

连续体结构拓扑优化应力约束凝聚化的 ICM 方法¹⁾

隋允康²⁾ 叶红玲 彭细荣 张学胜

(北京工业大学工程数值模拟中心, 北京 100022)

摘要 为克服应力约束下拓扑优化问题约束数目多、应力敏度计算量大的困难, 提出了应力约束化凝聚化的 ICM 方法. 在利用 Mises 强度理论将应力约束转换成应变能约束后, 提出了应力约束凝聚化的两条途径: 其一为应力全局化的方法, 其二为应力约束集成化的方法. 由此建立了多工况下以重量为目标、以凝聚化应变能为约束的连续体结构优化模型, 并利用对偶理论对优化模型进行了求解. 4 个数值算例表明: 该方法具有较高的计算效率, 得到的拓扑结构比较合理, 不仅适用于二维连续体结构, 也适用于三维连续体结构.

关键词 连续体, 拓扑优化, ICM(independent continuous mapping) 方法, 应力约束凝聚化, 多工况

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0554-10

引 言

连续体结构拓扑优化在概念设计阶段可以为设计者提供很好的选择和参考, 而这通常也是生产出高效产品的决定性因素. 连续体结构拓扑优化通常能得到骨架类拓扑图形, 然而对于尺寸优化和形状优化而言, 在优化过程中是不能改变结构拓扑的, 因此拓扑优化通常能够带来更大的优化收益. 有关拓扑优化发展的综述文章可参见文献 [1]. 连续体结构拓扑优化的已有工作主要研究了受到全局约束下的优化问题, 如位移约束、体积约束、结构自振频率约束等. 因为对于全局约束所涉及到的约束数目较少, 模型建立相对简单. 结构拓扑优化的工程实用化不应该避开对应力约束的处理, 而应力约束的个数对应于单元数与工况数的乘积, 数量太大. 以往按零阶处理的策略固然避开了敏度的计算, 可是近似程度太低; 如果建立应力约束的一阶近似显式, 伴随着的大量昂贵敏度分析计算, 实际上又难以令人接受. 王健、程耿东等用修正的满应力法对受应力约束的平面弹性体及薄板结构的拓扑优化问题进行了研究^[2,3], Guan 等^[4]用双向进化结构优化方法 (BESO) 处理应力约束问题, 对低应力单元进行删除, 对高应力单元则加入, 荣见华等^[5]则基于应力灵敏度的基础上使用 BESO 方法. 用满应力求解多工况问题时, 多采用包络法, 而包络法由于工况

的组合扰乱了明确的“传力路径”, 因为拓扑优化的实质是寻找最佳的传力路径, 从而确定结构的拓扑构成, 局部应力不违背的条件模糊了对整体上传力的把握. Yang 等^[6]提出用 K-S 函数将诸多应力约束化为一个应力约束, 但是应力仍为局部性约束, 只是放在一起减少了约束数目, 而敏度分析的计算量是没有减少的.

如何走出这一进退两难的境地? 洞悉应力限制属于局部性约束、而位移限制属于全局性约束的本质, 我们从中得到启发, 基于 ICM 方法^[7~11], 提出了凝聚化应力约束的处理途径和相应的解法: (1) 利用 von Mises 强度理论将单元应力约束转化为单元应变能约束; (2) 单元应变能约束凝聚化处理为替代应力的整体约束; (3) 以少量全局化的约束代替大量局部化的应力约束, 基于 ICM 方法, 构造结构拓扑优化模型; (4) 求解应力凝聚化的连续体结构拓扑优化模型.

1 ICM 方法与单元拓扑变量^[7]

ICM(independent, continuous, mapping) 方法意为独立连续映射的方法, “独立”及“连续”是指拓扑变量独立于低层次变量且为 [0,1] 区间上的连续值, “映射”是指通过映射及反演的过程, 使独立连续的拓扑变量逼近离散拓扑变量, 使拓扑变量完成了“离

2006-02-07 收到第 1 稿, 2006-12-07 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10472003), 北京市自然科学基金 (3042002), 北京市教委 (KM200410005019) 和北京工业大学博士基金资助项目.

2) E-mail: ysui@bjut.edu.cn

散—连续—离散”的转化。ICM 方法的本质思想在于两点：一是独立连续的拓扑变量，二是映射反演过程。ICM 方法不同于均匀化方法，它具有简洁性、合理性，同时物理上有明确的解释。

把拓扑变量由传统的 0-1 离散状态拓扑为容纳进 0 与 1 之间变化过程 $t_i \in [0, 1]$ ，传统定义的拓扑变量与结构某单元或某子域 0 \Leftrightarrow 无与 1 \Leftrightarrow 有的直接关系也消失了，为此，要专门给出拓扑变量 t_i 与单元或子域“无”、“有”的对应关系。很多的研究者借助于不同的几何量或物理量来实现单元或子域“有”与“无”的转化。不仅有用膜、板、块厚度的，也有膜或块密度的。按照 ICM 方法，当拓扑变量 $t_i = 0$ 时，表示该单元或子域不存在；当 $t_i = 1$ 时，表示该单元或子域存在；当 $0 < t_i < 1$ ，表示单元从有到无的过渡状态；这种描述就是从“有”到“无”的判断。由此，基于 ICM 方法的拓扑变量将结构拓扑优化成为一个理应有的独立层次，而且还可以借鉴具有光滑性的有效的优化算法。

2 过滤函数的选取

结构拓扑优化通俗地讲就是解决组成整体结构的子系统的“有”与“无”的最优分布。连续体结构拓扑优化通过某些子域化为空洞或恢复，实现了“有”与“无”的转化。描述拓扑变量从“有”到“无”的判断，也就需要提供一个过滤函数 $f(t_i)$ ，通过过滤函数对拓扑变量 t_i 进行过滤，用来揭示相应的单元或子域对 0 与 1 靠近的程度。按照 ICM 方法，过滤函数不仅可以对拓扑变量进行过滤和筛选，完成对拓扑变量由连续模型向离散模型的回归，用于每次迭代之后或最后迭代之后的 0-1 处理上。而且在建模时，起到了一种对相应的单元或子域有关几何量或物理量的识别作用。

用过滤函数 $f_w(t_i)$ ， $f_\sigma(t_i)$ ， $f_k(t_i)$ 识别单元重量、单元许用应力和单元刚度，单元性质参数识别采用如下公式

$$w_i = f_w(t_i)w_i^0, \quad \bar{\sigma}_i = f_\sigma(t_i)\bar{\sigma}_i^0, \quad k_i = f_k(t_i)k_i^0 \quad (1)$$

其中 $w_i, \bar{\sigma}_i, k_i$ 分别表示拓扑变量为 t_i 的状态对应的单元重量、单元许用应力、单元刚度； $w_i^0, \bar{\sigma}_i^0, k_i^0$ 分别表示单元固有重量、单元固有许用应力、单元固有刚度。一般情况下采用指数形式的过滤函数

$$f_w(t_i) = t_i^\alpha, \quad f_k(t_i) = t_i^\beta, \quad f_\sigma(t_i) = t_i^\gamma \quad (2)$$

其中 α, β, γ 为常数，对于不同类型的结构，可以根据 $w_i^0, \bar{\sigma}_i^0, k_i^0$ 之间的关系来确定^[12]，也可以通过数值实验来确定最佳数值^[13]。

3 单元应力约束转换为单元应变能约束

为了克服应力敏度计算的困难，本文将单元应力约束转换为单元应变能约束，为此，由常用的 Mises 强度理论，畸变能是材料屈服的状态变量，有

$$e_{il}^f/V_i = [(1+\nu)/(6E)][(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq (1+\nu)\bar{\sigma}_i^2/(3E) \quad (3)$$

式中 e_{il}^f 为单元畸变能； V_i 为单元体积； E 为材料弹性模量； ν 为泊松比； $\bar{\sigma}_i$ 为许用应力； σ_1, σ_2 和 σ_3 分别是单元体所受的主应力。将式 (3) 方程两端同乘以单元体积 V_i ，有

$$e_{il}^f \leq (1+\nu)\bar{\sigma}_i^2 V_i/(3E) \quad (4)$$

由于单元畸变能不容易从单元应变能中提取出来，故试图从单元应变能 e_{il} 着手处理， e_{il} 为 l 工况下的 i 单元的应变能。因为 $e_{il}^f < e_{il}$ ，故在式 (4) 中用 e_{il} 代替 e_{il}^f 是偏于安全的，我们得到

$$e_{il} \leq (1+\nu)\bar{\sigma}_i^2 V_i/(3E) \quad (5)$$

4 应力约束凝聚化途径之一：应力全局化方法

4.1 单元应变能约束凝聚化为结构总应变能约束

对于整个连续体结构，我们将式 (5) 求和，可以得到

$$e_l = \sum_{i=1}^N e_{il} \leq \sum_{i=1}^N (1+\nu)\bar{\sigma}_i^2 V_i/(3E) \quad (6)$$

其中 e_l 表示 l 工况下结构的应变能。由式 (5) 和式 (6) 可以看到，式 (5) 满足，式 (6) 必然满足；式 (6) 满足，式 (5) 不一定满足。由式 (6) 可以看到，左端为所有单元应变能总和，即结构应变能，因此右端的量纲是应变能，称为许用应变能。式 (5) 到式 (6) 的转化，意味着将局部应力的约束近似凝聚化为全局的结构总应变能约束，由此极大地减少了约束数目。所以这种转变可以说是对结构总应变能从应力全局化角度的新认识，也是对连续体结构拓扑优化建模的一种新尝试。

将单元局部应力约束凝聚化为结构总应变能约束的全局化处理是要付出代价的, 这就是应力集中单元的 von Mises 应力有时会很大, 尽管这些现象往往发生在载荷作用点, 边界等个别部位, 但这些点的应力超过了许用应力. 我们将最优拓扑结构中单元 von Mises 应力超过许用应力的单元数与保留单元数的比值, 称为单元超限比. 为了尽量减小超限比, 甚至于使其趋于零, 可以采用减少许用应变能的方法, 即

$$e = \sum_{i=1}^N e_i \leq \zeta \sum_{i=1}^N (1 + \nu) \bar{\sigma}_i^2 V_i / (3E) \quad (7)$$

式中 ζ 表示为许用应变能修正系数. 另外, 还要考虑另一现象: 对于仅是许用应力不同而其它条件相同的两个问题, 必然是许用应力大的问题多删除单元, 也就导致相对多的单元应力超过了许用应力. 为避免这一现象, 就应当使 ζ 随着许用应力增大而减小. 经过数值实验, 利用最小二乘法原理, 得到 L 个工况下要保证约束满足条件, 许用应变能修正系数为

$$\zeta = \min(\zeta_1, \dots, \zeta_L) = \min_{l=1, \dots, L} (e_l^0)^\eta / (\bar{e})^\eta \quad (8)$$

其中 e^0 为基结构的初始应变能, \bar{e} 为结构的许用应变能, η 经数值计算确定为 0.8. 经过这种转变后, 提供了建立应力约束拓扑优化模型的新思路, 也是对连续体结构拓扑优化建模的一种新尝试. 从而将局部应力约束问题转化为全局最优化的问题, 大大减少了约束数目. 同时在单元超限比很小的情况下, 解决了局部应力的不满足问题. 对于应力约束的精确满足可以在低层次优化 (形状与截面优化) 中来实现.

4.2 结构许用应变能的求解

前面述及的许用应变能有两种求解方法. 一种是利用许用应力直接来计算许用应变能, 即

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^N (1 + \nu) \bar{\sigma}_i^2 V_i / (3E) \quad (9)$$

另一种是迭代估计做法求出许用应变能. 为了求出各工况的许用应变能, 可以借鉴单工况的均匀化方法或变密度法, 求结构的总应变能 (即结构的柔顺度) 在给定重量限制下的最小解, 但是这样的求解工作量太大, 因此改为在各工况中结构应变能最大工况下求出给定重量的最小结构应变能解作为本工况应变能, 然后再得到各工况下的许用总应变能.

按照 ICM 方法, 引入过滤函数, 则单元应变能可表示为

$$e_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i / 2 = (t_i^{(k)})^\beta \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i / (2t_i^\beta) = (t_i^{(k)})^\beta e_i^{(k)} / t_i^\beta \quad (10)$$

其中 $e_i^{(k)}$ 为第 k 次迭代时第 i 号单元的应变能, $t_i^{(k)}$ 为第 k 次迭代得到的拓扑变量.

由此建立在给定重量约束下, 求单工况下最大应变能最小的优化模型

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \sum_{i=1}^N (t_i^{(k)})^\beta e_i^{(k)} / t_i^\beta \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^N t_i^\alpha w_i^0 \leq \bar{W} \\ & 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

为防止拓扑值取 0 时结构刚度矩阵可能出现奇异, 取 $\underline{t}_i = 0.001$. 由于式 (11) 是单约束问题, 该约束必取等式, 否则成为无约束问题而无意义, 定义 $B_i = (t_i^{(k)})^\beta e_i^{(k)}$, 主动集 $I_a = \{i | \underline{t}_i < t_i < 1 (i = 1, \dots, N)\}$, 则式 (11) 为

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \sum_{i \in I_a} B_i / t_i^\beta + \sum_{i \notin I_a} B_i / t_i^\beta \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i \in I_a} t_i^\alpha w_i^0 + \sum_{i \notin I_a} t_i^\alpha w_i^0 \leq \bar{W} \\ & 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对模型 (12) 利用增广的拉格朗日函数, 求解鞍点条件, 得到拓扑变量, 更新主被动集, 反复迭代求解直至主动集不变终止循环, 求出式 (11) 的最优解 \mathbf{t}^* , 对结构重新进行分析, 进入下一次循环, 如此迭代满足收敛条件

$$\Delta e = |(e^{(k+1)} - e^{(k)}) / e^{(k+1)}| \leq \varepsilon \quad (13)$$

其中, $e^{(k)}$ 及 $e^{(k+1)}$ 为前轮与本轮迭代的结构总应变能, ε 为收敛精度, 此处取 $\varepsilon = 0.001$.

利用式 (11) 求出对应最大总应变能工况下的给定重量约束求出的最小总应变能, 即为此工况的许

用应变能, 记为 \bar{e}_{\max} . 考虑到各工况载荷作用在初始基结构上产生的总应变能 $e_j (j = 1, \dots, J; J$ 为工况总数) 在总体上反映了此工况对结构的影响, 从而也可以反映出在最优拓扑图形中传递此工况载荷所需要的大致费用 (即单元数), 提出非线性的关系式

$$\lg(\bar{e}_j/\bar{e}_{\max}) = k \lg(e_j/e_{\max}) \quad (14)$$

由此得到各工况的许用应变能 \bar{e}_j . 其中 $e_{\max} = \max_{j \in J}(e_j)$ 为所有工况中最大的结构总应变能, k 为待定系数, 经过数值计算取 $k = 0.9$.

4.3 应用应力全局化方法建立优化模型并求解

基于 ICM 方法, 将局部应力约束近似转化为全局化约束后, 建立多工况下连续体结构的拓扑优化的数学模型, 取重量作为目标函数, 将各工况下的应变能作为约束.

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } W = \sum_{i=1}^N t_i^\alpha w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^N B_{il}/t_i^\beta \leq \zeta \bar{e}_l \\ & \quad 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

引入变换 $z_i = (t_i)^\beta, \underline{z}_i = (\underline{t}_i)^\beta$, 则有 $t_i = (z_i)^{1/\beta}$, 于是

$$f_w(t_i) = (z_i)^{\alpha/\beta}, \quad f_\sigma(t_i) = (z_i)^{\gamma/\beta} \quad (16)$$

代入式 (15), 得

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T \\ & \text{使 } W = \sum_{i=1}^N (z_i)^{\alpha/\beta} w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^N B_{il}/z_i \leq \zeta \bar{e}_l \\ & \quad \underline{z}_i \leq z_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对于连续体结构, 每个单元包含一个拓扑设计变量, 因此基结构中拓扑设计变量数目很大. 为减少求解规模, 且式 (17) 为可分离的规划, 我们运用对偶非线性规划推导, 将对偶规划模型中的目标函数 $\phi(\lambda)$ 在 λ^0 处展成二阶 Taylor 近似, 消去常数项以避免

迭代初始时确定 λ^0 的困难, 将极大化问题变为极小化问题, 即将目标函数 $\phi(\lambda)$ 变为 $-\phi(\lambda)$, 最后得到二次规划模型

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \lambda \in E^J \\ & \text{使 } -\phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T D \lambda + H^T \lambda \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \lambda_j \geq 0 (j = 1, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中

$$D_{lk} = \sum_{i \in n_a} \frac{\beta^2 B_{li} B_{ki}}{(\alpha^2 + \alpha\beta)(z_i^*)^{\alpha/\beta+2} w_i^0}$$

$$H_l = \left[\zeta \bar{e}_l - \sum_{i \in n_a} \frac{(\alpha + 2\beta) B_{li}}{(\alpha + \beta) z_i} - \sum_{i \neq n_a} \frac{B_{li}}{z_i} \right]_l$$

调用二次规划的程序, 求解即可得到 λ^* . 注意: 对模型中 $t_i = 0$ 或 1 的拓扑变量, 应将其排除在求导运算之外. 求出 λ^* 后, 更新主被动变量集, 进入下一轮循环, 直至

$$\|z^{(k+1)} - z^{(k)}\| / \|z^{(k)}\| \leq \varepsilon \quad (19)$$

终止迭代, 再计算得到 \mathbf{t}^* , 然后对结构进行修改, 进入下一次循环, 如此迭代直至满足收敛准则

$$\Delta W = |(W^{(k+1)} - W^{(k)})/W^{(k+1)}| \leq \varepsilon \quad (20)$$

其中, $W^{(k)}$ 及 $W^{(k+1)}$ 为前轮与本轮迭代的结构总重量, ε 为收敛精度, 本文取 $\varepsilon = 0.001$.

5 应力约束凝聚化途径之一: 应力约束集成化方法

5.1 利用 K-S 函数建立优化模型

为了建立结构拓扑优化模型, 考虑如下结构各单元最大应力极小化问题

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \max_{i,l} \sigma_{il} \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由前面的式 (5) 和式 (10), 模型 (21) 可以转换为求结构各单元最大应变能极小化问题

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \max_{i,l} e_{il} \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

引入 K-S 函数^[11~13], 则式 (22) 可用下式替代

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \Phi(\mathbf{t}) = \ln \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N e^{qe_{il}} \right) / q \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

上式中参数 q 为正数, 当 q 取较大值时, 式 (23) 能较好地逼近式 (22), 但在优化迭代时常常引起目标振荡甚至发散. 数值实验表明取 $q = 4$ 时既可使式 (23) 较好地逼近式 (22), 又可使目标振荡减弱. 为避免最大单元应变能减小而导致结构重量无限制地增大, 必须给出一个结构重量的上限约束, 引入 ICM 法重量的过滤函数, 暂不考虑拓扑变量的区间约束, 那么在单约束下它成为等式, 于是有

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } \Phi(\mathbf{t}) = \ln \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N e^{qe_{il}} \right) / q \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } W(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N f_w(t_i) w_i^0 = \bar{W} \\ & \quad 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) 中难于确定 \bar{W} , 故将之转化为取等价极值必要条件意义下的对偶问题

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } W = \sum_{i=1}^N f_w(t_i) w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \Phi(\mathbf{t}) = \ln \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N e^{qe_{il}} \right) / q = \bar{\Phi} \\ & \quad 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\bar{\Phi} = \ln \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N e^{q\bar{e}_{il} t_i^{2\gamma-\beta}} \right) / q = \ln \left(L \sum_{i=1}^N e^{q\bar{e}_i t_i^{2\gamma-\beta}} \right) / q$$

为许用集成化应变能. 由此就建立了与应力全局化方法具有相同目标的优化模型.

5.2 优化模型的求解

按照 ICM 方法, 引入过滤函数和主动集 I_a , 利用式 (10), 模型 (25) 转化为

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } W = \sum_{i \in I_a} t_i^\alpha w_i^0 + \sum_{i \notin I_a} t_i^\alpha w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \Phi(\mathbf{t}) = \ln \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i \notin I_a} e^{qe_{il}^{(k)} (t_i^{(k)})^\beta / t_i^\beta} + \sum_{l=1}^L \sum_{i \in I_a} e^{qe_{il}^{(k)} (t_i^{(k)})^\beta / t_i^\beta} \right) / q = \bar{\Phi} = \\ & \quad \ln \left(L \sum_{i \notin I_a} e^{q\bar{e}_i t_i^{2\gamma-\beta}} + L \sum_{i \in I_a} e^{q\bar{e}_i t_i^{2\gamma-\beta}} \right) / q \\ & \quad 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

正如单元许用应力不因工况而改变, 单元许用应变能在多工况下也是唯一的, 用式子表示即为 $\bar{e}_{il} = \bar{e}_i (l = 1, \dots, L)$. 令 $x_i = 1/t_i^\beta$, 规划 (26) 中的约束等价于

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & \sum_{i \notin I_a} \left(\sum_{l=1}^L e^{qB_{il}^{(k)} / t_i^\beta} - L e^{q\bar{e}_i t_i^{2\gamma-\beta}} \right) + \\ & \sum_{i \in I_a} \left(\sum_{l=1}^L e^{qB_{il}^{(k)} / t_i^\beta} - L e^{q\bar{e}_i t_i^{2\gamma-\beta}} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

为了实现规划 (26) 中的约束显式化, 求 $f(\mathbf{x})$ 对设计变量的一阶偏导数

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x_j = & \sum_{l=1}^L [e^{qB_{jl}^{(k)} x_j} q B_{jl}^{(k)}] + \\ & L e^{q\bar{e}_j x_j^{-(2\gamma-\beta)/\beta}} q \bar{e}_j [(2\gamma-\beta)/\beta] x_j^{-2\gamma/\beta} \quad (j \in I_a) \end{aligned} \quad (28)$$

于是 $f(\mathbf{x})$ 的一阶 Taylor 展式为

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j \in I_a} [\partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_j] (x_j - x_j^{(k)}) \quad (29)$$

将中间变量 $x_i = 1/t_i^\beta$ 代回式 (29), 即可得到

$$f(\mathbf{x}) = b_0^{(k)} + \sum_{j \in I_a} b_j^{(k)} t_j^{-\beta} \quad (30)$$

其中

$$b_0^{(k)} = f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j \in I_a} [\partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_j] (t_j^{(k)})^{-\beta}$$

$$b_j^{(k)} = \partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_j$$

于是规划 (26) 近似模型可表示为

$$\left. \begin{aligned} & \text{求 } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ & \text{使 } W = \sum_{i \in I_a} t_i^\alpha w_i^0 + \sum_{i \notin I_a} t_i^\alpha w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } b_0^{(k)} + \sum_{j \in I_a} b_j^{(k)} t_j^{-\beta} = 0 \\ & 0 \leq \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & (i = 1, \dots, N; l = 1, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

为了提高求解效率，引入 Lagrange 函数，利用 Lagrange 乘子法对模型 (31) 求解，最后求得拓扑变量的显式为

$$\tilde{t}_m = \left[-b_0^{(k)} / \left(\sum_{j \in I_a} b_j^{(k)} ((\beta b_j^{(k)}) / (\alpha w_j^0))^{\frac{-\beta}{\beta+\alpha}} \right) \right]^{-1/\beta} \cdot [(\beta b_m^{(k)}) / (\alpha w_m^0)]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad (m \in I_a) \quad (32)$$

更新主被动集，然后返回式 (32) 计算 \tilde{t}_m ，如此反复循环，直到主动集与被动集不变时停止迭代，得到的 $\mathbf{t}^{(k+1)}$ 即为式 (31) 的最优解。将 $\mathbf{t}^{(k+1)}$ 代入 $b_0^{(k)}$ ， $b_j^{(k)}$ ，反复循环，直到它们不变时停止迭代，如此得到的 $\mathbf{t}^{(k+1)}$ 始为式 (25) 的最优解。修改单元材料参数，然后进入下一次结构重分析，如此反复迭代直至满足收敛准则 (20)。

6 数值算例

算例 1 如图 1 所示，基本结构 120 mm × 60 mm 的平面体，厚度为 6.0 mm，材料弹性模量为 210 GPa，泊松比 0.25，材料密度 1.0×10^{-3} kg/mm³，许用应力 155 MPa，左右边界全部采用固定约束。划分 60 × 30 个矩形单元。共两个工况。工况 1：一个集中载荷 $P = 2000$ N 作用于下边界中点，工况 2：一个集中载荷 $P = 2000$ N 作用于上边界中点。原结构重量为

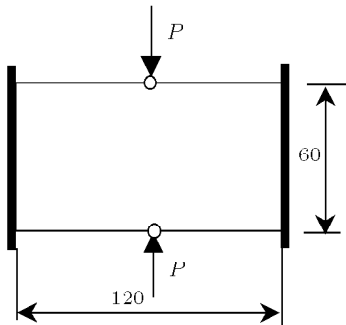


图 1 基结构

Fig.1 Base structure

43.2 kg，收敛精度为 0.001。

由单工况和多工况下拓扑优化后的结构应力云图 2~ 图 5 可以看到，对于多工况应力约束下的连续体拓扑结构并不是单工况应力约束下的连续体拓扑结构的简单叠加，而是最优传力路径的体现。对于工况 1 而言，经过 53 次迭代，得到最优结构重量为 5.808 kg，由拓扑优化后应力云图 2 可以看到没有超过许用应力的单元，而应力分布趋于均匀。对于

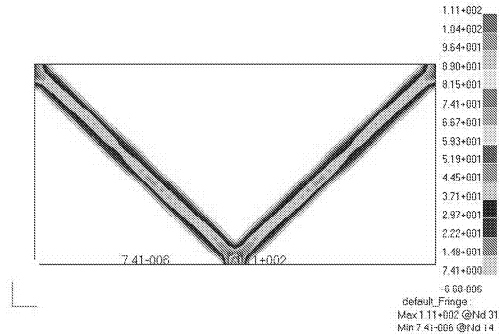


图 2 工况 1 下拓扑优化后的应力分布图

Fig.2 Stress distribution of optimal topology structure with load case 1

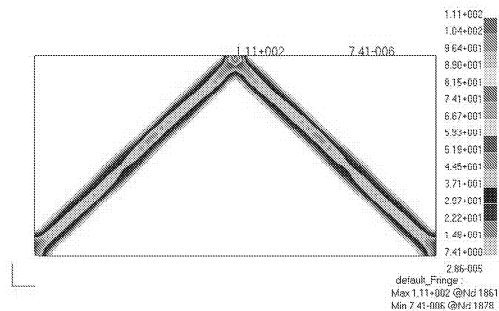


图 3 工况 2 下拓扑优化后的应力分布图

Fig.3 Stress distribution of optimal topology structure with load case 2

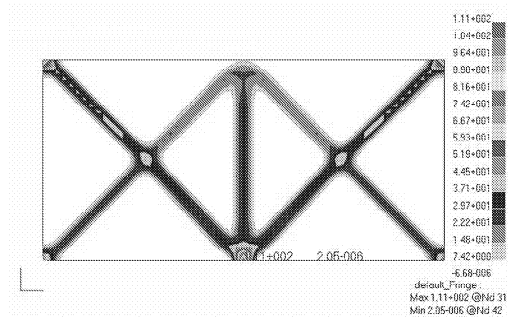


图 4 多工况拓扑优化后工况 1 下的应力分布图

Fig.4 Stress distribution of optimal topology structure of multi-load cases with load cases 1

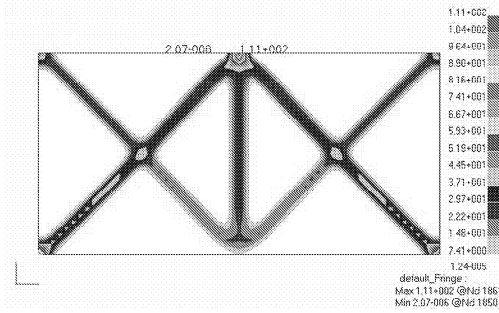


图 5 多工况拓扑优化后工况 2 下的应力分布图

Fig.5 Stress distribution of optimal topology structure of multi-load cases with load cases 2

工况 2 而言, 因为基本结构为对称结构, 所得的拓扑结构形状也是对称的. 对于多工况作用下, 结构经过 43 次迭代, 得到最优结构重量 8.544 kg.

算例 2 如图 6 所示, 基本结构为一个 160 mm × 100 mm × 10 mm 的长方体. 材料弹性模量为 68.89 GPa, 泊松比 0.3, 材料密度 1.0 kg/cm³. 划分 32×24×2 个 8 节点实体单元, 一集中载荷 $P = 6000\text{ N}$ 作用于长方体一侧的中心位置, 长方体另一侧固定, 许用应力 155 MPa, 原结构重量为 160 kg. 图 7 为文献 [14] 的拓扑结构.

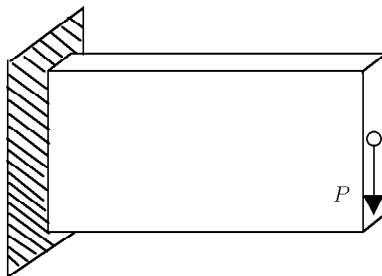
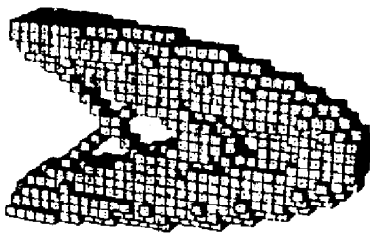


图 6 基本结构

Fig.6 Base structure



iteration 226

图 7 文献 [14] 结果

Fig.7 Topology structure of Ref.[14]

本算例经过 45 次迭代, 优化后的连续体结构最优重量为 50.84 kg, 最优拓扑结构如图 8 所示, 重量

迭代历史如图 9 所示, 与文献 [14](如图 7) 相比, 迭代次数有明显提高 (文献 [14] 中的迭代次数为 226 次).

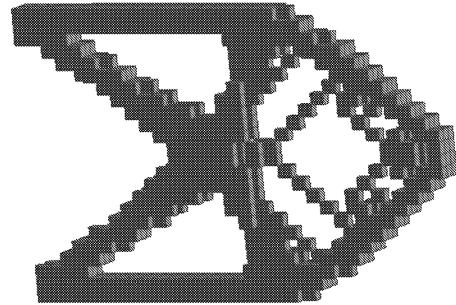


图 8 最优拓扑结构

Fig.8 Optimal topology configuration

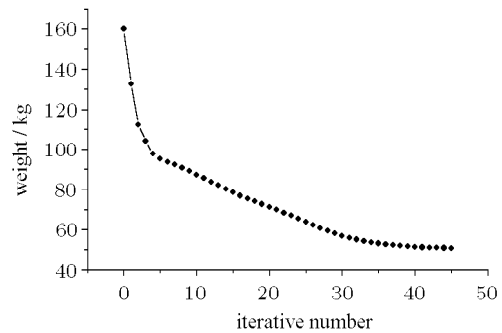


图 9 重量迭代历史

Fig.9 Iterative history of weight

算例 3 工程算例 —— 赵州桥

赵州桥是我国古代建造的一座著名的石拱桥. 钱令希院士 [15] 曾利用弹塑性理论予以计算, 发现主拱两肩的“泻洪孔”实际上是结构设计的关键措施, 既保证了整体的平衡不产生跨中起拱, 又保证了压力线分布的合理. 根据赵州桥的实际结构确定拓扑优化的基结构, 尺寸如图 10 所示. 结构分析中采用

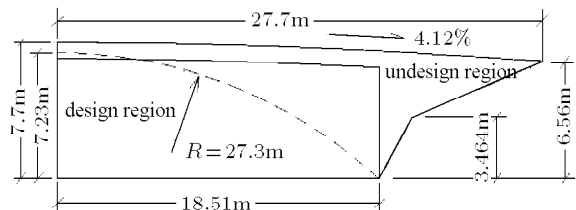


图 10 拓扑优化的初始基结构 (半桥结构模型)

Fig.10 Base structure of topology optimization (structural model of half bridge)

石材的有关参数：材料密度为 2800 kg/m^3 ，弹性模量为 5.488 GPa ，泊松比为 0.18 。

以结构重量最小为目标，在应力约束的情况下进行拓扑优化，对应力约束进行全局化处理，将其转化为结构总应变能约束，在应变能约束为初始总应变能 3 倍的约束条件下优化得到的拓扑图形如图 11 所示，从图中可以看出：主拱的形状与原桥的圆弧线非常符合，主拱两肩各出现 3 个小孔，前两个小孔的大小及位置与原桥也非常接近，而第 3 个小孔非常小，考虑到建筑工艺要求，在抽象其拓扑图形时可以将其忽略，从拓扑图形抽象出来的结构如图 12 所示，与原桥 [14] 比较可以看出两图中桥的形状非常相似，从而从拓扑优化的角度印证了赵州桥在力学上的合理性。

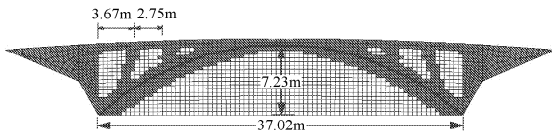


图 11 拓扑优化得到的结构

Fig.11 Structure obtained by topology optimization

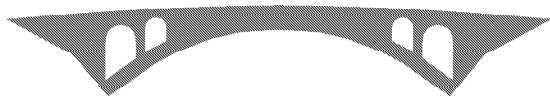


图 12 由最优拓扑抽象得到的结构

Fig.12 Structure abstracted from optimal topology

算例 4 工程算例 —— 地板梁

图 13 所示是“空中客车”大型客机机舱的地板梁原设计方案。这个问题是由德国 MBB 公司提出的。该结构的设计要求为：在地板梁上预留铺设电缆和水管等设备的通道 [16~18]。该问题定义如下：结构左下角使用活动铰链，右下角使用固定铰链。上边界中点处作用一集中荷载 P ，其值为 100。结构尺寸如图 14 所示，厚度为 1.0。材料参数分别为：弹性模量 $E = 210 \times 10^6$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，密度 $\rho = 1.0$ ，许用应力 $\bar{\sigma}$ 为 4.6×10^2 。结构被划分成 180×30 个 Q4 单元。结果见图 15 和图 16。

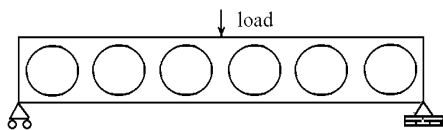


图 13 结构的原设计

Fig.13 Original design of structure

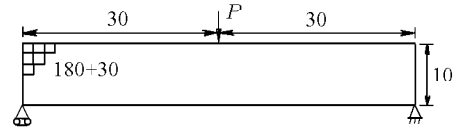


图 14 基结构

Fig.14 Base structure

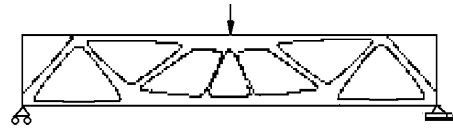


图 15 Olhoff, Bendsøe 等人的修正优化结构 [18]

Fig.15 Modified Optimal structure by Olhoff, Bendsøe etc.[18]

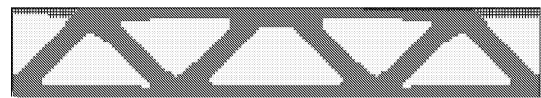


图 16 本文拓扑优化结构

Fig.16 Optimal topology configuration in this paper

从图 17 和图 18 看出，原设计应力分布不均匀，有应力集中现象，此时最大 Mises 应力为 5.37×10^2 ，大于许用应力，而本文优化出的结构应力分布比较均匀，最大 Mises 应力为 4.60×10^2 ，刚好等于许用应力，而且结构重量减轻了 59.8%。由此可以看出拓扑优化不仅能减轻结构重量，而且能改善结构的力学性能。与文献 [18] 的结果对比可以看出，本文得到的拓扑更清晰，结构更实用，收敛速度也更快。



图 17 原结构的应力分布

Fig.17 Stress distribution of base structure



图 18 最优拓扑结构的应力分布

Fig.18 Stress distribution of optimal topology structure

7 结 论

ICM 方法以结构重量为目标，从而将截面优化、形状优化和拓扑优化的目标统一规范化，独立、

连续拓扑变量概念的提出不仅有效地解决了应力等约束下的连续体结构拓扑优化问题,从而更有利于工程实际应用,也实现了骨架类结构和连续体结构拓扑优化模型的统一,尤其在处理多工况问题时,将多工况的约束放在同一个模型中,改变了多目标优化模型由于工况的组合扰乱的“传力路径”,从而寻找到了最佳的“传力路径”.另外,ICM方法有利于建立的数学模型的求解,对偶规划方法的引入减少了设计变量的数目,提高了优化的效率,减少了迭代次数.

基于ICM方法的应力约束凝聚化方法极大地降低了敏感度分析计算量,提高了求解效率,不管对于载荷单工况还是载荷多工况,本文的方法都得到了比较清晰的最终拓扑形式,该方法不仅适用于二维连续体结构拓扑优化,也适用于三维连续体结构拓扑优化,是处理应力约束下结构拓扑优化设计的可行且有效的途径.

参 考 文 献

- 1 Eschenauer HA, Olhoff N. Topology optimization of continuum structures: A review. *Appl Mech Rev*, 2001, 54(4): 331~390
- 2 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化. 大连理工大学学报, 1995, 35(1): 1~9 (Cheng Gengdong, Zhang Dongxu. Topological optimization of plane elastic continuum with stress constraints. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(1): 1~9 (in Chinese))
- 3 王健, 程耿东. 应力约束下薄板结构的拓扑优化. 固体力学学报, 1997, 18(4): 317~322 (Wang Jian, Cheng Gengdong. Optimal topology design of thin plate with stress constraints. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18(4): 317~322 (in Chinese))
- 4 Guan HS, Grant P, Xie YM. Evolutionary structural optimization incorporating tension and compression materials. *Advances in Structural Engineering*, 1999, 2(4): 273~288
- 5 荣见华, 姜节胜等. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑渐进优化方法. 力学学报, 2003, 35(5): 584~591 (Rong Jianhua, Jiang Jiesheng, et al. A structural topology evolutionary optimization method based on stresses and their sensitivity. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(5): 584~591 (in Chinese))
- 6 Yang RJ, Chen CJ. Stress-based topology optimization. *Structural Optimization*, 1996, 12: 98~105
- 7 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展. 大连: 大连理工大学出版社, 1996. 96~99, 177~195 (Sui Yunkang. Modeling, Transformation and Optimization: New Developments of Structural Synthesis Method. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996. 96~99; 177~195(in Chinese))
- 8 隋允康, 于新. 平面膜结构拓扑优化的有无复合方法. 力学学报, 2001, 33(3): 357~364 (Sui Yunkang, Yu Xin. The exist-null combination method for the topological optimization of plane membrane structure. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 3 (33): 357~364 (in Chinese))
- 9 隋允康, 杨德庆等. 统一骨架与连续体的结构拓扑优化的ICM理论与方法. 计算力学学报, 2000, 17(1): 28~33 (Sui Yunkang, Yang Deqing, et al. Uniform ICM theory and method on optimization of structural topology for skeleton and continuum structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, 17(1): 28~33(in Chinese))
- 10 Sui Yunkang, Ye Hongling, Peng Xirong. Topological optimization of continuum structure with global stress constraints based on ICM method. International Conference on Computational Methods, Dec. 15~17, 2004, Singapore
- 11 隋允康, 于新. K-S函数与模函数法的统一. 大连理工大学学报, 1998, 38(5): 502~505 (Sui Yunkang, Yu Xin. Uniform of K-S function and norm function. *Journal of Dalian University of Technology*, 1998, 38(5): 502~505 (in Chinese))
- 12 Kreisselmeier G, Steinhauser R. Systemic control design by optimizing a vector performance index. Proceedings of IFAC Symposium on CAD of Control Systems, Zurich, Switzerland, 1979. 113~117
- 13 王希诚, 钱令希. 多层次联合的结构优化设计. 计算结构力学及其应用, 1988, 5(4): 69~75 (Wang Xicheng, Qian Lingxi. Structural optimization compound of different levels. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1988, 5(4): 69~75 (in Chinese))
- 14 Querin OM, Steven GP, Xie YM. Evolutionary structural optimization (ESO) using Bi-directional algorithm. *Engineering Computations*, 1998, 15(8): 1031~1048
- 15 Qian LX. New insight into ancient stone arch bridge——The Zhao-zhou Bridge of 1400 Years Old. *Int J of Mech Sci*, 1987, 29(12): 831~843
- 16 Bulman S, Siens J, Hinton E. Comparisons between algorithms for structural topology optimization using a series of benchmark studies. *Computers & Structures*, 2001, 79: 1203~1218
- 17 Behrooz Hassani, Ernest Hinton. Homogenization and Structural Topology Optimization. Berlin: Springer, 1998
- 18 Bendsoe MP. Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Berlin: Springer, 1995

THE ICM METHOD FOR CONTINUUM STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH CONDENSATION OF STRESS CONSTRAINTS¹⁾

Sui Yunkang²⁾ Ye Hongling Peng Xirong Zhang Xuesheng

(Numerical Simulation Center for Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract In order to overcome the difficulties of large number of stress constraints and high cost in calculating the stress sensitivities in the topology optimization with stress constraints, this paper proposes the ICM method for structural topology optimization with condensation of stress constraints. Using the theory of Mises strength to transform stress constraints into strain energy constraints, two approaches are proposed for condensation of stress constraints. One is globalization of stress constraints, the other is integration of stress constraints. Then the optimal model with a weight objective and condensed strain energy constraint is established, and the dual theory is used in the optimal model of continuum structure to obtain the numerical solution. Four examples show that the method has high computational efficiency and a reasonable optimal topology can be obtained. In addition, this method is valid not only for two dimensional continuum structure but also for three dimensional continuum structure.

Key words continuum structure, topology optimization, ICM (independent continuous mapping) method, multiple load cases

Received 7 February 2006, revised 7 December 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472003), the Natural Science Foundation of Beijing (3042002), the Education Committee of Beijing (KM200410005019) and the Foundation of Beijing University of Technology for Ph. D.

2) E-mail: ysui@bjut.edu.cn