峰后岩石非 Darcy 渗流的一维非定常严格简明解析解 [1)]

蔡睿贤 [2)] 李元媛 蒋润花

(中国科学院工程热物理研究所，北京 100190)

摘要 煤炭是中国近期的主要能源，仍需要大力研究．而煤矿采动围岩大多处于峰后应力状态或破碎状态，其渗流一般不符合 Darcy 定律．探讨非 Darcy 渗流系统，对其研究既有理论创新价值，尤其在煤矿安全中更有重要的实用价值．用近年发展的求解偏微分方程新的分离变量法 —— 加法分离变量法，得出了 Ahmed-Sunada 型非 Darcy 渗流的 3 套非常简明的一维非定常严格解析解，以发展相应的渗流理论，以及作为标准解推进渗流数值计算的水平．

关键词 非 Darcy 流，加法分离变量法，严格解析解，峰后岩石， Ahmed-Sunada 型渗流

中图分类号： O357.3 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2009)04-0584-04

引 言

在相当长时间内，煤炭仍将是中国的主要能源 [1,2]; 露天矿不多，大多煤炭都是从地下开采而得．所以，从多方角度研究煤矿的各种问题，例如开采，岩石等问题，是非常有价值的．受地应力场和开挖应力场共同作用的煤矿围岩，一般处于峰后应力状态或破碎状态中，会引起渗流运动失稳使得煤矿突水与瓦斯突出．因此，研究采动岩体中的各种情况，包括其现场变化，测量与实验所得的各种数据，理论上的总结，数理方程的引出，以及方程的数值解乃至严格的解析解的导出等等，对于防治突水与瓦斯突出灾害具有重要的理论意义和实用价值．

本文就上述几个问题，探讨其可能有的新的简明解析解，以从理论上获得进一步的创新成果．通常研究渗流最常用的物理模型与实用定律是 Darcy 定律，但水在峰后岩石 (应力超过岩石强度极限，岩石内产生大量裂隙) 内的渗流，还不服从 Darcy 定律而服从 Ahmed-Sunada 关系 [3]．其渗透率比峰前增长几个数量级，渗流系统是非线性的，更希望能得到其基本方程的简明严格解析解．既可作为渗流理论的基础，尤其是可以作为 Ahmed-Sunada 型渗流的基准解 (benchmark solution)，以发展相应的渗流理论与验证有关数值解的准确度、收敛度、稳定性．但是，已有常用的求出偏微分数理方程的严格解析解的方法 (例如常规的分离变量法)，是不可能找出 Ahmed-Sunada 关系的简明严格解析解的．因此，本文利用近来新发展的求解偏微分数理基本方程的加法分离变量法 [4~8]，对 Ahmed-Sunada 型渗流求出其一维非定常非常简明而绝对严格的解析解，以促进本学科的发展．

1 峰后岩石 Ahmed-Sunada 型非 Darcy 渗流系统的一维非定常基本方程

峰后岩石 Ahmed-Sunada 型非 Darcy 渗流系统的一维非定常基本方程组，缪协兴等 [3] 已按孔祥言 [9] 给出的普遍三维非定常方程简化后导出其无量纲表达为

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{x}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{t}} = -a_1\frac{\partial \overline{p}}{\partial \bar{x}} - a_3(\overline{w} - \overline{w}^2) \tag{2}$$

在式 (1) 与式 (2) 中，除一维简化外，还忽略了体积力，流体的可压性与源、汇．式中各参数的物理意义是 $\overline{p} = \phi_0 c_t p$, $\overline{w} = \beta k w/\mu$, $\bar{t} = \mu t/(\rho_0 \beta k l)$,

2008–05–04 收到第 1 稿， 2009–04–13 收到修改稿．

1) 国家自然科学基金资助项目 (50876106).

2) E-mail: crx@mail.etp.ac.cn

$\overline{x}=x/l$, $a_1=\rho_0\beta^2k^2/(c_a\phi_0c_t\mu^2)$, $a_3=\beta l/c_a$. 而其中 p 是流体压力； ϕ_0 是孔隙率； c_t 是流体的综合压缩系数，在忽略流体的可压性后，它相当于孔隙压缩系数； β 是非 Darcy 流 β 因子； k 是渗透率； w 是动量密度，即 $w=\rho_0 v$, 其中 ρ_0 是流体的质量密度， v 是渗透速度； μ 是流体的动力黏度； t 是时间坐标； x 是几何坐标； l 是基准长度； c_a 是加速度系数. 各参数上面加 "$-$" 的是无量纲量. 在本文中认为除 $\overline{p},\overline{w},\bar{t}$ 与 $\overline{x}$ 外，其它参数均为常数.

本节的一维非定常基本方程组，看似简单，但实际上求解简明严格解析解并不容易. 主要是因为在式 (2) 中除有动量密度 $\overline{w}$ 的偏导数项外，还有 $\overline{w}$ 本身及其平方项，用常用的经典分离变量法是难以进行分离变量的. 必须另创新法，才能找到此方程组可能有的简明严格解析解以供实用.

2　加法分离变量法

经典的分离变量法的核心思想是假设待求函数 $F(x,y)$ 可表达为两个一元函数 $f(x)$ 与 $g(y)$ 的乘积 $F(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ ，然后代入基本控制方程，再设法将含 x 的项与含 y 的项分离，将原偏微分方程降为常微分方程以求解. 在历史上它对求解不少领域 (如振动力学、导热学等等) 的偏微分方程中都起了很大的作用.

但是经典的分离变量法也不是万能的，对不少偏微分数理方程它都不能分离变量. 近年来我们发现如果将上述分离变量法中的乘号改为加号，即设 $F(x,y)=f(x)+g(y)$ ，就可分离变量且得到不少领域 (如导热、对流、干燥、层流、多孔介质渗流、非牛顿流、弹性力学、塑性力学等) 中不同基本方程的简明显式严格解析解 [4~8].

由于本文的目的并非要导出具体情况 (问题) 的解析解，而主要是要找出 Ahmed-Sunada 关系的非 Darcy 渗流中可能有的代数显式 (不包括无限级数与特殊函数) 严格解析解，以作为基准解. 所以下面求解过程与常规的不一样，不是根据已有的初始边界条件通过基本方程求出满足这些条件的解；而是先按基本方程找出可能有的简明解析解，然后在有需要时定出其相应的初始条件与边界条件 (本文求解的是一维非定常问题，定出这些条件也是很简单的，下文已省略).

3　简明严格解析解一

上节所述加法分离变量法，令式 (1) 与 (2) 中的 $\overline{p}=X_p(\overline{x})+T_p(\bar{t})$ 与 $\overline{w}=X_w(\overline{x})+T_w(\bar{t})$, 并将之代入式 (1) 与 (2) ，即可得

$$T_p'=-X_w'=c_1 \tag{3}$$

$$T_w'=-a_1X_p'-a_3(T_w+X_w)+a_3(T_w^2+2T_wX_w+X_w^2) \tag{4}$$

由式 (3) 很容易导得

$$T_p=c_1\bar{t}+c_2 \tag{5}$$

及

$$X_w=c_3-c_1\overline{x} \tag{6}$$

式中各 c_i 为不同常数，后同.

将式 (5) 与 (6) 代入式 (4) ，可得

$$T_w'=-a_1X_p'-a_3T_w-a_3(c_3-c_1\overline{x})+a_3[T_w^2+2T_w(c_3-c_1\overline{x})+c_3^2-2c_1c_3\overline{x}+c_1^2\overline{x}^2] \tag{7}$$

式 (7) 仍不能分离变量. 为能分离变量，以求得简明的严格解析解，对式 (7) 有两种可能性：一是设 T_w 为常数，另一是设 $c_1=0$.

在本节先按 T_w 为常数来求解. 这时有

$$T_w=c_0 \tag{8}$$

将式 (8) 代入式 (7) ，可得

$$a_1X_p'=-a_3c_0-a_3c_3+a_3c_1\overline{x}+a_3c_0^2+2a_3c_0c_3-2a_3c_0c_1\overline{x}+a_3c_3^2-2a_3c_1c_3\overline{x}+a_3c_1^2\overline{x}^2 \tag{9}$$

对式 (9) 进行同类项合并且对 X_p' 进行积分，可得 X_p 的示式

$$X_p=\frac{a_3}{a_1}\{[(c_0+c_3)^2-c_0-c_3]\overline{x}+c_1(1-2c_0-2c_3)\overline{x}^2/2+c_1^2\overline{x}^3/3\} \tag{10}$$

将式 (5) 与 (10) 相加，即可得无量纲动量密度 $\overline{p}$ 的示式

$$\overline{p}=\frac{a_3}{a_1}\{[(c_0+c_3)^2-c_0-c_3]\overline{x}+c_1(1-2c_0-2c_3)\overline{x}^2/2+c_1^2\overline{x}^3/3\}+c_1\bar{t}+c_2 \tag{11}$$

同样，将式 (6) 与 (8) 相加，即可得无量纲动量密度 $\overline{w}$ 的示式

$$\overline{w}=c_3-c_1\overline{x} \tag{12}$$

需要说明的是：对加法分离变量法，两个函数相加很可能出现两个常数相加，实际上其中有一个常数出现即已足够．所以式 (12) 中可以省掉式 (8) 中的 c_0．

在此，已导出一套非定常一维 Ahmed-Sunada 型非 Darcy 渗流简明的严格解析解．它可以作为基准解以发展计算渗流力学．而且它也有其理论意义，例如证明了比较少见的 Ahmed-Sunada 型渗流方程式 (1) 与 (2) 可以有很简单的严格解：其无因次压力只是无量纲几何坐标的 3 次幂函数加上无量纲时间的线性函数，而其无量纲动量密度只是无量纲几何坐标的线性函数．

4 简明严格解析解二

对上节式 (7)，采用了第二种简化：令 $c_1 = 0$，则式 (5) 与 (6) 应改为

$$T_p = c_2 \tag{13}$$

$$X_w = c_3 \tag{14}$$

而式 (7) 可分离变量为

$$T_w' - a_3(2c_3 - 1)T_w - a_3T_w^2 = c_4 = -a_1X_p' - c_3a_3 + c_3^2a_3 \tag{15}$$

为使式 (15) 左侧能简单严格积分，取 $c_4 = 0$，则由式 (15) 右侧很容易推导出

$$X_p = c_3a_3(c_3 - 1)\overline{x}/a_1 \tag{16}$$

将式 (16) 与式 (13) 相加，可得此时无量纲压力的示式

$$\overline{p} = X_p + T_p = c_3a_3(c_3 - 1)\overline{x}/a_1 + c_2 \tag{17}$$

式 (15) 左侧的积分在常微分方程已有经典办法，可得出

$$T_w = (2c_3 - 1)\exp[a_3(2c_3 - 1)\overline{t}]/\\ \{c_5a_3(2c_3 - 1)^2 - \exp[a_3(2c_3 - 1)\overline{t}]\} \tag{18}$$

由此再考虑式 (14)，可得无量纲动量密度 $\overline{w}$ 的示式

$$\overline{w} = (2c_3 - 1)\exp\left[a_3(2c_3 - 1)\overline{t}\right]/\\ \{c_5a_3(2c_3 - 1)^2 - \exp[a_3(2c_3 - 1)\overline{t}]\} + c_3 \tag{19}$$

亦即在此解析解中，无量纲动量密度是无量纲时间的较复杂的指数方程，而无量纲压力只是无量纲几何坐标的简单线性函数．

如果在式 (19) 中取 $c_5 = 0$，则无量纲动量密度的示式即改为

$$T_w = 1 - 2c_3 \tag{20}$$

与

$$\overline{w} = 1 - c_3 \tag{21}$$

亦即此简化的动量密度是常数，仅无量纲压力 $\overline{p}$(见式 (17)) 是无量纲几何坐标的简单线性函数，与原解的特性变化较大．

5 简明严格解析解三

如果在上一节中取 $c_3 = 1/2$，则式 (15) 变化较大，可表达为

$$T_w' - a_3T_w^2 = c_4 = -a_1X_p' - a_3/4 \tag{22}$$

其方程特性与上一节不同，因此其解与上一节原则上也不一样．这时 c_4 为任意常数而非 0 时也可以导得显式解析解．

推导办法仍用加法分离变量法，则其 T_p 与 X_w 的解应与式 (13) 与 (15) 一样，不赘述．

由式 (22) 明显的右侧等式可知 X_p 是 $\overline{x}$ 的线性函数，为

$$X_p = -(c_4 + a_3/4)\overline{x}/a_1 \tag{23}$$

再加上式 (13) 可得

$$\overline{p} = c_2 - (c_4 + a_3/4)\overline{x}/a_1 \tag{24}$$

亦即此解的无量纲压力仍是无量纲几何坐标的线性函数，但与上一节式 (17) 的表达略有差异．

对式 (22) 左端等式进行积分求解，可得 (当 c_4 与 a_3 为同号)

$$T_w = \sqrt{c_4/a_3}\tan[\sqrt{c_4a_3}(\overline{t} + c_5)] \tag{25}$$

及 (当 c_4 与 a_3 为异号)

$$T_w = \sqrt{-c_4/a_3}\coth[\sqrt{-c_4a_3}(\overline{t} + c_5) \tag{26}$$

将式 (25),(26) 与式 (14) 相加，可得当 c_4 与 a_3 为同号时

$$\overline{w} = \sqrt{c_4/a_3}\tan[\sqrt{c_4a_3}(\overline{t} + c_5)] + c_3$$

及当 c_4 与 a_3 为异号时

$$\overline{w} = \sqrt{-c_4/a_3}\coth[\sqrt{-c_4a_3}(\overline{t} + c_5)] + c_3$$

亦即当取 c_3 为一特殊值 $c_3 = 1/2$ 时，会得到与上一节不一样的无量纲动量密度示式．

6 结束语

研究峰后岩石 Ahmed-Sunada 型非 Darcy 渗流对非线性渗流与煤矿安全有理论意义和实用价值．作为基础研究，本文利用作者近年来新发展的加法分离变量法，对其主控方程的基本形式 —— 非定常一维流动非线性方程求得了 3 套代数显式 (即所得解中只有初等函数，不包括有特殊函数、无穷级数等) 简明严格解析解．所得的解首先可以推进理论研究，也可以作为基准解发展渗流的数值计算方法．

参　考　文　献

1 江泽民．对中国能源问题的思考．上海交通大学学报，2008, 42(3): 345～359 (Jiang Zemin. Reflections on energy issues in China. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2008, 42(3): 345～359 (in Chinese))

2 严陆光, 陈俊武．中国能源可持续发展若干重大问题研究．北京：科学出版社，2007. 6～13 (Yan Luguang, Chen Junwu. Research on Some Important Problems of Chinese Sustainable Energy Development. Beijing: Science Press, 2007. 6～13 (in Chinese))

3 缪协兴，陈占清，茅献彪等．峰后岩石非 Darcy 渗流的分岔行为研究．力学学报，2003, 35(6): 660～667(Miao Xiexing, Chen Zhanqing, Mao Xianbiao, et al. The bifurcation of non-Darcy flow in post-failurerock. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 660～667(in Chinese))

4 Cai Ruixian, Zhang Na. Some algebraically explicit analytical solutions of unsteady nonlinear heat conduction. ASME TRANS. *J Heat Transfer*, 2001, 123(6): 1189～1191

5 Cai Ruixian, Zhang Na. Explicit analytical solutions of linear and nonlinear heat and mass transfer equation sets for drying process. ASME TRANS. *J Heat Transfer*, 2003, 125(1): 175～178

6 Cai Ruixian, Zhang Na. Explicit analytical solutions of 2-D laminar natural convection. *International J Heat and Mass Transfer*, 2003, 46(5): 931～934

7 Cai Ruixian, Zhang Na. Explicit analytical solutions of the anisotropic Brinkman model for the natural convection in porous media. *Science in China* (Series A), 2002, 45(6): 808～816

8 Cai Ruixian, Gou Chenhua. Algebraically explicit analytical solutions for the unsteady non-Newtonian swirling flow in an annular pipe. *Science in China* (Series G), 2006, 49(4): 396～400

9 孔祥言．高等渗流力学．合肥：中国科学技术大学出版社，1999 (Kong Xiangyan. Advanced Mechanics of Fluid in Porous media. Hefei: Press of China University of Science and Technology, 1999 (in Chinese))

(责任编辑：刘俊丽)

UNSTEADY 1D EXACT SOLUTIONS OF NON-DARCY FLOW IN POST-FAILURE ROCK [1)]

Cai Ruixian[2)]　Li Yuanyuan　Jiang Runhua

(*Institute Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

Abstract　Coal will be still the main energy in China. Hence it is still necessary to research various problems about coalmines In general, seepage flow in post-failure wall rock in coalmines is not controlled by Darcy' Law and described as a nonlinear penetrating system of the Ahmed-Sunada's non-Darcy flow. In the present paper, some simple exact analytical solutions of the partial differential equation set of unsteady 1-D Ahmed-Sunada type flow are derived with the method of separating variables with addition (MSVA). The MSVA was developed recently by Cai and successfully applied to derive many new analytical solutions. The unknown function $F(x, y)$ is assumed to be $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ in the common method of separating variable, while be $F(x, y) = f(x) + g(y)$ in MSVA. As a sequence, three simple exact analytical solutions of Ahmed-Sunada's non-Darcy flow have been successfully derived.

Key words　non-Darcy flow, method of separating variables with addition, exact analytical solution, post-failure rock, Ahmed-Sunada type flow

Received 4 May 2008, revised 13 April 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50876106).

2) E-mail: crx@mail.etp.ac.cn