

# 双周期平面裂纹问题的特征展开 - 变分方法<sup>1)</sup>

严 鹏 蒋持平<sup>2)</sup>

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要** 根据弹性力学的变分原理, 利用双周期问题位移场的双准周期性质和应力应变场的双周期性, 构造了双周期平面问题的单胞泛函变分表达式. 然后结合针对裂纹问题的复应力函数特征展开式, 发展了基于单胞模型的双周期裂纹平面问题的特征展开 - 变分方法. 由于该方法考虑了最一般的双周期边界条件, 因而能够分析一般非对称排列的双周期裂纹问题. 通过结果的收敛性分析说明了该方法具有计算效率和精度都高的优点. 最后, 对于裂纹呈平行四边形排列的情况, 分析了不同的裂纹排列对应力强度因子的影响.

**关键词** 单胞模型, 特征展开, 变分方法, 微裂纹, 双周期

中图分类号: O343.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)05-0681-07

## 引 言

在材料的疲劳损伤过程中, 往往伴随着大量的微裂纹、微孔洞的形成、扩展、连接, 最后形成宏观裂纹, 导致材料的破坏. 实验中, 一些材料(如: ABS, PVC-10%MBS<sup>[1]</sup>) 在单轴或双轴拉伸载荷作用下会出现垂直于主应力方向的许多微裂纹, 并且微裂纹的排列呈现出或多或少的周期性. 研究微裂纹之间的干涉现象有助于深入理解材料的破坏机理. 这是双周期裂纹问题的实际工程背景.

双周期裂纹模型更重要的应用价值在于, 它提供了裂纹排列从完全无序(随机分布)到有序的多裂纹干涉现象的一个极限性质<sup>[2]</sup>. 许多学者对此进行了研究, 然而由于在数学求解上有较大难度, 除少数特殊情形, 如反平面问题<sup>[3]</sup>求得了解析解外, 大多只能采用数值方法求解. 比较具有代表性的数值求解方法有叠加法 and 单胞方法. 叠加法如分布位错法<sup>[4,5]</sup>和伪面力法<sup>[6~8]</sup>等, 需要进行双级数求和, 其中求和顺序和收敛性是一个需要注意的问题, 在所发表的文献中就有不少对这个问题的讨论, 包括对过去结果的校正. 单胞方法如边界元法<sup>[9]</sup>, 基于复应力函数特征展开的边界配置法<sup>[10]</sup>和变分方法<sup>[11]</sup>, 计算工作量小, 难点是单胞边界条件的处理, 往往只能求解裂纹对称排列的情形, 因为非对称排列的多裂纹干涉使得单胞边界力和位移分布比较复

杂. Xia 等<sup>[12]</sup>指出, 常用的均匀应变和均匀应力边界条件往往违反了单胞边界上的应力或位移的周期性.

我国学者在弹性力学的变分原理研究方面做出了独特的贡献. 本文对单胞法研究的新思路是, 根据弹性力学的变分原理<sup>[13]</sup>, 再利用双周期问题位移场的双准周期性质和应力应变场的双周期性<sup>[14]</sup>, 构造双周期平面问题的单胞泛函变分表达式, 让难处理的单胞边界条件由变分自动满足. 与根据对称边界条件提出的单胞泛函<sup>[11]</sup>相比, 本文提出的单胞泛函变分表达式适用范围更广.

将所构造的泛函变分表达式结合满足裂纹面零应力条件的复应力函数特征展开式<sup>[10,11]</sup>, 发展了基于单胞模型的双周期裂纹平面问题的特征展开 - 变分方法. 本文方法直接应用双周期边界条件, 将拉伸和剪切两种载荷状态统一起来分析, 为分析一般非对称排列的双周期裂纹问题提供了一个有效的计算方法. 相比采用对称边界条件的特征展开方法<sup>[10,11]</sup>, 本文方法适用范围更广. 最后是典型算例比较及数值结果讨论.

本文所提出的泛函驻值条件与单胞周期边界条件等价, 因此这个泛函变分表达式也适用于一般的非均匀材料周期平面问题. 由于复合材料设计一般是指周期重复的胞元设计, 因此这个泛函变分表达式有重要的应用价值.

2008-03-04 收到第 1 稿, 2008-09-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10672008).

2) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn

### 1 双周期问题的单胞模型及泛函表达式

如图 1(a) 所示双周期微结构, 两个方向上的基本周期分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 能代表微结构周期特性的最小胞元称为单胞 (基本胞元), 单胞的形状可以多种多样, 对于边的条数和曲直都没有限制. 为了分析方便, 一般取最简单的直边单胞. 如图 1(b) 取两个不同形状的单胞, 单胞的每条边都有一条与之相对应的平行边, 可以通过平移一个周期  $d$  使两者重合,

相对应的两组边界分别记为  $\partial V^-$  和  $\partial V^+$ . 图 1(b) 中平行四边形单胞存在 2 对相对应的边界, 有

$$\partial V^- = \partial V_1^- + \partial V_2^-, \quad \partial V^+ = \partial V_1^+ + \partial V_2^+ \quad (1)$$

图 1(b) 中矩形单胞存在 3 对相对应的边界, 有

$$\left. \begin{aligned} \partial V^- &= \partial V_1^- + \partial V_2^- + \partial V_3^- \\ \partial V^+ &= \partial V_1^+ + \partial V_2^+ + \partial V_3^+ \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

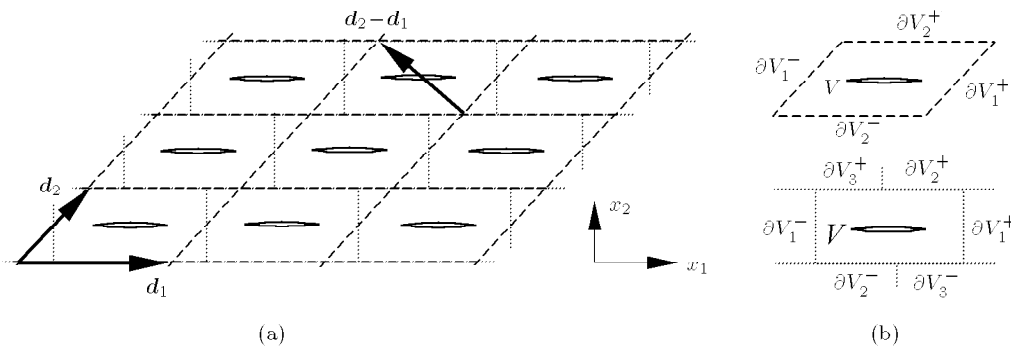


图 1 双周期微结构和两种单胞

Fig.1 Doubly periodic microstructure and two different unit cells

对于位置向量  $x$  和边界外法向量  $n$  作如下记号

$$x = \begin{cases} x^- & x \in \partial V^- \\ x^+ & x \in \partial V^+ \end{cases}, \quad n = \begin{cases} n^- & x \in \partial V^- \\ n^+ & x \in \partial V^+ \end{cases} \quad (3)$$

根据单胞所代表的周期性质,  $\partial V^+$  与  $\partial V^-$  对应的位置有如下——对应关系

$$x^+ = x^- + d, \quad n^+ = -n^- \quad (4)$$

例如对于图 1(b) 分别有

$$x^+ = \begin{cases} x^- + d_1, & \text{当 } x^- \in \partial V_1^-, \text{ 此时 } d = d_1 \\ x^- + d_2, & \text{当 } x^- \in \partial V_2^-, \text{ 此时 } d = d_2 \\ \text{(平行四边形单胞)} \end{cases} \quad (5a)$$

$$x^+ = \begin{cases} x^- + d_1, & \text{当 } x^- \in \partial V_1^-, \text{ 此时 } d = d_1 \\ x^- + d_2, & \text{当 } x^- \in \partial V_2^-, \text{ 此时 } d = d_2 \\ x^- + d_2 - d_1, & \text{当 } x^- \in \partial V_3^-, \text{ 此时 } d = d_2 - d_1 \\ \text{(矩形单胞)} \end{cases} \quad (5b)$$

Suquet<sup>[14]</sup> 指出周期问题中位移场  $u(x)$  是准周

期的, 而应力场  $\sigma(x)$  是周期的, 可表示为

$$u(x) = \langle \varepsilon \rangle \cdot x + u^*(x), \quad \sigma(x + d) = \sigma(x) \quad (6)$$

其中,  $\langle \varepsilon \rangle$  是单胞内的平均应变, 在所有单胞内均相同,  $u^*$  是与载荷大小相关的周期向量场, 有

$$u^*(x + d) = u^*(x) \quad (7)$$

于是, 单胞边界  $\partial V^+$  与  $\partial V^-$  上对应位置的位移满足耦合条件

$$u(x + d) - u(x) = \langle \varepsilon \rangle \cdot d \quad (8)$$

边界力  $t = \sigma \cdot n$ , 由式 (4) 和式 (6), 单胞边界  $\partial V^+$  与  $\partial V^-$  上对应位置的边界力满足连续条件

$$t(x + d) + t(x) = 0 \quad (9)$$

位移耦合条件 (8) 和边界力连续条件 (9) 共同组成了单胞周期边界条件, 可以简便地记为

$$\left. \begin{aligned} u(x^+) - u(x^-) &= \langle \varepsilon \rangle \cdot d \\ t(x^+) + t(x^-) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{或} \quad \left. \begin{aligned} u^+ - u^- &= \langle \varepsilon \rangle \cdot d \\ t^+ + t^- &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

如果不存在体积力, 单胞内的应力、应变和位移还必须满足

物理方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11a)$$

几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (11b)$$

平衡方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (11c)$$

以及非均匀相之间的界面条件. 根据弹性力学变分原理<sup>[13]</sup>, 在满足物理方程、几何方程以及非均匀相之间的界面条件(如果非均匀相是裂纹, 那么界面条件就是裂纹面的零应力条件)的前提下, 以上边值问题的泛函变分表达式以及驻值条件可以写成

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \\ & \int_{\partial V^+} \delta \mathbf{t}^+ \cdot (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbf{d}) dS + \\ & \int_{\partial V^-} (\mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^-) \cdot \delta \mathbf{u}^- dS = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\delta(\cdot)$  表示取变分,  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  是单胞边界的外法向量.

如果给定的应力和位移场还预先满足平衡方程, 仅仅有待满足单胞边界条件, 那么泛函驻值条件(式(12))可以写成

$$\begin{aligned} \int_{\partial V^+} \delta \mathbf{t}^+ \cdot (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) dS - \int_{\partial V^-} (\mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^-) \cdot \delta \mathbf{u}^- dS = \\ \int_{\partial V^+} \delta \mathbf{t}^+ \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbf{d} dS \end{aligned} \quad (13)$$

上述泛函变分表达式适用于一般双周期非均匀材料问题, 为发展这类材料基于单胞模型的严格的解析和数值方法提供了一个理论基础.

下面我们将讨论所构造的泛函变分表达式在双周期平面裂纹问题中的应用.

## 2 复应力函数的特征展开

对于平面弹性问题, 应力  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ , 位移  $\{u, v\}$  以及边界合力  $\{X, Y\}$  可以通过两个复应力函数  $\varphi(z)$  和  $\omega(z)$  以及它们的导数表达出来<sup>[15]</sup>

$$\sigma_x - \sigma_y + 2\tau_{xy}i = 2\overline{\varphi'(z)} - 2\omega'(\bar{z}) - 2(z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)} \quad (14a)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\varphi'(z) + 2\overline{\varphi'(z)} \quad (14b)$$

$$\frac{1}{2}(u - iv) = \frac{1}{4G}[\kappa\overline{\varphi(z)} - \bar{\omega}(z) - (\bar{z} - z)\varphi'(z)] \quad (14c)$$

$$X + iY = -i[\varphi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)}]_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \quad (14d)$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $z = x + iy$ ,  $\overline{(\cdot)}$  表示取复变量 / 函数的共轭,  $X$  和  $Y$  是作用在以  $A$  为起点  $B$  为终点的线段  $AB$  上的合力,  $G$  是剪切模量,  $\kappa$  可由泊松比  $\nu$  表示出来.

对于本文所研究的双周期裂纹问题, 取出一个含单条裂纹的单胞进行分析, 如图 1, 可以看成是有限平面内含单条裂纹的边值问题. 如图 1(b), 胞元形状可以取不同形式. 如果裂纹线中点位于单胞中心, 则单胞几何构型满足中心对称, 那么复应力函数可以作如下特征展开<sup>[10,11]</sup>

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^N P_k z^{2k-2} + \sum_{k=1}^N Q_k z^{2k-1} \quad (15a)$$

$$\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^N P_k z^{2k-2} - \sum_{k=1}^N Q_k z^{2k-1} \quad (15b)$$

其中,  $P_k$  和  $Q_k$  是待定的复系数. 上述展开式除了满足裂纹面零应力条件, 还满足物理、几何和平衡方程(式(11a), (11b), (11c)), 因此代入到泛函驻值条件(式(13))便可求出待定系数  $P_k$  和  $Q_k$ . 下面给出待定系数的求解过程.

## 3 待定系数的求解

为了便于求解待定系数, 需要对系数进行合并, 令

$$A_k = \begin{cases} P_k, & 1 \leq k \leq N \\ Q_{k-N}, & N+1 \leq k \leq 2N \end{cases} \quad (16a)$$

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \omega_k(z) = \sqrt{z^2 - a^2} z^{2k-2}, & 1 \leq k \leq N \\ -\omega_k(z) = z^{2(k-N)-1}, & N+1 \leq k \leq 2N \end{cases} \quad (16b)$$

则有

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{2N} A_k \varphi_k(z), \quad \omega(z) = \sum_{k=1}^{2N} A_k \omega_k(z) \quad (17)$$

代入到式(14a)~(14d)中, 并且再令

$$\tilde{A}_k = \begin{cases} A_k, & 1 \leq k \leq 2N \\ \bar{A}_{k-2N}, & 2N+1 \leq k \leq 4N \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\bar{A}_{k-2N}$  是  $A_{k-2N}$  的共轭. 记  $\sigma_{11} = \sigma_x$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$ , 它们分别是应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$ , 位移向量  $\mathbf{u}$  和合力向量  $\mathbf{X}$  的分量. 于是可以写出如下求和形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{k=1}^{4N} \tilde{A}_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad u_i = \sum_{k=1}^{4N} \tilde{A}_k u_i^{(k)} \\ X_i &= \sum_{k=1}^{4N} \tilde{A}_k X_i^{(k)}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$  和  $X_i^{(k)}$  的具体表达式可由式 (14a)~(14d) 以及式 (17) 得出. 将式 (19) 代入到泛函驻值条件 (式 (13)), 得到线性方程组

$$\sum_{k=1}^{4N} D_{mk} \tilde{A}_k = B_m, \quad m = 1, 2, \dots, 4N \quad (20a)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{mk} &= \int_{\partial V^+} \mathbf{n}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(m)}^+ \cdot (\mathbf{u}_{(k)}^+ - \mathbf{u}_{(k)}^-) dS - \\ &\int_{\partial V^-} \mathbf{n}^- \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{(k)}^- - \boldsymbol{\sigma}_{(k)}^+) \cdot \mathbf{u}_{(m)}^- dS \quad (20b) \\ B_m &= \int_{\partial V^+} \mathbf{n}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(m)}^+ \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbf{d} dS = \sum [\mathbf{X}_{(m)}^+ \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbf{d}] \quad (20c) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\sigma}_{(m)}^+$ ,  $\mathbf{u}_{(k)}^+$  和  $\mathbf{X}_{(m)}^+$  表示  $\sigma_{ij}^{(m)}$ ,  $u_i^{(k)}$  和  $X_i^{(m)}$  在  $\partial V^+$  上取值的张量形式. 最后一项的求和符号表示对所有  $\partial V^+$  线段上的量  $\mathbf{X}_{(m)}^+ \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \mathbf{d}$  求和. 通过式 (20) 求出展开系数后, 代入到式 (19) 中得到应力和位移场.

### 4 数值结果与分析

求得了应力场后, 可进一步求出裂纹尖端的 I 型与 II 型应力强度因子 (SIFs)

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^N \tilde{A}_k a^{2k-1} / \sqrt{a} \quad (21)$$

和平均应力

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \sum X_i d_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (22)$$

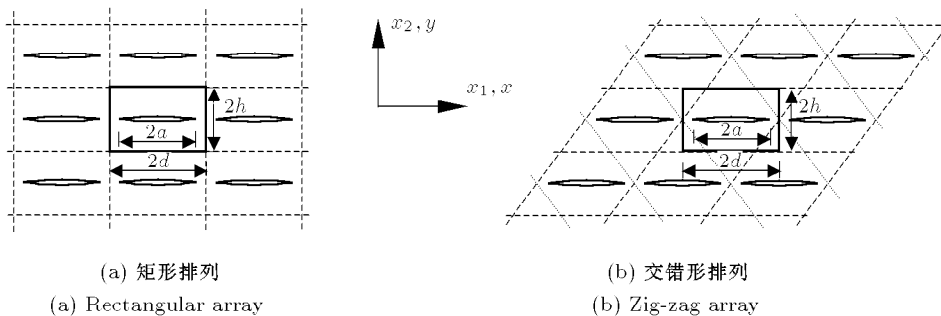


图 2 两种典型的双周期排列形式  
Fig.2 Two typical doubly-periodic array of cracks

和式 (20c) 相同, 这里的求和符号表示对所有  $\partial V^+$  线段上的量  $X_i d_j$  求和.

注意到载荷以平均应变  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  的形式出现, 分别作用两组载荷:

载荷 (a)

$$\langle \varepsilon_n \rangle \neq 0, \text{ 其余应变分量为 } 0 \quad (23a)$$

载荷 (b)

$$\langle \varepsilon_{12} \rangle = \langle \varepsilon_{21} \rangle \neq 0, \text{ 其余应变分量为 } 0 \quad (23b)$$

求得相应的应力强度因子、平均应力分别记为  $(K_I - iK_{II})^{(a)}$ ,  $\langle \sigma_{ij} \rangle^{(a)}$  和  $(K_I - iK_{II})^{(b)}$ ,  $\langle \sigma_{ij} \rangle^{(b)}$ . 在单向拉伸和纯剪切载荷状态下, 分别定义正则化的应力强度因子为

$$\left. \begin{aligned} (K_I - iK_{II})^t &= \frac{(K_I - iK_{II})}{\langle \sigma_{22} \rangle \sqrt{\pi a}} \\ (K_I - iK_{II})^s &= \frac{(K_I - iK_{II})}{\langle \sigma_{12} \rangle \sqrt{\pi a}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中, 上标 “t” 和 “s” 分别表示单向拉伸 (tension) 和纯剪切 (shear) 载荷状态. 当裂纹呈非对称双周期排列时, 拉剪存在耦合, 因此存在如下关系式

$$\begin{aligned} (K_I - iK_{II})^{(a)} &= (K_I - iK_{II})^t \langle \sigma_{22} \rangle^{(a)} \sqrt{\pi a} + \\ &(K_I - iK_{II})^s \langle \sigma_{12} \rangle^{(a)} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} (K_I - iK_{II})^{(b)} &= (K_I - iK_{II})^t \langle \sigma_{22} \rangle^{(b)} \sqrt{\pi a} + \\ &(K_I - iK_{II})^s \langle \sigma_{12} \rangle^{(b)} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (25b)$$

当裂纹呈对称排列, 如矩形或交错形排列时, 由对称条件可预先知道  $K_{II}^t = K_{II}^s = 0$ .

#### 4.1 收敛性分析

对于如图 2(a), 2(b) 裂纹矩形排列和交错形排列,  $h/d = 1$  时的情况进行分析, 均选取矩形单胞,

观察在不同的裂纹密度下, I 型应力强度因子随展开项数  $N$  的收敛情况. 从表 1 可以看出, 当  $a/d \leq 0.8$  时, 结果能很快收敛, 而且与已有文献的结果很吻合,  $a/d$  越小收敛速度越快. 对于这两种不同的裂纹排列, 结果的收敛速度相当.

表 1 裂纹矩形和交错形排列时的 I 型应力强度因子随展开项数  $N$  的收敛情况 ( $h/d = 1$ )

Table 1 Variation of  $K_I^t$  with the value  $N$  of the truncated terms ( $h/d = 1$ )

| $N$                   | Rectangular array $K_I^t$ |       |       | Zig-zag array $K_I^t$ |       |       |
|-----------------------|---------------------------|-------|-------|-----------------------|-------|-------|
|                       | $a/d = 0.1$               | 0.5   | 0.8   | $a/d = 0.1$           | 0.5   | 0.8   |
| 4                     | 1.003                     | 1.115 | 1.606 | 1.005                 | 1.147 | 1.617 |
| 8                     | 1.003                     | 1.113 | 1.566 | 1.005                 | 1.144 | 1.581 |
| 12                    | 1.003                     | 1.113 | 1.559 | 1.005                 | 1.144 | 1.574 |
| 14                    | 1.003                     | 1.113 | 1.558 | 1.005                 | 1.144 | 1.573 |
| 16                    | 1.003                     | 1.113 | 1.558 | 1.005                 | 1.144 | 1.573 |
| Isida <sup>[10]</sup> | 1.003                     | 1.113 | 1.558 | 1.005                 | 1.144 | 1.573 |

4.2 不同的裂纹排列对应力强度因子的影响

针对不同的双周期排列形式, 分析应力强度因子随裂纹扩展的变化情况. 裂纹起先呈矩形排列 (图 3(a)), 经过行向或叠向错动后呈一般平行四边形排列. 如图 3 均选取矩形单胞, 取  $h/d = 0.5, N = 16$ . 裂纹分别呈如图 3(b<sub>1</sub>) 和 (b<sub>2</sub>) 排列时, 正则化的应力强度因子  $K_I^t$  及  $K_{II}^s$  随裂纹扩展的变化情况分别见图 4 和图 5. 需要指出的是, 如果裂纹呈非对称排列, 由于裂纹间的干涉作用, 单向拉伸载荷作用下还存在非零的 II 型应力强度因子  $K_{II}^t$ , 纯剪切载荷作用下还存在非零的 I 型应力强度因子  $K_I^s$ . 只是与  $K_I^t$  和  $K_{II}^s$  相比,  $K_{II}^t$  和  $K_I^s$  很小, 这里不予考虑.

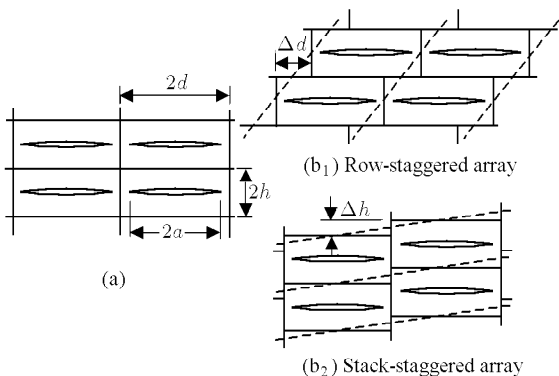
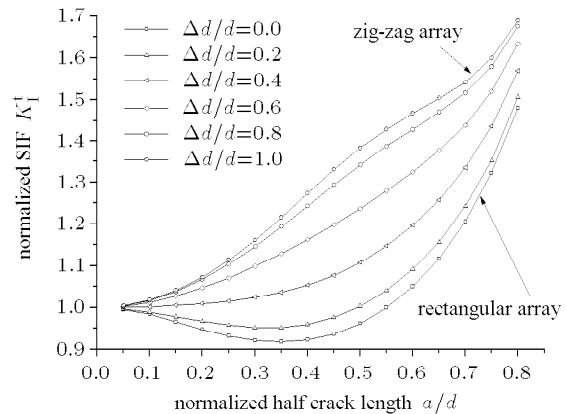


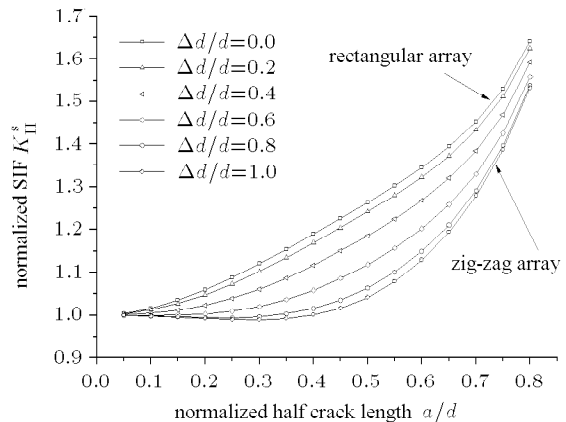
图 3 通过单胞的行向或叠向错动将矩形排列变换为一般平行四边形排列

Fig.3 From a rectangular array to a general one by staggering the cells in row or “stack”

从图 4 可以看出, 裂纹间的行向错动对应力强度因子有较大的影响, 当  $a/d \approx 0.55$  时, 影响达到最大. 图 4(a) 中裂纹趋近矩形排列时, 正则化的 I 型应力强度因子起初随裂纹扩展增加很平缓, 甚至有明显的减小趋势. 这种减小的趋势反映了裂纹间的屏蔽作用. 而图 4(b) 中裂纹趋近交错形排列时, 正则化的 II 型应力强度因子也有类似的规律. 当裂纹排列从矩形趋近交错形时, I 型应力强度因子增大, II 型应力强度因子减小.



(a)



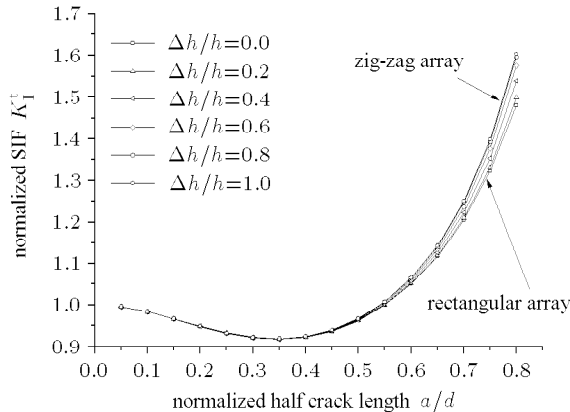
(b)

图 4 矩形单胞行向错动时, 正则化的应力强度因子随裂纹长度的变化情况 (如图 3(b<sub>1</sub>))

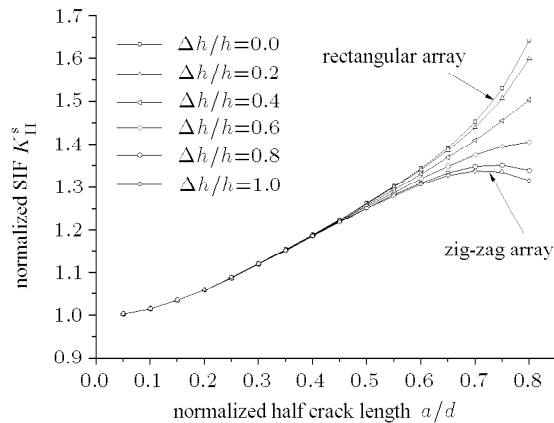
Fig.4 Variation of normalized stress intensity factors with the crack length when cracks stagger in row (see Fig.3(b<sub>1</sub>))

从图 5 可以看出, 裂纹间的叠向错动在裂纹密度较小时对应力强度因子几乎没影响, 直到  $a/d > 0.5$  时, 才逐渐显示出影响. 图 5(a) 中正则化的 I 型应力强度因子起初也有减小趋势, 说明裂纹间的叠向干涉效应表现出对 I 型应力强度因子的屏蔽作用. 而图 5(b) 中裂纹趋近于交错形排列, 并且  $a/d$  较大时, 正则化的 II 型应力强度因子有减小的趋势.

从图 4 和图 5 可以看出, 当裂纹密度减小, 也即  $a/d$  减小时, 不同裂纹排列下正则化的应力强度因子均趋近于 1, 也即趋近于无限大平面内单裂纹的正则化应力强度因子. 这说明, 当裂纹排列方式确定时, 随着裂纹密度减小到一定程度, 裂纹间的相互作用变得很微弱.



(a)



(b)

图 5 矩形单胞叠向错动时, 正则化的应力强度因子随裂纹扩展的变化情况 (如图 3(b<sub>2</sub>))

Fig.5 Variation of normalized stress intensity factors with the crack length when cracks stagger in "stack" (see Fig.3(b<sub>2</sub>))

## 5 结 论

本文针对双周期问题提出了基于单胞模型的泛函变分表达式, 由于考虑了最一般的双周期边界条件, 因此可以用来求解最一般的双周期问题. 对于不同的单胞形状以及不同的载荷条件, 有统一的求解表达式, 操作简单.

结合平面裂纹问题的特征展开方法, 求得了双周期平面裂纹问题的应力强度因子. 对于裂纹排列

存在对称性的情况, 通过结果的收敛性分析说明了本文方法具有计算效率和精度都高的优点.

最后, 对于裂纹呈平行四边形排列的情况, 分析了不同的裂纹排列对应力强度因子的影响.

## 参 考 文 献

- 1 Ramaswamy S, Lesser AJ. Generic overlapping cracks in polymers: modeling of interaction. *International Journal of Fracture*, 2006, 142: 277~287
- 2 Nemat-Nasser S, Hori M. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Amsterdam: Elsevier, 1999
- 3 童中华, 蒋持平. 双周期裂纹压电材料反平面剪切问题断裂力学分析. *力学学报*, 2003, 35(5): 610~614 (Tong Zhonghua, Jiang Chiping. Fracture analysis of double periodical cracked piezoelectric materials under antiplane shear. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(5): 610~614 (in Chinese))
- 4 Delameter WR, Herrmann G, Barnett DM. Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42: 74~80
- 5 Delameter WR, Herrmann G, Barnett DM. Erratum on "Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks". *Journal of Applied Mechanics*, 1977, 44(1): 190
- 6 王庚荪, 袁建新. 含双周期裂纹群弹性板的弱化问题. *力学学报*, 1995, 27(增刊): 37~50 (Wang Gengsun, Yuan Jianxin. Weakening of an elastic plate by a doubly-periodic array of cracks. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27(sup): 37~50 (in Chinese))
- 7 Karihaloo BL, Wang J. On the solution of doubly periodic array of cracks. *Mechanics of Materials*, 1997, 26: 209~212
- 8 Wang GS. The interaction of doubly periodic cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2004, 42: 249~294
- 9 Dong CY, Lee KY. Numerical analysis of doubly periodic array of cracks/rigid-line inclusions in an infinite isotropic medium using the boundary integral equation method. *International Journal of Fracture*, 2005, 133: 389~405
- 10 Isida M, Igawa H. Doubly-periodic array and zig-zag array of cracks in solids under uniaxial tension. *International Journal of Fracture*, 1992, 53: 249~260
- 11 Chen YZ, Lee KY. An infinite plate weakened by periodic cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 2002, 69: 552~555
- 12 Xia ZH, Zhang YF, Ellyin F. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *Int J Solids and Structure*, 2003, 40: 1907~1921
- 13 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981 (Hu Haichang. *Variation Principles and Their Application to Elastic Mechanics*. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese))
- 14 Suquet PM. Elements of homogenization theory for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia E, Zaoui A, eds. *Homogenization Techniques for Composite Media*, Berlin: Springer-Verlag, 1987. 194~275
- 15 Muskhelishvili NI. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam: Noordhoff, 1953

(责任编辑: 陶彩军)

## ANALYSIS OF DOUBLY PERIODIC IN-PLANE CRACKS USING THE EIGENFUNCTION EXPANSION-VARIATIONAL METHOD <sup>1)</sup>

Yan Peng Jiang Chiping<sup>2)</sup>

(*School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China*)

**Abstract** A variational functional for the unit cell for a doubly periodic in-plane problem is presented, based on the variational principle in elasticity in conjunction with the double quasi-periodicity of the displacement field and the double periodicity of the stress and strain fields. Then by combining with the eigenfunction expansions of the complex stress functions satisfying the traction-free conditions on the crack surfaces, an eigenfunction expansion-variational method for the unit cell model is developed. The general doubly periodic boundary conditions for a unit cell are considered, so the present method can be used to solve the general doubly periodic crack problems. The convergency analysis of the numerical results demonstrates the high efficiency and accuracy of the present method. Finally, for several general doubly periodic crack arrays, the influence of the stress intensity factors on the crack arrangement is examined.

**Key words** unit cell model, eigenfunction expansion, variational method, microcrack, double period

---

Received 4 March 2008, revised 15 September 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672008).

2) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn