 称 $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ 为系统 (3) 的共同二次 Lyapunov 函数, 而 P 称为 (4) 的共同解.

2 正切换系统的 Lyapunov 函数

设 $A_i \in R^{n \times n}$, $i = 0, 1, \cdots, k$. P 为有界凸多面体, 即 $P = \mathrm{co}\,\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$, 其中 $b_i \in R^n$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

令 $A(b) = A_0 + \varphi_1(b)A_1 + \varphi_2(b)A_2 + \cdots + \varphi_k(b)A_k$, $b \in P$. 这里 $\varphi_1(b): P \to R$ 是一个线性函数, $\varphi_j(b): P \to R$, $j = 2, 3, \cdots, k$ 是凸函数.

在系统 (1) 中, 取 $\varLambda = \{A(b) | b \in P\}$, 则可得到本节要研究的系统

$$\dot{x} = A(b)x. \tag{5}$$

下面给出系统 (5) 存在共同 Lyapunov 函数的充分条件.

定理 1 对于前面所讨论的系统 (5), 如果 $s + k - 1$ 个矩阵 $A(b_1), \cdots, A(b_s), -A_2, \cdots, -A_k$ 有共同的向量 v, 则系统 (5) 存在共同线性正 Lyapunov 函数.

证明 不妨假设 $\varphi_1(b) = b$. 另外为了便于叙述和证明, 假设 $P = [0, 1]$. 这样, 只要证明在 $A(0), A(1), -A_2, \cdots, -A_k$ 存在共同的向量 v 的条件下, 系统存在共同线性正 Lyapunov 函数即可. 定理中所阐述的条件下的证明是完全类似的.

因为 $\varphi_i(b)\,(i = 2, 3, \cdots, k)$ 是凸函数, 对于 $0 \leqslant b \leqslant 1$, 有

$$\varphi_i(b) \leqslant b\varphi_i(1) + (1-b)\varphi_i(0).$$

由题设, $A(0)$ 和 $A(1)$ 存在共同向量 v, 所以

$$-(1-b)A(0)^{\mathrm{T}} v - bA(1)^{\mathrm{T}} v \succ 0,$$

即

$$\begin{aligned} &-A_0^{\mathrm{T}} v - bA_1^{\mathrm{T}} v - [b\varphi_2(1) + (1-b)\varphi_2(0)]A_2^{\mathrm{T}} v - \\ &\cdots - [b\varphi_k(1) + (1-b)\varphi_k(0)]A_k^{\mathrm{T}} v \succ 0, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} -A(b)^{\mathrm{T}} v = &-A_0^{\mathrm{T}} v - bA_1^{\mathrm{T}} v - [b\varphi_2(1) + \\ &(1-b)\varphi_2(0)]A_2^{\mathrm{T}} v - \cdots - [b\varphi_k(1) + \\ &(1-b)\varphi_k(0)]A_k^{\mathrm{T}} v - [\varphi_2(b) - \\ &b\varphi_2(1) - (1-b)\varphi_2(0)]A_2^{\mathrm{T}} v - \cdots - \\ &[\varphi_k(b) - b\varphi_k(1) - (1-b)\varphi_k(0)]A_k^{\mathrm{T}} v. \end{aligned}$$

注意到上式中 $-A_2, \cdots, -A_k$ 存在共同的向量 v, 从而系统 (5) 存在共同线性正 Lyapunov 函数. □

推论 1 设多项式组

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^k A_k,$$
$$\varLambda = \{A(\alpha) | \alpha \in [0, 1]\},$$

若矩阵 $A(0), A(1), -A_2, \cdots, -A_k$ 有共同的向量 v, 则系统 $\dot{x} = A(\alpha)x$ 存在共同线性正 Lyapunov 函数.

注 1 定理 1 所描述的系统 (5) 实际上是多项式切换系统的推广.

例 1 考虑

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2,$$
$$\varLambda = \{A(\alpha) | \alpha \in [0, 1]\}.$$

取

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.7125 & 0.7764 \\ 0.5513 & -0.9397 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.3768 & 0.8066 \\ 0.9827 & -1.3738 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0447 & -0.7915 \\ -0.7470 & 1.1568 \end{bmatrix}.$$

因为 $A_0, A_0 + A_1 + A_2, -A_2$ 存在共同向量 $v = (1.1499, 1.1636)^{\mathrm{T}}$, 所以系统 $\dot{x} = (A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2)x$ 存在共同线性正 Lyapunov 函数.

3　二阶切换系统的共同 Lyapunov 函数

本节考虑系统 (3) 中的 $\Delta \subset R^{n\times n}$ 为 2×2 维的矩阵所形成的紧集. 下面将给出系统 (3) 的共同二次 Lyapunov 函数的算法, 即求矩阵 $P \succ 0$, 使得

$$A^{\mathrm{T}}PA - P \prec 0, A \in \Delta. \tag{6}$$

由于 P 为正定矩阵, 不失一般性, 设 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_2 & 1-x_1 \end{bmatrix},$$

其中 $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

令 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$. 为了保证式 (6) 成立, 需要考虑 $A^{\mathrm{T}}PA - P$ 的特征值都小于零. 为此, 定义

$$\phi(x) = \max_{A\in\Delta} \lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}PA - P),$$

其中 $\lambda_{\max}(B)$ 表示矩阵 B 的特征值中的最大特征值 (这里 B 是对称矩阵, 所以其特征值为实数).

下面给出两个相关的事实:

1) 设实对称矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

则

$$\lambda_{\max}(B) = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

2) $\lambda_{\max}(B)$ 可以写成如下形式:

$$\lambda_{\max}(B) = \max_{\|v\|=1} v^{\mathrm{T}}Bv,$$

其中使得 $v^{\mathrm{T}}Bv$ 最大的 v 是 B 的最大特征值所对应的特征向量.

进一步, 设

$$\phi(x) = \max_{(v,A), \|v\|=1,\, A\in\Delta} v^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}PA - P)v, \tag{7}$$

显然 $\phi(x)$ 是一个凸函数.

这样, 原问题便转化为如下的问题:

是否存在一个点 $x \in D = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, 使得 $\phi(x) < 0$.

为此, 设 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^{\mathrm{T}}$ 为 D 中的任意一点, 对应的

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 1+\hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 & 1-\hat{x}_1 \end{bmatrix}.$$

假设 $\hat{A} \in \Delta$, 使得 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}\hat{P}A - \hat{P})$ 取到最大值, 即

$$\max_{A\in\Delta} \lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}PA - P) = \lambda_{\max}(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} - \hat{P}).$$

另设 $\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)^{\mathrm{T}}$, $\|\hat{v}\| = 1$ 是矩阵 $\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} - \hat{P}$ 的最大特征值所对应的特征向量. 向量 $\hat{v}$ 使得 $v^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} - \hat{P})v$ 取得最大值, 即

$$\max_{\|v\|=1} v^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} - \hat{P})v = \hat{v}^{T}(\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} - \hat{P})\hat{v}.$$

下面给出记号

$$\hat{M} = \det\begin{bmatrix} [\hat{A}\hat{v}]_1 & [\hat{A}\hat{v}]_2 \\ [\hat{A}\hat{v}]_2 & [\hat{A}\hat{v}]_1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 \\ \hat{v}_2 & \hat{v}_1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{N} = 2[\hat{A}\hat{v}]_1[\hat{A}\hat{v}]_2 + 2\hat{v}_1\hat{v}_2,$$

$$\hat{a} = (\hat{M}, \hat{N})^{\mathrm{T}}.$$

于是, 有如下定理.

定理 2　下述不等式成立:

$$\phi(x) \geqslant x^{\mathrm{T}}\hat{a} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{v} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{v}.$$

证明　因为

$$\phi(x) = \max_{(v,A), \|v\|=1,\, A\in\Delta} v^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}PA - P)v \geqslant \hat{v}^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}P\hat{A} - P)\hat{v},$$

而

$$\begin{aligned} &\hat{v}^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}P\hat{A} - P)\hat{v} = \\ &\hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}P\hat{A}\hat{v} - \hat{v}^{\mathrm{T}}P\hat{v} = \\ &(\hat{A}\hat{v})^{\mathrm{T}}P\hat{A}\hat{v} - \hat{v}^{\mathrm{T}}P\hat{v} = \\ &([\hat{A}\hat{v}]_1, [\hat{A}\hat{v}]_2)\begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_2 & 1-x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [\hat{A}\hat{v}]_1 \\ [\hat{A}\hat{v}]_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &-(\hat{v}_1, \hat{v}_2)\begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_2 & 1-x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \\ &(x_1, x_2)\begin{bmatrix} [\hat{A}\hat{v}]_1^2 - [\hat{A}\hat{v}]_2^2 + \hat{v}_1^2 - \hat{v}_2^2 \\ 2[\hat{A}\hat{v}]_1[\hat{A}\hat{v}]_2 + 2\hat{v}_1\hat{v}_2 \end{bmatrix} + \\ &[\hat{A}\hat{v}]_1^2 + [\hat{A}\hat{v}]_2^2 + \hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 \geqslant \\ &x^{\mathrm{T}}\hat{a} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{v} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{v}. \end{aligned}$$

□

由前面的讨论, 可以得到如下定理:

定理 3　设 $\hat{x} \in D$, 则有

$$\phi(\hat{x}) = \hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{a} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{v} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{v}.$$

根据定理 2 和定理 3, 对于任意的点 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^{\mathrm{T}} \in D$, 可以计算出

$$\phi(\hat{x}) = \hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{a} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{v} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{v}.$$

如果 $\phi(\hat{x}) < 0$, 则

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 1+\hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 & 1-\hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

是式 (6) 的共同解, 从而得到共同二次 Lyapunov 函数

$V(x) = x^{\mathrm{T}}\hat{P}x$. 否则, 集合 D 中除去集合 $\{x|x^{\mathrm{T}}\hat{a} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{v} + \hat{v}^{\mathrm{T}}\hat{v}\}$, 剩余的集合记为 D_1. 然后在 D_1 中选取适当的点, 重复上面的过程.

文献 [15] 中指出, 对于任意的有界凸集 F, 其面积为 S. 设其形心为 M, 则任意通过 M 的直线把它分成两部分, 每一部分的面积至少是 $\frac{4}{9}S$. 在选取适当的点时, 可以选取图形的形心.

由前面的讨论, 得到如下的算法 (设 $\varDelta$ 为给定的矩阵紧集):

1) 取初始点 $x^1 = (0,0)^{\mathrm{T}}$.

2) 计算 v^1 和 A^1 使得式 (7) 取得最大, 并由式 (8) 计算 a^1. 如果 $\varPhi(x^1) < 0$, 则停止; 否则, 在 D 中删除如下集合:

$$\{x|x^{\mathrm{T}}a^1 + (v^1)^{\mathrm{T}}(A^1)^{\mathrm{T}}A^1v^1 + (v^1)^{\mathrm{T}}v_1 \geqslant 0\}.$$

3) 计算剩余集合的重心 x^2, 重复步骤 2).

当 $\varPhi(x^k) < 0$ 或剩余的集合是空集时, 算法停止. 此时, 系统的共同二次 Lyapunov 函数为

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1+x_1^k & x_2^k \\ x_2^k & 1-x_1^k \end{bmatrix}.$$

例 2 考虑如下矩阵:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

此时 $\varDelta = \{A_1, A_2, A_3\}$.

令 $x^1 = (0,0)^{\mathrm{T}}$. 经计算 $A^1 = A_2$, $v^1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $a^1 = (1.64, 0)^{\mathrm{T}}$, $\varPhi(x^1) = 1.64$. 因为 $\varPhi(x^1) > 0$, 所以从 D 中删去集合 $\{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}|1.64x_1 + 1.64 \geqslant 0\}$. 显然, 删去后的集合为空集 (如图 1), 所以不存在共同二次 Lyapunov 函数.

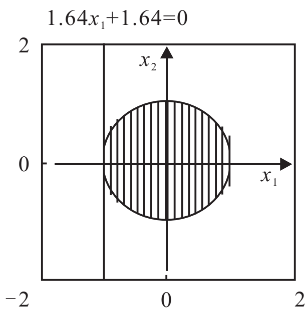

图 1 不存在 Lyapunov 函数

例 3 考虑如下矩阵:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

经过同样的计算, 可以得到共同二次 Lyapunov 函数为

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

4 结 论

本文研究了两类切换系统的共同 Lyapunov 函数. 对于系统矩阵为含参数的矩阵族, 可以通过判断有限个子系统是否存在共同 Lyapunov 函数来判断原系统是否存在共同 Lyapunov 函数, 而有限个子系统是否存在共同 Lyapunov 函数的问题研究得相对成熟一些. 对于系统矩阵为紧集时, 给出了一种简单的算法, 这种删除算法在将来的研究中有待于推广到更高的维数上.

参考文献(References)

[1] Xu X, Antsaklis P J. Stabilization of second-order LTI switched systems[J]. Int J of Control, 2000, 73(14): 1261-1279.

[2] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhäuser, 2003: 3-15.

[3] Cheng D, Guo L, Lin Y, et al. Stabilization of switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 661-666.

[4] 张霞, 高岩, 夏尊铨. 切换线性系统稳定性研究进展[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1441-1450.
(Zhang X, Gao Y, Xia Z Q. Advances on stability for switched linear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1441-1450.)

[5] Chen Z, Gao Y. The computation of a cmmon quadratic Lyapunov function for a linear control system[J]. J of Information and Computing Science, 2007, 2(4): 299-304.

[6] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control System Magazine, 1999, 19(5): 59-70.

[7] Mason O. Switched systems, convex cones and common Lyapunov functions[D]. Dublin: Department of Electronic Engineering, National University of Ireland, 2004.

[8] Shorten R N, Narendra K S, Mason O. A result on common quadratic Lyapunov functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(1): 110-113.

[9] Chen Z, Gao Y. On common linear copositive Lyapunov functions for pairs of stable positive linear systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, 3(3): 467-474.

[10] Mori Y, Mori T. Common Lyapunov function: Background, present situation and remain issues[J]. Trans of the Institute of Systems, Control and Information Engineers, 2004, 48(12): 483-488.

(下转第631页)