

Winkler 地基上周期性 Euler 梁的弯曲振动带特性

张子明, 贺静, 张研, 蒋林华

河海大学力学与材料学院, 南京 210098

摘要 利用传递矩阵法并结合 Bloch 定理, 分析了周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上的弯曲振动带结构, 以及地基参数、结构参数对弯曲振动带隙的影响。结果表明, Winkler 地基的存在, 使得周期性 Euler 梁的弯曲振动带结构向高频方向提升, 第 1 弯曲振动带隙从 0 Hz 开始, 且随着地基反应模量的增加, 第 1 弯曲振动带隙宽度增大, 第 2 弯曲振动带隙宽度减小; 随着长度率的增加, 梁的第 1 弯曲振动带隙和第 2 弯曲振动带隙宽度均减小。与均质 Euler 梁对比, 周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上具有更好的隔振特性, 对低频弯曲振动有较好的阻隔效果。

关键词 Winkler 地基; 周期性 Euler 梁; 弯曲振动; 带隙; 传递矩阵法

中图分类号 O422.6

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2013.32.002

Characteristics of Flexural Vibration Band Gaps of Periodic Euler Beam on the Winkler Foundation

ZHANG Ziming, HE Jing, ZHANG Yan, JIANG Linhua

College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China

Abstract Periodic Euler beam has flexural vibration band gap characteristics. In order to study the flexural vibration band gap features of the periodic Euler beam on the Winkler foundation, the transfer matrix method and Bloch theorem are used to calculate the vibration band structure and analyze the impact of the parameters of foundation and structure on the band gaps. The results show that the existence of Winkler foundation makes vibration band gaps trend to higher frequency, and a new band gap that starts at 0 Hz appears in the case of having a foundation. Additional results demonstrate that with increasing the foundation reaction modulus, the range of the 1st band gap becomes wider and the range of the 2nd band gap becomes narrower. Along with the increase of the length ratio, the range of the 1st band gap and the 2nd band gap both become narrower. Compared with the homogeneous Euler beam, periodic Euler beam has better vibration isolation characteristics at low frequency.

Keywords Winkler foundation; periodic structure Euler beam; flexural vibration; band gaps; transfer matrix method

0 引言

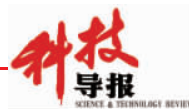
弹性地基梁结构广泛应用于土木建筑中, 其特点是考虑了地基的变形, 因而可使梁的变形减少、刚度提高^[1]。为了对这类结构的安全性进行有效的评估, 一般采用 Winkler 地基模型来对弹性地基梁结构进行静动力特征分析^[2,3]。该地基模型概念易懂, 计算方法简单, 只有 1 个参数, 即地基反应模量^[4-6]。

1993 年, Kushwaha 等^[7]提出了声子晶体的概念, 这类周期性复合材料具有弹性波带隙, 即存在能够禁止弹性波传播的频率范围。当周期结构中存在点缺陷和线缺陷时, 声波局限在点缺陷处或只沿线缺陷传播^[8]。由于声子晶体具有带隙、缺陷态等特性, 使得它在新型声学器件、减振降噪领域具有广阔的应用前景。温熙森等^[9]将声子晶体周期性的思想引入到

收稿日期: 2013-04-24; 修回日期: 2013-08-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(51278167, 50978085, 50808066)

作者简介: 张子明, 教授, 研究方向为工程材料力学特性与行为, 电子信箱: ziming@hhu.edu.cn; 张研(通信作者), 副教授, 研究方向为工程材料力学性能, 电子信箱: hhu.zhangyan@163.com



多种梁的弯曲振动中。马琰^[10]研究了 Winkler 地基上周期性钢筋混凝土 Timoshenko 梁的隔振性能。对于截面尺寸远小于其长度的细长梁,可以忽略剪切变形和转动惯量对弯曲振动的影响,可将其简化为 Euler-Bernoulli 梁,简称 Euler 梁^[11]。求解周期性 Euler 梁弯曲振动能带结构的方法有传递矩阵法^[12]、平面波展开法^[13,14]和时域有限差分法^[15]等。

本文通过推导 Winkler 地基上周期性 Euler 梁的弯曲振动的传递矩阵,研究 Winkler 地基上周期性 Euler 梁的弯曲振动能带结构及特征。

1 传递矩阵的推导

1.1 Winkler 地基上梁的弯曲自由振动方程

均质 Euler 梁支承于符合假定的弹性地基上(图 1),则弯曲自由振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + cy(x,t) = 0 \quad (1)$$

式中, $y(x,t)$ 为梁的竖向位移; E 和 I 分别为梁的弹性模量和截面惯性矩; ρ 为梁的质量密度; S 为梁的横截面面积,若为矩形梁, $S=bh$, 其中 b 和 h 分别为梁的宽度与高度; c 为地基系数,即使得地基产生单位沉降所需的荷载集度, $c=kb$, 其中 k 为地基反应模量。

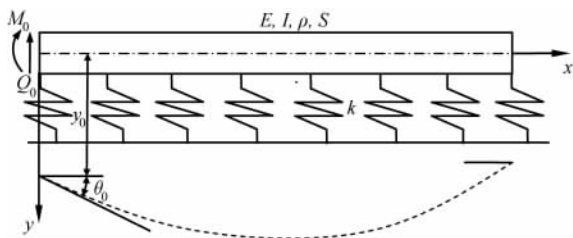


图 1 Winkler 地基上均质 Euler 梁的弯曲自由振动
Fig. 1 Homogeneous Euler beam flexural free vibration on Winkler foundation

1.2 Winkler 地基上均质 Euler 梁弯曲自由振动的通解

设位移 $y(x,t) = y(x)e^{i\omega t}$, e 为自然对数, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, t 为时间, ω 为振动圆频率, $y(x)$ 为位移振幅, 根据式(1), 位移振幅 $y(x)$ 满足微分方程

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \lambda^4 y(x) = 0 \quad (2)$$

式中, $\lambda^4 = (\rho S \omega^2 - c) / EI$ 。

(1) 当 $\rho S \omega^2 - c \geq 0$ 时, 式(2)的通解可写成

$$y(x) = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) + C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x) \quad (3)$$

式中, A, B, C, D 为待定常数。

根据式(3)可得到 $y(x)$ 的前 3 阶导数。Euler 梁中转角、弯矩和剪力的振幅与位移振幅的关系为

$$\begin{aligned} \theta(x) &= y'(x) \\ M(x) &= -EIy''(x) \\ Q(x) &= -EIy'''(x) \end{aligned}$$

式中 $y(x)$ 的前 3 阶导数可用转角、弯矩和剪力来表示。用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{11} &= c \cosh(\lambda x) & C_{12} &= \sinh(\lambda x) \\ C_{13} &= c \cos(\lambda x) & C_{14} &= \sin(\lambda x) \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_{2j} = C'_{1j} \quad C_{3j} = -EIC''_{1j} \quad C_{4j} = -EIC'''_{1j} \quad (j=2, 3, 4) \quad (6)$$

(2) 当 $\rho S \omega^2 - c < 0$ 时, 式(2)可以转化为

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 4\lambda^4 y(x) = 0 \quad (7)$$

式中, $\lambda^4 = (c - \rho S \omega^2) / 4EI$ 。式(7)的通解可写成

$$y(x) = e^{\lambda x} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)] \quad (8)$$

同理, 可表示为式(4)形式, 其中

$$\begin{aligned} C_{11} &= e^{\lambda x} \cos(\lambda x) & C_{12} &= e^{\lambda x} \sin(\lambda x) \\ C_{13} &= e^{-\lambda x} \cos(\lambda x) & C_{14} &= e^{-\lambda x} \sin(\lambda x) \end{aligned} \quad (9)$$

C_{2j}, C_{3j}, C_{4j} 同理可表示为式(6)形式。

1.3 求解 Winkler 地基上周期性 Euler 梁弯曲振动能带结构的传递矩阵法

声晶体的基本特征是具有周期性, 将声晶体的思想引入到梁结构设计中, 可以将梁设计成周期性结构。图 2 所示为 n 种不同材料以不同的截面尺寸沿 x 方向顺序排列构成的周期性 Euler 梁, 材料参数及几何参数均为周期性变化。图 2(a) 为 Winkler 地基上的周期性 Euler 梁, 图 2(b) 为材料 1 横截面, 图 2(c) 为材料 2 横截面, 图 2(d) 为材料 n 横截面。设梁的单个周期的长度为 a (也称晶格常数), 每个周期中 n 种材料的长度分别为 $l_1, l_2, \dots, l_j, \dots, l_n, a = \sum_{j=1}^n l_j$ 。

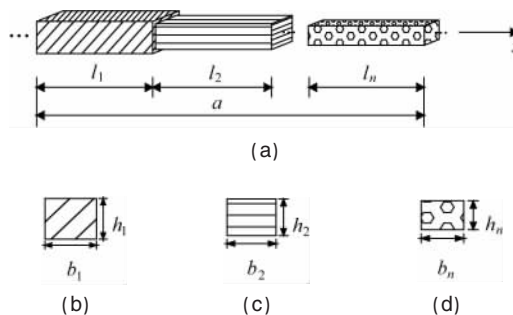


图 2 Winkler 地基上材料及几何参数均周期变化的 Euler 梁
Fig. 2 Euler beam on Winkler foundation with material parameters and geometric parameters both changing periodically

应用传递矩阵法求解 Winkler 地基上周期性 Euler 梁弯曲振动能带结构的方法如下。

由式(3)和式(8)可得到第 m 个原胞(原胞是 1 个晶格的最小周期性单元)中各段梁的位移表达式, 即

$$y_j^m(x^L) = A_j^m \cosh(\lambda_j x^L) + B_j^m \sinh(\lambda_j x^L) + C_j^m \cos(\lambda_j x^L) + D_j^m \sin(\lambda_j x^L) \quad (10)$$

$$y_j^m(x^L) = e^{\lambda_j x^L} [A_j^m \cos(\lambda_j x^L) + B_j^m \sin(\lambda_j x^L)] + e^{-\lambda_j x^L} [C_j^m \cos(\lambda_j x^L) + D_j^m \sin(\lambda_j x^L)] \quad (11)$$

式中, 下标 j 表示第 j 种材料梁内的相关变量; x^L 为第 j 种材料梁内坐标 x 对应的局部坐标, 即 $x^L \in [0, l_j]$ 。

在各段不同材料梁的连接处, 应用位移、转角、弯矩和剪力的连续性条件, 可得

$$K_j Y_j^m = H_{j+1} Y_{j+1}^m \quad (12)$$

或

$$Y_{j+1}^m = H_{j+1}^{-1} K_j Y_j^m \quad (13)$$

式中, K_j 和 H_j 为场传递矩阵, 且

$$K_j = H_{j+1}^{-1} C_j \quad Y_j^m = [A_j^m \ B_j^m \ C_j^m \ D_j^m]^T$$

为状态向量。

以此类推, 有

$$Y_n^m = H_n^{-1} K_{n-1} H_{n-1}^{-1} K_{n-2} \cdots H_3^{-1} K_2 H_2^{-1} K_1 Y_1^m \quad (14)$$

再由第 m 个原胞与第 $m+1$ 个原胞间的连续性条件, 即

$$K_n Y_n^m = H_1 Y_1^{m+1} \quad (15)$$

得

$$Y_1^{m+1} = T Y_1^m \quad (16)$$

其中, $T = H_1^{-1} K_n H_n^{-1} K_{n-1} H_{n-1}^{-1} K_{n-2} \cdots H_3^{-1} K_2 H_2^{-1} K_1$ 即为传递矩阵。

由于 x 方向的周期性, 利用 Bloch 定理^[6]可以得到

$$Y_1^{m+1} = e^{iq} Y_1^m \quad (17)$$

式中, q 为一维 Bloch 波矢。

将式(17)代入式(16)中可得到矩阵特征值问题

$$|T - e^{iq} I| = 0 \quad (18)$$

式中, I 为 4×4 单位阵。

对于给定圆频率 ω , 利用式(18)可以求出波矢 q , 进而得到 Winkler 地基上周期性 Euler 梁的能带结构。

2 弯曲振动能带结构的计算与分析

2.1 理论计算

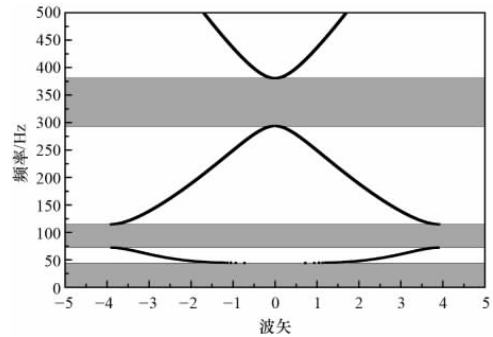
采用上述推导的传递矩阵, 计算周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上的弯曲振动能带结构。选取分别由铅(材料 A)和钢(材料 B)构成的周期性 Euler 梁, 材料属性见表 1。

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

材料	密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	弹性模量/ 10^9Pa
铅	11600	4.08
钢	7780	21.06

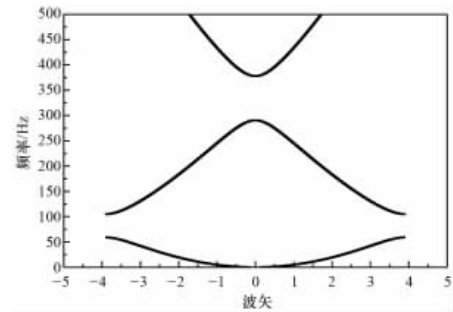
铅和钢的结构特征为长度 $l_A = l_B = 0.4 \text{m}$, 则晶格常数 $a = 0.8 \text{m}$, 截面宽度 $b_A = b_B = 0.04 \text{m}$, 截面高度 $h_A = h_B = 0.04 \text{m}$ 。地基反应模量取 $k = 30.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ 。该 Euler 梁的弯曲振动能带结构计算结果如图 3(a) 所示, 在 $0 \sim 500 \text{Hz}$ 范围内有 3 个带隙(即由下到上隔开横坐标轴以及曲线的空白区), 频率范围分别

为 $0 \sim 44.3 \text{Hz}$, $72.2 \sim 114.7 \text{Hz}$ 和 $293.5 \sim 380.7 \text{Hz}$ 。对照组为同样的 Euler 梁, 在无地基时其能带结构计算结果如图 3(b) 所示, 在 $0 \sim 500 \text{Hz}$ 范围内有 2 个带隙, 频率范围分别为 $59.0 \sim 104.8 \text{Hz}$ 和 $290.3 \sim 378.0 \text{Hz}$ 。计算结果说明, 地基的存在, 使得周期性 Euler 梁的弯曲振动能带结构向高频方向不均匀地提升, 新的第 1 带隙产生, 且起始频率为 0Hz 。



(a) 有地基

(a) There are foundations



(b) 无地基

(b) No foundation

图 3 铅/钢周期性 Euler 梁的能带结构

Fig. 3 Band gap structure of lead/steel periodic Euler beam

2.2 仿真验证

为了验证理论计算的正确性, 采用有限元分析软件 ABAQUS, 对上述 Winkler 地基上周期性 Euler 梁的振动传输特性进行仿真, 根据传输特性曲线来判定弹性波带隙的存在情况。仿真结果如图 4 所示, 在 $0 \sim 500 \text{Hz}$ 范围内有 3 个带隙, 频率范围分别为 $0 \sim 45.2 \text{Hz}$, $74.5 \sim 124.3 \text{Hz}$ 和 $285.4 \sim 393.0 \text{Hz}$ 。可以看出, 仿真结果与理论计算结果基本吻合。

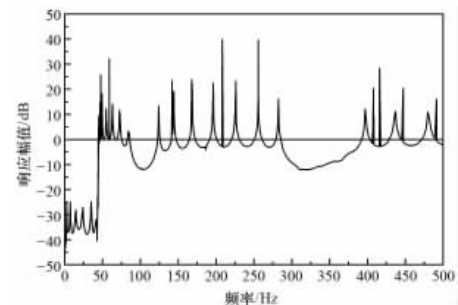


图 4 Winkler 地基上周期性 Euler 梁的振动传输特性曲线

Fig. 4 Characteristic curve of vibration transmission of the periodic Euler beam on Winkler foundation

2.3 地基及结构参数对弯曲振动带隙的影响

Winkler 地基上周期性 Euler 梁的地基参数及结构参数都是直接面向结构设计的。为了获取满足需求的带隙,需要合理选择参数,而前提是了解这些参数对带隙的影响规律。

考虑地基反应模量 k 变化对周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上的弯曲振动带隙结构的影响(图 5),随着地基反应模量增加,周期梁的第 1 弯曲振动带隙宽度增大,第 2 带隙起始频率和结束频率均有不同程度的升高,第 2 带隙宽度减小。

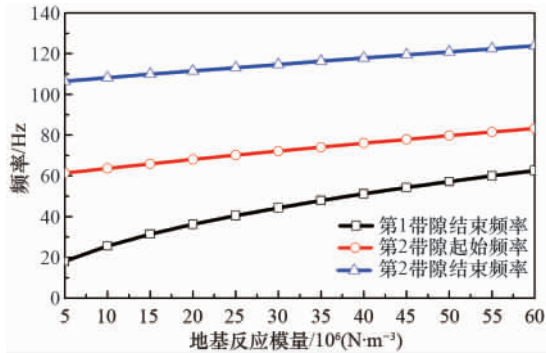


图 5 地基反应模量对弯曲振动带隙的影响

Fig. 5 Effects of the foundation reaction modulus on flexural vibration band gaps

图 6 给出了材料对梁弯曲振动带隙的影响。均质铅梁在 0~700Hz 范围内有 1 个带隙,频率范围为 0~40.5Hz;均质钢梁在 0~700Hz 范围内有 1 个带隙,频率范围为 0~49.5Hz。可以看出,均质梁只有 1 个弯曲振动带隙;周期梁第 1 振动带隙的结束频率,即临界频率,介于两均质梁的临界频率之间。周期梁在临界频率之外存在多个带隙,这种性质对于大于临界频率的振动具有较好的阻隔效果。

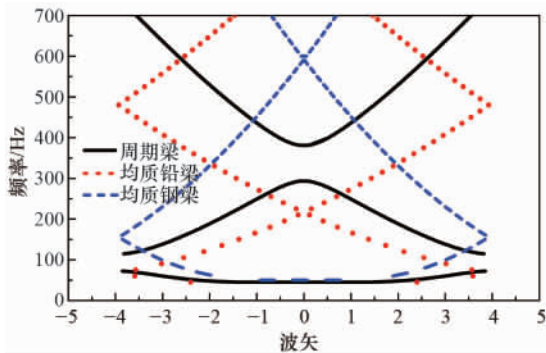


图 6 周期梁与均质梁的能带结构对比

Fig. 6 Comparison on band gaps structure of periodic beam and homogeneous beam

图 7 给出了长度率变化对周期梁弯曲振动带隙的影响,长度率定义为 $\mu=l/a$ 。可以看出,随着长度率增加,周期梁的第 1 带隙宽度减小,而第 2 带隙起始频率和结束频率均有不同程度的降低,第 2 带隙宽度减小。

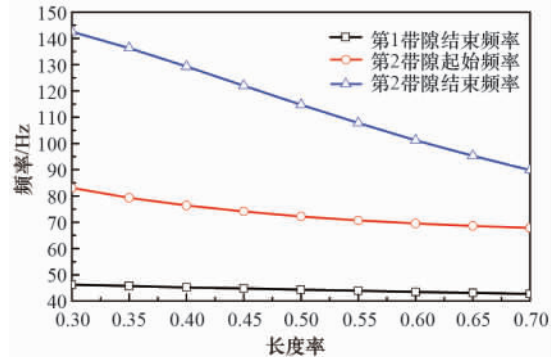


图 7 梁的长度率对弯曲振动带隙的影响

Fig. 7 Effect of the length ratio on flexural vibration band gaps

3 结论

推导出适用于计算周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上弯曲振动带隙结构的传递矩阵,计算结果与仿真结果基本吻合。计算分析表明,地基约束的存在,提高了梁的固有频率,使得 Winkler 地基上的周期性 Euler 梁不同于一般声子晶体材料,弯曲振动带隙向高频方向提升,其第 1 弯曲振动带隙从 0Hz 开始;地基参数、结构参数均对梁的弯曲振动带隙产生影响;对比均质 Euler 梁,周期性 Euler 梁在 Winkler 地基上存在多个隔振区间,可通过合理调整周期结构特征设计出满足不同需求的弯曲振动带隙。

梁类结构是噪声及振动控制领域研究的主要对象之一,周期性 Euler 梁中弯曲振动带隙的存在为梁类结构的减振提供了一种新的思路,拓展了周期性梁在减振技术领域应用的可行性探索。

参考文献 (References)

- [1] 塞尔瓦杜雷 A P S. 土与基础相互作用的弹性分析[M]. 范文田,译. 北京:中国铁道出版社,1984.
Selvadurai A P S. Elastic analysis of soil-foundation interaction[M]. Fan Wentian, Interpret. Beijing: China Railway Press, 1984.
- [2] 王国体,施晋. 抛物线荷载下 winkler 弹性地基梁的计算[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2006, 29(7): 905-907.
Wang Guoti, Shi Jin. Journal of Hefei University of Tecnology: Natural science, 2006, 29(7): 905-907.
- [3] Wang Y H, Tham L G, Cheung Y K. Beams and plates on elastic foundations-a review[J]. Progress in Structural Engineering and Materials, 2005, 7(4): 174-182.
- [4] Coskun I, Engin H. Non-linear vibrations of a beam on an elastic foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 223(3): 335-354.
- [5] 黄义,何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京:科学出版社,2005.
Huang Yi, He Fangshe. Beams plates and shells on elastic foundation[M]. Beijing Science Press, 2005.
- [6] 莫海鸿,杨小平. 基础工程[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2008.
Mo Haihong, Yang Xiaoping. Foundation engineering[M]. Beijing: China Building Industry Press, 2008.

[7] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites [J]. Physical Review Letters, 1993, 71 (13): 2022-2025.

[8] Jensen J S, Sigmund O, Thomsen J J, et al. Design of multi-phase structures with optimized vibrational and wave-transmitting properties[C]. 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics, Aalborg, Denmark, October 18-19, 2002.

[9] 温熙森, 温激鸿, 郁殿龙, 等. 声子晶体[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
Wen Xisen, Wen Jihong, Yu Dianlong. Phononic Crystals[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009.

[10] 马琰. 弹性地基上周期梁板的隔振性能研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2011.
Ma Yan. Study on vibration isolation performance of periodic beam and plate on elastic foundation[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2011.

[11] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
Liu Yanzhu, Chen Wenliang, Chen Liqun. Vibration mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.

[12] 郁殿龙, 温激鸿, 陈圣兵, 等. 轴向载荷周期结构梁的弯曲振动带隙特性[J]. 振动与冲击, 2010, 29(3): 85-88.
Yu Dianlong, Wen Jihong, Chen Shengbing, et al. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(3): 85-88.

[13] 温激鸿, 郁殿龙, 王刚, 等. 周期结构细直梁弯曲振动中的振动带隙[J]. 机械工程学报, 2005, 41(4): 1-6.
Wen Jihong, Yu Dianlong, Wang Gang, et al. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(4): 1-6.

[14] Wen J H, Wang G, Yu D L, et al. Theoretical and experimental investigation of flexural wave propagation in straight beams with periodic structures: Application to a vibration isolation structure[J]. Journal of Applied Physics, 2005, 97(11): 1-4.

[15] Tanaka Y, Tomoyasu Y, Tamur S I A. Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch[J]. Physical Review B, 2002, 62(6): 7387-7392.

(责任编辑 韩黎明)

· 学术动态 ·



第 16 届中国科协年会学术交流分会场评审公示

2013年10月28日,第16届中国科协年会学术交流分会场设置方案公示。

为做好第16届中国科协年会学术交流分会场组织工作,中国科协学会学术部于2013年8月印发了《关于申办第十六届中国科协年会分会场及推荐大会特邀报告人选的通知》,组织全国学会和有关单位申报年会分会场。截止9月30日,共收到45个全国学会和省级科协提交的分会场申请48项。经组织有关专家对候选分会场进行评审,共评出分会场18个:

- 中国南方天文集群研究和技术发展论坛(中国天文学会承办)
 - 东南亚生物多样性保护和利用与民生发展论坛(国际)(中国植物学会承办)
 - 环境污染及职业暴露与人类癌症学术研讨会(中国细胞生物学学会承办)
 - 民族文化保护与生态文明建设学术研讨会(中国生态学会承办)
 - 生态文明建设与绿色发展研讨会(中国环境科学学会承办)
 - 技术信息传播与标准化国际研讨会(国际)(中国标准化协会承办)
 - 绿色设计与制造信息技术创新论坛(中国图学学会承办)
 - 绿色造船与安全航运(中国造船工程学会承办)
 - 民爆器材技术发展与安全(中国兵工学会承办)
 - 全国重有色金属冶金技术交流会(中国有色金属学会承办)
 - 森林培育技术创新与特色资源产业发展学术研讨会(中国林学会承办)
 - 茶学青年科学家论坛(中国茶叶学会承办)
 - 感染、免疫和疫苗(中国免疫学会承办)
 - 开放交流、创新模式——加速西部医疗卫生事业发展高峰论坛(中华预防医学会承办)
 - 基于实证的创新政策论坛(国际)(中国科学学与科技政策研究会承办)
 - 以科学发展的新视野,努力创新科技教育内容(中国自然科学博物馆协会承办)
 - 两岸四地科技论坛——创新投资与产业升级(中国产学研合作促进会承办)
 - 中国精品咖啡庄园建设标准与认证学术论坛(国际)(云南省科协承办)
- 详见中国科协网 <http://www.cast.org.cn/n35081/n35488/15141257.html>。