

## 数据丢失对迭代学习控制的影响分析

卜旭辉<sup>1</sup>, 侯忠生<sup>2</sup>, 余发山<sup>1</sup>, 付子义<sup>1</sup>

(1. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454003; 2. 北京交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 针对一类线性系统, 分析数据丢失对迭代学习控制算法的影响. 基于 *lifting* 方法给出跟踪误差渐近收敛和单调收敛的条件, 并分析收敛速度与数据丢失率的关系, 结果表明收敛速度随着数据丢失程度的增加而变慢. 为了抑制迭代变化扰动的影响, 给出一种存在数据丢失时的鲁棒迭代学习控制器设计方法, 并将控制器设计问题转化为求解线性矩阵不等式的可行解. 仿真实例验证了理论分析结果和鲁棒迭代学习控制算法的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 数据丢失; 收敛速度; 鲁棒设计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Effect analysis of data dropout on iterative learning control

BU Xu-hui<sup>1</sup>, HOU Zhong-sheng<sup>2</sup>, YU Fa-shan<sup>1</sup>, FU Zi-yi<sup>1</sup>

(1. School of Electrical Engineering & Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China; 2. School of Electronics & Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China. Correspondent: BU Xu-hui, E-mail: buxuhui@gmail.com)

**Abstract:** The effect analysis of data dropout on iterative learning control(ILC) for linear discrete-time systems is considered. By using the *lifting* technique to ILC, the conditions of tracking error for both asymptotic stability and monotonic convergence are given, and the relationship between convergence speed and data dropout rate is also presented. It is shown that the convergent speed gets slower as dropout rate increases. To attenuate iteration-varying disturbances for ILC system with data dropout, a robust iterative learning controller design is proposed. The controller can be derived in terms of linear matrix inequalities(LMIs) that can be solved by using existing numerical techniques. Some examples are also given to validate the theoretical results and the effectiveness of the proposed robust ILC scheme.

**Key words:** iterative learning control; data dropout; convergence speed; robust design

## 0 引言

迭代学习控制对于执行重复任务的系统是一种有效的控制方法, 它可以根据系统运行的历史信息, 通过不断修正当前运行的控制输入实现有限区间内的完全跟踪控制. 目前该方法已取得丰富的理论成果和实际应用<sup>[1-8]</sup>.

实际系统中, 网络技术的发展使得网络控制系统逐步取代传统点对点的控制方式, 因此研究网络控制系统中迭代学习控制的分析和设计问题具有重要的理论和实际意义. 目前, 该领域已有少量研究结果发表, 文献[9-10]针对存在数据丢包的线性系统, 给出了一种最优迭代学习控制率的设计方法, 并分别考虑多变量输出过程中每个输出的丢失过程相同和不同的情况. 文献[11]针对输出数据的丢失, 给出了一种

均值 ILC 控制率的设计方法, 该方法可以看作在迭代域对丢失的数据进行补偿. 文献[12]基于 *lifting* 方法将存在数据丢失的线性迭代学习控制系统转化为迭代域上的异步动态系统, 并根据异步动态系统稳定性的判别方法给出了算法的收敛性定理, 但该结果需要求解双边线性矩阵不等式, 这对于实际迭代学习控制系统较为困难. 为此, 文献[13]给出了另一种稳定性条件. 文献[14]研究了非线性系统存在控制输入数据丢失和输出测量数据丢失的收敛性问题.

文献[9-14]研究结果均表明, 对于一个稳定的迭代学习控制系统, 当存在一定程度的数据丢失时, 系统仍然是稳定的, 但均未给出数据丢失对算法的具体影响. 直觉上讲, 当数据丢失时由于可以利用的信息减少一定会对控制系统带来某种不利影响. 鉴于此,

收稿日期: 2012-11-02; 修回日期: 2013-03-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203065, 61120106009); 河南省控制工程重点学科开放实验室项目(KG2011-10).

作者简介: 卜旭辉(1981—), 男, 副教授, 从事学习控制、数据驱动控制的研究; 侯忠生(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事数据驱动控制、智能交通、智能信息处理等研究.

本文分别从渐近收敛和单调收敛两种情况研究数据丢失对于迭代学习控制算法的影响,并给出一种鲁棒的控制器设计方法.最后通过仿真实例验证了理论分析结果和所提出算法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下 SISO 线性时不变离散时间系统:

$$y_k(t) = G(q)u_k(t). \quad (1)$$

其中:  $u_k(t) \in R^1$ 、 $y_k(t) \in R^1$ 、 $G(q)$  分别为控制输入、系统输出和传递函数,  $k$  为迭代次数,  $t \in [0, N]$  为运行时间. 假设系统满足如下两个条件: 1) 每一次运行的初始条件是相同的; 2) 期望轨迹  $y_d(t)$  是迭代不变的. 则系统 (1) 可以表示为如下 super-vector 形式:

$$Y_k = HU_k. \quad (2)$$

其中

$$U_k = [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)]^T,$$

$$Y_k = [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N)]^T,$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_N & h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_1 \end{bmatrix}.$$

**注 1** 矩阵  $H$  的元素  $h_i$  为线性系统 (1) 的 Markov 参数, 对于线性时变系统和某些特殊的非线性系统, 其 Markov 参数矩阵为类似的下三角矩阵, 因此本文结果对于线性时变系统和某些非线性系统同样适用.

针对上述系统, 考虑如下迭代学习控制算法:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma e_k(t+1), \quad (3)$$

其中  $\gamma$  为学习增益. 当系统存在输出测量数据丢失时, 算法 (3) 可以描述为<sup>[9-12]</sup>

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta(t)\gamma e_k(t+1), \quad (4)$$

其中  $\eta(t)$  为取值 0 和 1 的随机序列,  $\eta(t) = 0$  表示输出测量数据丢失,  $\eta(t) = 1$  表示数据没有丢失. 假设

$$\mathcal{E}\{\eta(t)\} = \bar{\eta}. \quad (5)$$

其中:  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  为数学期望因子,  $\bar{\eta}$  为数据传输的成功率, 满足  $0 \leq \bar{\eta} \leq 1$ .

本文主要内容为分析数据丢失程度  $\bar{\eta}$  对算法的影响, 并在  $\bar{\eta}$  已知的情况下设计鲁棒的迭代学习控制率. 为简单起见, 下文如无特殊说明将  $\eta(t)$  缩写为  $\eta$ .

## 2 数据丢失对收敛性的影响

本节分别讨论渐近收敛和单调收敛情况下数据丢失对算法的影响.

### 2.1 渐近收敛

首先给出渐近收敛的条件.

**定理 1** 考虑线性系统 (1) 采用式 (4) 的迭代学习控制算法, 若满足条件

$$|1 - \bar{\eta}\gamma h_1| < 1, \quad (6)$$

则系统跟踪误差的期望  $\mathcal{E}\{E_k\}$  渐近收敛.

证明过程见文献 [13], 此略.

**注 2** 由已有研究可知<sup>[15]</sup>, 当系统不存在数据丢失时, 算法渐近收敛的条件为  $|1 - \gamma h_1| < 1$ , 此时满足  $\gamma h_1 \in (0, 2)$ . 因为  $0 \leq \bar{\eta} \leq 1$ , 当  $\bar{\eta} \neq 0$  时,  $|1 - \bar{\eta}\gamma h_1| < 1$  成立, 所以, 对于渐近收敛的迭代学习控制系统, 当数据没有完全丢失时, 算法依然可以保证渐近收敛性.

**定理 2** 考虑线性系统 (1) 采用式 (4) 的迭代学习控制算法, 若定理 1 的条件满足, 则当数据丢失率增加时, 算法的收敛速度变慢.

**证明** 将算法 (4) 表示为如下 super-vector 形式:

$$U_{k+1} = U_k + \Gamma' E_k, \quad (7)$$

其中

$$E_k = Y_d - Y_k, \quad \Gamma' = \begin{bmatrix} \eta\gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \eta\gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta\gamma \end{bmatrix}.$$

由  $Y_{k+1} = HU_{k+1}$  可得

$$E_{k+1} = Y_d - Y_{k+1} =$$

$$Y_d - H(U_k + \Gamma' E_k) = (I - \Gamma') E_k. \quad (8)$$

由于  $\Gamma'$  含有随机变量  $\eta$ , 对其取期望可得

$$\mathcal{E}\{\Gamma'\} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}\{\eta\}\gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{E}\{\eta\}\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}\{\eta\}\gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{E}\{\eta\}\gamma \end{bmatrix} = \bar{\eta}\Gamma, \quad (9)$$

其中  $\Gamma = \gamma I$ . 式 (8) 两端取期望可得

$$\mathcal{E}\{E_{k+1}\} = (I - \bar{\eta}H\Gamma)\mathcal{E}\{E_k\}. \quad (10)$$

式 (10) 算法渐近收敛的条件为  $\rho(I - \bar{\eta}H\Gamma) < 1$ ,  $\rho(\cdot)$  为矩阵的特征值. 将矩阵  $I - \bar{\eta}H\Gamma$  展开为

$$I - \bar{\eta}H\Gamma = \begin{bmatrix} 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{\eta}\gamma h_2 & 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{\eta}\gamma h_3 & -\bar{\eta}\gamma h_2 & 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\bar{\eta}\gamma h_N & -\bar{\eta}\gamma h_{N-1} & -\bar{\eta}\gamma h_{N-2} & \cdots & 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由式 (11) 可知

$$\rho(I - \bar{\eta}H\Gamma) = |1 - \bar{\eta}\gamma h_1|.$$

因此, 当数据丢失率增加时,  $\bar{\eta}$  减小, 矩阵  $I - \bar{\eta}H\Gamma$  的特征值变大, 由  $\mathcal{E}\{E_{k+1}\} = (I - \bar{\eta}H\Gamma)\mathcal{E}\{E_k\}$  可知  $\mathcal{E}\{E_k\}$  的收敛速度变慢.  $\square$

### 2.2 单调收敛

由式 (10) 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\{E_{k+1}\}\| &= \|(I - \bar{\eta}H\Gamma)\mathcal{E}\{E_k\}\| \leq \\ &\|(I - \bar{\eta}H\Gamma)\| \|\mathcal{E}\{E_k\}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

由矩阵范数的性质可知<sup>[6]</sup>, 当  $\|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_\infty < 1$  时,  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_\infty$  范数意义下单调收敛; 当  $\|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_1 < 1$  时,  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_1$  范数意义下单调收敛.

**定理3** 考虑线性系统 (1) 采用式 (4) 的迭代学习控制算法, 若满足

$$|1 - \bar{\eta}\gamma h_1| + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < 1, \quad (13)$$

则系统跟踪误差的期望  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_\infty$  范数意义下单调收敛.

**证明** 由式 (11) 可知,  $I - \bar{\eta}H\Gamma$  的行向量可以表示为

$$\begin{aligned} (I - \bar{\eta}H\Gamma)_1 &= [1 - \bar{\eta}\gamma h_1, 0, \dots, 0], \\ (I - \bar{\eta}H\Gamma)_2 &= [-\bar{\eta}\gamma h_2, 1 - \bar{\eta}\gamma h_1, 0, \dots, 0], \\ &\vdots \\ (I - \bar{\eta}H\Gamma)_N &= [-\bar{\eta}\gamma h_N, -\bar{\eta}\gamma h_{N-1}, \dots, 1 - \bar{\eta}\gamma h_1], \end{aligned}$$

其中  $(I - \bar{\eta}H\Gamma)_i$  为第  $i$  个行向量. 因此有

$$\begin{aligned} \|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_\infty &= \\ \max\{\|(I - \bar{\eta}H\Gamma)_1\|_1, \|(I - \bar{\eta}H\Gamma)_2\|_1, \\ &\dots, \|(I - \bar{\eta}H\Gamma)_n\|_1\}, \end{aligned}$$

其中  $\|(I - \bar{\eta}H\Gamma)_i\|_1$  为第  $i$  个行向量的  $l_1$  范数, 根据范数的定义有

$$\|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_\infty = |1 - \bar{\eta}\gamma h_1| + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i|, \quad (14)$$

若式 (13) 满足, 则  $\|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_\infty < 1$ , 由矩阵范数的性质可知系统跟踪误差的期望  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_\infty$  范数意义下单调收敛.  $\square$

**注3** 定理3给出了  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_\infty$  范数下的单调收敛条件, 由  $I - \bar{\eta}H\Gamma$  的结构可知

$$\max_j \sum_{i=1}^N |(I - \bar{\eta}H\Gamma)_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^N |(I - \bar{\eta}H\Gamma)_{ij}| =$$

$$|1 - \bar{\eta}\gamma h_1| + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{j=2}^N |h_j|,$$

即  $\|(I - H\Gamma)\|_1 = \|(I - H\Gamma)\|_\infty$ , 因此定理3的条件同样可以保证  $\mathcal{E}\{E_k\}$  在  $l_1$  范数下单调收敛.

对于数据丢失的影响, 给出以下两个性质.

**性质1** 考虑线性系统 (1) 采用式 (4) 的迭代学习控制算法, 当  $\gamma h_1 \in (0, 1]$  时, 若数据没有丢失时算法单调收敛, 则对于所有  $\bar{\eta} \neq 0$  算法仍然单调收敛.

**证明** 当系统不存在数据丢失时单调收敛, 由式 (12) 可知满足条件

$$\|I - H\Gamma\|_\infty < 1. \quad (15)$$

由范数定义和  $\|I - H\Gamma\|_\infty$  的展开式可知

$$\|I - H\Gamma\|_\infty = |1 - \gamma h_1| + |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i|. \quad (16)$$

由于  $|1 - \gamma h_1| + |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < 1$ ,  $\gamma$  与  $h_1$  有相同的符号, 即

$$\gamma h_1 = |\gamma h_1| = |\gamma| |h_1|.$$

由于  $\gamma h_1 \in (0, 1]$ , 结合式 (15) 和 (16) 可得  $1 - \gamma h_1 + |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < 1$ , 这意味着

$$|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < \gamma h_1. \quad (17)$$

下面考虑存在数据丢失情况. 由于  $0 < \bar{\eta} \leq 1$ , 根据式 (17) 有

$$\bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < \bar{\eta}\gamma h_1. \quad (18)$$

因为  $\bar{\eta} \neq 0$ , 所以由  $\gamma h_1 \in (0, 1)$  可知  $\bar{\eta}\gamma h_1 \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} |1 - \bar{\eta}\gamma h_1| + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| &= \\ 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| &< \\ 1 - \bar{\eta}\gamma h_1 + \bar{\eta}|\gamma| |h_1| &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

由定理3可知, 式 (19) 意味着算法单调收敛.  $\square$

**注4** 性质1指出, 对于单调收敛的迭代学习控制系统, 当  $\bar{\eta} \neq 0$  时算法仍然单调收敛,  $\bar{\eta} \neq 0$  意味着数据没有完全丢失, 即数据没有完全丢失时算法仍然可以保证单调收敛.

下面讨论数据丢失对单调收敛的影响. 定义  $S(\bar{\eta}) = \|I - \bar{\eta}H\Gamma\|_\infty$ , 由式 (12) 可知  $S(\bar{\eta})$  越小, 算法的收敛速度越快.

**性质2** 若  $\gamma h_1 \in (0, 1]$ , 则对于满足定理3单调收敛的迭代学习控制系统, 其收敛速度随着数据丢失程度的增加而降低.

**证明** 若  $\gamma h_1 \in (0, 1]$ , 则条件 (13) 可写为

$$1 - \bar{\eta}\gamma h_1 + \bar{\eta}|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < 1,$$

即

$$|\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| < \gamma h_1. \quad (20)$$

假设系统存在  $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1$  和  $\bar{\eta} = \bar{\eta}_2$  两种不同情况的数据丢失过程, 且  $\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_2$ , 显然后者的数据丢失程度比前者严重.

根据  $S(\bar{\eta})$  的定义, 计算两种情况下的  $S(\bar{\eta})$  分别为

$$S(\bar{\eta}_1) = 1 - \bar{\eta}_1 \gamma h_1 + \bar{\eta}_1 |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i|,$$

$$S(\bar{\eta}_2) = 1 - \bar{\eta}_2 \gamma h_1 + \bar{\eta}_2 |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i|.$$

将两式相减可得

$$S(\bar{\eta}_1) - S(\bar{\eta}_2) =$$

$$\bar{\eta}_2 \gamma h_1 - \bar{\eta}_1 \gamma h_1 + \bar{\eta}_1 |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| - \bar{\eta}_2 |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| =$$

$$(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \gamma h_1 + (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| =$$

$$(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \left( \gamma h_1 - |\gamma| \sum_{i=2}^N |h_i| \right). \quad (21)$$

因为  $\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_2$ , 所以由式 (20) 和 (21) 可知  $S(\bar{\eta}_1) < S(\bar{\eta}_2)$ . 第 1 种情况下的收敛速度快于第 2 种情况.  $\square$

### 3 鲁棒算法设计

本节针对存在测量数据丢失的线性系统, 给出一种鲁棒迭代学习控制率的设计方法. 考虑如下学习率:

$$U_{k+1} = U_k + L E_k, \quad (22)$$

其中  $L = \{\gamma_{i,j}\}$  为需要设计的增益矩阵.

**注 5**<sup>[15]</sup> 增益矩阵包括 3 种情况: 当  $L$  为对角矩阵时, 学习率为本文第 2 节中讨论的 P 型迭代学习控制率; 当  $L$  为下三角矩阵时, 学习率为因果的; 当  $L$  为上三角矩阵时, 学习率为非因果的.

当系统 (1) 存在数据丢失时, 根据第 1 节的描述可将学习率 (22) 描述为

$$U_{k+1} = U_k + L M_k E_k. \quad (23)$$

其中

$$M_k = \begin{bmatrix} m_{k,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{k,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{k,N} \end{bmatrix},$$

随机参数  $m_{k,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 与  $\eta$  有相同的定义, 且满足  $\mathcal{E}\{m_{k,i}\} = \bar{m}$ ,  $0 \leq \bar{m} \leq 1$ . 根据式 (2) 和 (23) 可得  $E_{k+1} = (I - H L M_k) E_k$ , 两边取期望得

$$\mathcal{E}\{E_{k+1}\} = (I - \bar{m} H L) \mathcal{E}\{E_k\}. \quad (24)$$

记  $\sigma_i$  为矩阵  $I - \bar{m} H L$  的奇异值, 根据矩阵代数原理, 由式 (24) 可知

$$\|\mathcal{E}\{E_{k+1}\}\| \leq \max_i(\sigma_i) \|\mathcal{E}\{E_k\}\|, \quad (25)$$

因此  $\mathcal{E}\{E_k\}$  单调收敛的条件为  $\max_i(\sigma_i) < 1$ . 由于矩阵  $I - \bar{m} H L$  的奇异值等于矩阵  $(I - \bar{m} H L)(I - \bar{m} H L)^T$  的特征值, 上述条件可转化为

$$\rho((I - \bar{m} H L)(I - \bar{m} H L)^T) < 1. \quad (26)$$

式 (26) 还可以进一步表示成 LMI 的形式

$$(I - \bar{m} H L)(I - \bar{m} H L)^T - I < 0, \quad (27)$$

即

$$\begin{bmatrix} I & I - \bar{m} H L \\ (I - \bar{m} H L)^T & I \end{bmatrix} > 0.$$

当  $\bar{m}$  和  $H$  已知时, 可以利用 Matlab 的 LMI 工具箱找到一个  $L$  的可行解. 为了提高算法的鲁棒性, 将条件 (27) 修正为

$$(I - \bar{m} H L)(I - \bar{m} H L)^T < \alpha I, \quad (28)$$

其中  $\alpha$  为一个常数且满足  $0 < \alpha < 1$ . 该设计方法有两个优点, 一是可以提高算法对未建模动态和未知扰动的鲁棒性, 二是防止式 (28) 的左端太接近  $I$  导致算法的收敛速度过慢.

**注 6** 本文数据丢失影响的分析和鲁棒算法的设计均是考虑系统仅存在输出测量数据丢失的情况, 但丢失数据的描述和理论分析方法都可以直接推广到控制输入数据丢失的情形.

## 4 仿真研究

### 4.1 数据丢失的影响

#### 4.1.1 渐近收敛

考虑如下最小相位系统:

$$y_k(t+1) =$$

$$-0.2y_k(t) + 0.125y_k(t-1) +$$

$$u_k(t) - 0.9u_k(t-1). \quad (29)$$

假设系统的期望轨迹为  $y_d(t) = \sin(8.0(t-1)/10)$ ,  $t \in [0, 200]$ . 系统初始条件满足  $y_k(0) = 0$ , 第 1 次运行的控制输入  $u_0(t) = 0$ . 针对上述系统, 考虑 P 型 ILC 算法  $u_{k+1}(t) = u_k(t) + 0.9e_k(t+1)$ . 此时  $h_1 = 1$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $\sum_{j=2}^N |h_j| = 1.8131$ , 满足  $|1 - \gamma h_1| = 0.1 < 1$ , 但不满足  $|h_1| > \sum_{j=2}^N |h_j|$ , 因此当数据没有丢失时算法渐近收敛.

分别考虑  $\bar{\eta} = 0.8$  和  $\bar{\eta} = 0.6$  的情况, 此时对应的数据丢失率分别为 20% 和 40%. 验证定理 1 的条件可知, 两种情况下算法仍然收敛. 仿真结果如图 1 所示,

当系统没有数据丢失时, 算法的收敛速度最快, 当系统存在数据丢失时, 算法仍然收敛, 但收敛速度随着数据丢失程度的增加变慢. 注意到, 随着数据丢失的增加, 系统的最大暂态误差却是减小的. 这是因为系统的暂态误差是由某些不利的系统数据产生, 当这些数据丢失时, 不利因素会降低, 暂态误差随之减小.

### 4.1.2 单调收敛

考虑如下最小相位系统:

$$y_k(t+1) = -0.2y_k(t) + 0.125y_k(t-1) + u_k(t) + 0.1u_k(t-1). \quad (30)$$

假设系统的期望轨迹为

$$y_d(t) = \sin(8.0(t-1)/10), t \in [0, 200].$$

系统初始条件设置为  $y_k(0) = 0$ , 第 1 次运行的控制输入为  $u_0(t) = 0$ . 针对上述系统仍然考虑 P 型 ILC 算法

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + 0.9e_k(t+1).$$

此时

$$|h_1| = 1, \sum_{j=2}^N |h_j| = 0.3329,$$

满足  $|h_1| > \sum_{j=2}^N |h_j|$ , 因此当数据没有丢失时算法单调收敛. 同样考虑  $\bar{\eta} = 0.8$  和  $\bar{\eta} = 0.6$  的情况, 即数据丢失程度为 20% 和 40%. 验证定理 3 的条件可知, 两种情况下算法仍然单调收敛. 仿真结果如图 2 所示, 当系统没有数据丢失时, 算法的收敛速度最快, 当系统存在数据丢失时, 算法单调收敛速度随着数据丢失程度的增加变慢.

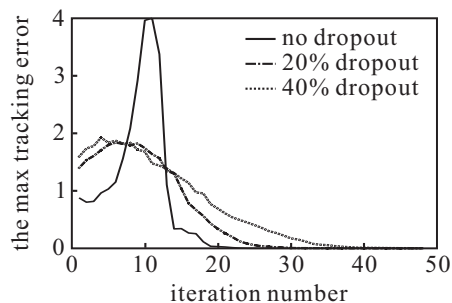


图 1 渐近收敛时不同数据丢失的最大迭代误差

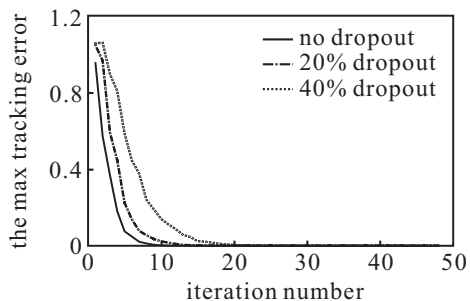


图 2 单调收敛时不同数据丢失的最大迭代误差

### 4.2 鲁棒 ILC 设计方法

考虑第 4.1.2 节的例子, 假设此时系统存在迭代相关的随机扰动  $w_k(t)$ , 扰动满足  $|w_k(t)| < 0.05$ . 当系统存在 20% 的数据丢失时, 首先采用 P 型迭代学习控制率  $u_{k+1}(t) = u_k(t) + 0.9e_k(t+1)$ , 仿真结果如图 3 所示, 系统仍然收敛, 但由于扰动的影响, 跟踪误差收敛到一个有界的域内.

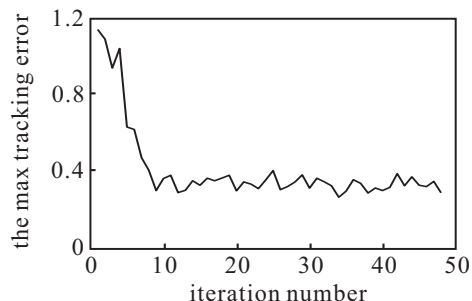


图 3 存在扰动时 P 型 ILC 的最大跟踪误差

下面验证本文提出的鲁棒迭代学习控制率设计方法的有效性. 将系统参数矩阵  $H$  和  $\bar{m} = 0.8$  代入 LMI (28) 中, 取  $\alpha = 0.9$ , 通过 Matlab 软件的 LMI 工具箱可以求出增益矩阵  $L$  的一个可行解. 将此解作为迭代学习控制的增益矩阵, 仿真结果如图 4 所示. 与图 3 中 P 型 ILC 控制算法相比, 鲁棒 ILC 算法跟踪误差收敛到一个更小的界内, 算法对迭代相关扰动具有较强的鲁棒性.

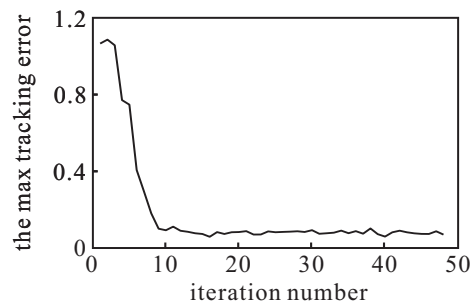


图 4 存在扰动时鲁棒 ILC 的最大跟踪误差

## 5 结 论

本文针对一类线性系统, 分析了输出测量数据丢失对迭代学习控制算法的影响. 首先通过 lifting 方法在迭代域上建立了算法渐近收敛和单调收敛的条件, 并在理论上给出了收敛速度与数据丢失率的关系; 然后给出了一种存在数据丢失时的鲁棒迭代学习控制器设计方法, 并将控制器求解转化为求取线性矩阵不等式的可行解. 研究表明, 对于 P 型 ILC 算法, 虽然数据丢失不改变算法的收敛性, 但收敛速度随着数据丢失程度的增加而变慢. 当系统同时存在迭代随机扰动时, 本文设计的鲁棒 ILC 控制器可以较好地抑制扰动的作用.

## 参考文献(References)

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *J of Robotic System*, 1984, 12(2): 123-140.
- [2] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 1-16.  
(Sun M X, Huang B J. Iterative learning control[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999: 1-16.)
- [3] Ahn H S, Chen Y, Kevin M. Iterative learning control: Brief survey and categorization[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2007, 37(6): 1099-1121.
- [4] Bristow D A, Tharayil M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26(3): 96-114.
- [5] Chi R H, Hou Z S, Xu J X. A discrete-time adaptive ILC for systems with iteration-varying trajectory and random initial condition[J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2207-2213.
- [6] Sun M X, Wang D W. Initial shift issues on discrete-time iterative learning control with system relative degree[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 144-148.
- [7] 孙明轩. 初态学习下的迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2007, 22(8): 848-852.  
(Sun M X. Iterative learning control with initial state learning[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(8): 848-852.)
- [8] 池荣虎, 侯忠生, 于镭, 等. 高阶无模型自适应迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2008, 23(7): 795-798.  
(Chi R H, Hou Z S, Yu L, et al. Higher order model free adaptive iterative learning control[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(7): 795-798.)
- [9] Ahn H S, Chen Y, Kevin M. Intermittent iterative learning control[C]. *Proc of the IEEE Int Symposium on Intelligent Control*. Munich: IEEE, 2006: 832-837.
- [10] Ahn H S, Chen Y, Kevin M. Discrete-time intermittent iterative learning control with independent data dropouts[C]. *Proc of 17th IFAC World Congress*. Seoul: IFAC, 2008: 12442-12447.
- [11] Liu C P, Xu J X, Wu J. Iterative learning control for network systems with communication delay or data dropout[C]. *Proc of 48rd IEEE Conf on Decision and Control*. Shanghai: IEEE, 2009: 4858-4863.
- [12] Bu X H, Hou Z S. Stability of iterative learning control with data dropouts via asynchronous dynamical system[J]. *Int J of Automation and Computing*, 2011, 8(1): 29-36.
- [13] Bu X H, Hou Z S, Yu F S. Stability of first and high order iterative learning control with data dropouts[J]. *Int J of Control, Automation and Systems*, 2011, 9(5): 843-849.
- [14] Bu X H, Yu F S, Hou Z S, et al. Iterative learning control for a class of nonlinear systems with random packet losses[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, 14(1): 567-580.
- [15] Ahn H S, Kevin M, Chen Y. Stability analysis of discrete-time iterative learning control systems with interval uncertainty[J]. *Automatica*, 2007, 43(5): 892-902.
- [16] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. New York: Cambridge University Press, 1985: 134-136.

(责任编辑: 郑晓蕾)