Jackson 多项式在广义 Hölder 度量下的逼近

文晓霞

宁夏大学物理电气信息学院,银川 750021

摘要 林阿婵 1991 年给出 Hölder 度量下 Jackson 多项式的逼近与饱和定理。在此基础上，本文运用度量定义、连续模的性质、Jackson 多项式的插值特性,再结合不等式的放缩方法,解决了如下问题:一个函数所生成的 Jackson 多项式与该函数之差在广义 Hölder 度量下的范数若要达到一定的阶,函数及其共轭函数所要满足的条件。最后给出了广义 Hölder 度量下 Jackson 多项式逼近与饱和的两个结果,建立了更广泛适用的理论。

关键词 Jackson 多项式;广义 Hölder 度量;逼近;饱和

中图分类号 O174　　**文献标志码** A　　**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.20.009

Approximation of Jackson Polynomial Under the Generalized Hölder Metric

WEN Xiaoxia

School of Physics and Electronics Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China

Abstract In the year of 1991, Lin Achan established a theory about the approximation and saturation of Jackson polynomial under Hölder metric. On the basis of those results,Jackson polynomial has been approximated under the generalized Hölder metric by using metric definition, modulus property, and interpolation feature of Jackson polynomial combining with the method of magnifying or diminishing inequality, the theory is effective proved. The following question is solved, namely, for a norm of the subtraction between function and its corresponding Jackson polynomial under generalized Hölder metric attains the certain degree, what kind of condition function and its conjugate function have to satisfy? In the end, two results about approximation and saturation of Jackson polynomial under generalized Hölder metric are obtained, which is more extensive than quondam conclusion.

Keywords Jackson polynomial; generalized Hölder metric; approximation; saturation

0 引言

Sun 在文献[1]中定义了广义 Hölder 度量:$\omega(t)$和 $\omega^*(t)$为两个给定的连续性模,且满足条件

$$\frac{\omega(t)^{\frac{p}{q}}}{\omega^*(t)}\to O(1)\quad t\to+0,0\leqslant p<q\leqslant 1 \tag{1}$$

$C_{2\pi}$ 表示所有以 2π 为周期的连续函数集合，范数定义为:$\|f\|_c=\sup\limits_{0<x<2\pi}|f(x)|$。

$H_\omega=\{f\in C_{2\pi}|\,|f(x)-f(y)|\leqslant c\omega(|x-y|)\}$,此处及文中其他处的 c 均为正常数,且不同之处可能取值不同。

$f\in H_\omega$,定义范数广义 Hölder $\|\cdot\|_{\omega^*}$:

$$\|f\|_{\omega^*}:=\|f\|_c+\sup_{x,y}\{\Delta^{\omega^*}f(x,y)\} \tag{2}$$

其中 $\Delta^{\omega^*}f(x,y)=\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega^*(|x-y|)}$,$x\neq y$,$\Delta^0 f(x,y)=0$,空间记为 H_{ω^*}。

特别地,若令 $\omega(t)=c|t|^\alpha$,$\omega^*(t)=c|t|^\beta$ $(0<\alpha<\beta\leqslant 1)$,式(2)定义的即为 Hölder 范数,空间记为 H_α。

Jackson 多项式 $J_n(f,x)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(t_k)\left(\frac{\sin\frac{n(t_k-x)}{2}}{\sin\frac{t_k-x}{2}}\right)^2$,其中,$t_k=t_{k,n}=\frac{2k\pi}{n}+t_{0,n}$($k=0,1,2,\cdots,n-1$; $t_0=t_{0,n}$ 为任意实数)。已有结果

收稿日期:2012-12-21;修回日期:2013-02-22

基金项目:国家自然科学基金项目(10962007)

作者简介:文晓霞,副教授,研究方向为函数逼近论,电子信箱:wen_xx@nxu.edu.cn

$J_n(f,t_k)=f(t_k)\quad J'_n(f,t_k)=0\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$

林阿婵在文献[2]中给出了 Jackson 多项式在 Hölder 度量下的逼近结论。

定理 1 $f\in H_\alpha$, $\| J_n(f)-f\|_\alpha=O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)(0<\alpha\leqslant 1)$ 当且仅当 $f,\tilde{f}\in H_1$。其中 $\tilde{f}$ 是 f 的共轭函数。

定理 2 $f\in H_\alpha$, $\| J_n(f)-f\|_\alpha=o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)(0<\alpha\leqslant 1)$,则 f 为常函数。

本文中讨论了 Jackson 多项式在广义 Hölder 度量下的逼近问题,得到更为广泛的结果。

1 主要结论

定理 若 $\omega(t)$ 与 $\omega^*(t)$ 为两个满足条件(1)的连续模,且对于 $M>0$,有 $\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)<M, n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\to+\infty\ (n\to+\infty)$,令 $\omega_0(t)=c|t|$, $f\in H_\omega$,有

① $\| J_n(f)-f\|_{\omega^*}=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$,当且仅当 $f,\tilde{f}\in H_{\omega_0}$

② $\| J_n(f)-f\|_{\omega^*}=o\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$,则 f 为常函数。

2 引理

定理的证明需要用到文献[3]、[4]中的两个引理。

引理 1 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,$\| J_n(f)-f\|_C=O\left(\frac{1}{n}\right)$,当且仅当 $f,\tilde{f}\in \mathrm{Lip}1$。

引理 2 $T_n(x)$ 为任意的 n 次三角多项式,$f(x)$ 为任意函数,若 $T_n(x)-f(x)=O\left(\frac{1}{n^m}\right)$,则 $T_n^{(m+1)}(x)=O(n)$。

3 定理的证明

3.1 充分性

若 $f,\tilde{f}\in H_{\omega_0}$,则 $f,\tilde{f}\in \mathrm{Lip}1$,由引理 1 可知,$\| J_n(f)-f\|_C=O\left(\frac{1}{n}\right)$。

由于 $\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)<M$,故

$$\| J_n(f)-f\|_C=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\qquad(3)$$

记 $\omega_{\omega^*,h}=\frac{|J_n(f,x+h)-f(x+h)-J_n(f,x)+f(x)|}{\omega^*(h)}$,证明结论成立,只需证明

$$\sup_h \omega_{\omega^*,h}=O\left\{1\Big/\left[n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\qquad(4)$$

若 $h>\frac{1}{n}$,由连续模的单调性,有

$$\omega_{\omega^*,h}=\frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{\omega^*(h)}=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\qquad(5)$$

若 $0<h<\frac{1}{n}$,$\| J_n(f)-f\|_C=O\left(\frac{1}{n}\right)$,应用引理 2,有:$J''_n(f,x)=O(n)$。

由于 $J'_n(f,t_k)=0$,故

$$|J'_n(f,x)|=|J'_n(f,x)-J'_n(f,t_k)|=|J''_n(f,\xi)||x-t_k|$$
$$=O(n)\cdot\frac{2\pi}{n}=O(1)$$

其中,$\xi\in(x,t_k)$, $|x-t_k|\leqslant\frac{2\pi}{n}$。所以,$J_n(f,x)\in\mathrm{Lip}1$。此处 Lipschitz 常数与 n 无关。

而 $f\in H_{\omega_0}$,故 $J_n(f,x)-f(x)\in\mathrm{Lip}1$,

$$\Delta_{\omega^*,h}=\frac{O(h)}{\omega^*(h)}=\frac{O(h)}{\frac{nh}{2}\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\qquad(6)$$

其中用到连续模的性质:当 $0<\delta<\eta\leqslant|I|$(区间 I 的长度)时,$\frac{\omega(\eta)}{\eta}\leqslant\frac{2\omega(\delta)}{\delta}$。

结合式(5)、(6),充分性得证。

3.2 必要性

若

$$\| J_n(f)-f\|_{\omega^*}=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\qquad(7)$$

且

$$\sup_{h>0}\left|\frac{J_n(f,x+h)-J_n(f,x)}{\omega^*(h)}-\frac{f(x+h)-f(x)}{\omega^*(h)}\right|=O\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\qquad(8)$$

而 $\frac{J_n(f,x+h)-J_n(f,x)}{\omega^*(h)}$ 是一个与 x 无关的 $n-1$ 阶三角多项式,由式(8)及引理 2 得

$$\frac{J'_n(f,x+h)-J'_n(f,x)}{\omega^*(h)}=O\left(\frac{n}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\qquad(9)$$

由于 $J'_n(f,t_k)=0$,故存在 $\xi_k\in(t_k,t_{k+1})$,使得 $J''_n(f,\xi_k)=0$, $0<\xi_{k+1}-\xi_k<\frac{4\pi}{n}$, $(k=0,1,2,\cdots,n-2)$。

由式(9)可得

$$|J''_n(f,x)|=\left|\frac{J'_n(f,x)-J'_n(f,\xi_k)}{\omega^*(|x-\xi_k|)}\right|\omega^*(|x-\xi_k|)$$
$$=\left(\frac{n}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\omega^*\left(\frac{4\pi}{n}\right)=O(n)\qquad(10)$$

其中,$x\in(\xi_k,\xi_{k+1})$, $|x-\xi_k|<|\xi_{k+1}-\xi_k|<\frac{4\pi}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-2)$。

将式(10)的结论结合 $J'_n(f,t_k)=0$,可得

$$|J'_n(f,x)|=O(1)\qquad(11)$$

$$J_n(f,x)\in \mathrm{Lip}1 \tag{12}$$

对于任意的 $h>0$,由于 $(n\to+\infty)$ 时 $n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\to+\infty$,可以选择适当的 n,使 $n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)<h$。

利用式(3)及式(12),可以得到

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|J_n(f,x+h)-f(x+h)|+|J_n(f,x)-f(x)|+$$

$$|J_n(f,x+h)-J_n(f,x)|=O\left(\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right)+O\left(\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right)+O(h)$$

即 $|f(x+h)-f(x)|=O(h)$,故 $f\in\mathrm{Lip}1$。

再来证明 $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}1$。利用文献[1] 404 页(3.6)式的结论

$$[1-\cos n(x-t_0)]\tilde{J}'_n(f,x)=\sin n(x-t_0)J'_n(f,x) \tag{13}$$

由式(11)可知,存在 $M>0$,使得 $|J'_n(f,x)|\leqslant M$,结合式(13)有

$$|[1-\cos n(x-t_0)]\tilde{J}'_n(f,x)|\leqslant M \tag{14}$$

且 $\tilde{J}'_n(f,t_k)=0$,其中

$$t_k=\frac{2k+1}{n}\pi+t_0\quad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{15}$$

由式(14)、(15)及文献[2]中相应的结果,可得

$$|\tilde{J}'_n(f,x)|\leqslant\frac{1}{\sin(\pi/16)^2}M=O(1) \tag{16}$$

文献[5]中有对 x 一致成立的等式:$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{J}'_n(f,x)=\tilde{f}(x)$,所以,$\tilde{f}\in\mathrm{Lip}1$,必要性得证。

3.3　饱和性

由 $\|J_n(f)-f\|_{\omega^*}=o\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$ 可知

$$\|J_n(f)-f\|_C=o\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$$

利用引理 2 的方法,可得

$$\|\tilde{J}''_n f\|_C=o\left[\frac{n}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\quad\|\tilde{J}'_n f\|_C=o\left[\frac{1}{\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$$

用类似于 3.2 节证明必要性的方法,选择适当的 n,使得 $n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)<h$,则有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|J_n(f,x+h)-f(x+h)|+|J_n(f,x)-f(x)|+$$

$$|J_n(f,x+h)-J_n(f,x)|=o\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]+o\left[\frac{1}{n\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)}\right]+o(h)$$

故 f 为常函数,定理证毕。

参考文献(References)

[1] Sun X H. Degree of approximation of function in the generalized Hölder metric[J]. Pure and Applied Mathematics, 1996, 27(4): 407–417.

[2] 林阿婵. Jackson 多项式在 Hölder 度量下的逼近[J]. 杭州大学学报:自然科学版, 1991, 18(2): 145–150.
Lin Achan. Approximation of Jackson interpolation in Hölder metric[J]. Journal of Hangzhou University: Natural Science Edition, 1991, 18(2): 145–150.

[3] Szabados J. On the rate of convergence of a lacunary trigonometric interpolation process[J]. Acta Mathematica Hungarica, 1986, 47(3): 361–370.

[4] 蒋艳杰. 一类三角插值多项式在 Hölder 度量下的逼近[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 1993, 29(1):50–54.
Jiang Yanjie. Journal of Beijing Normal University: Natural Science Edition, 1993, 29(1): 50–54.

[5] Zygmund A. Trigonometric Series [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

(责任编辑　齐志红)

·学术动态·

中国科协与黑龙江省签订《落实全民科学素质行动计划纲要共建协议》

2013 年 7 月 1 日,中国科协常务副主席、书记处第一书记、党组书记申维辰在北京中国科技会堂会见黑龙江省副省长孙尧一行。

中国科协书记处书记徐延豪和黑龙江省副省长孙尧代表双方签署《落实全民科学素质行动计划纲要共建协议》。该协议确立了黑龙江省公民科学素质建设工作的目标。到 2015 年,黑龙江省将实现本辖区公民具备基本科学素质比例超过 5%。

详见中国科协网 http://www.cast.org.cn/n35081/n35096/n10225918/14844720.html。