模糊分布参数条件下结构系统的近似效应分析 1)

王 攀 2)　吕震宙 3)　唐樟春

(西北工业大学航空学院, 西安 710072)

摘要 针对结构系统中随机变量的分布参数具有不确定性的问题, 采用模糊数来描述分布参数的主观不确定性, 并且利用隶属度来衡量主观不确定性的大小. 在不同隶属度水平下, 分别建立了输出响应和失效概率的主效应和总效应模型, 研究了两种模型和隶属度水平之间的关系, 并且给出分布参数不确定性的平均效应指标. 针对所提指标计算量大的问题, 通过对输出响应的各阶矩进行一阶泰勒展开, 建立了两种指标的计算方法. 算例结果验证了所提指标的合理性和所提方法的高效性.

关键词 主效应, 总效应, 分布参数, 输出响应, 失效概率

中图分类号: TB114.3　**文献标识码**: A　**文章编号**: 0459-1879(2012)03-0546-11

引 言

目前结构系统的不确定性分析模型中, 大部分都认为只存在基本随机变量的不确定性, 且随机变量的分布参数是确定值, 但工程实际中的许多随机变量虽然可以根据一定的信息确定其分布形式, 但由于信息的不完整和认识的主观性, 不能准确确定其分布参数 [1]. 随机变量的不确定性 (客观不确定性) 是描述某物理现象固有的随机性, 分布参数的不确定性 (主观不确定性) 是由于缺乏对所研究对象的了解造成的不确定性, 人们可以通过搜集更多的数据和改进模型来减小分布参数的不确定性, 所以建立分布参数具有不确定性时的分析模型具有重要意义. 本文将着重研究分布参数具有不确定性时的灵敏度分析模型.

灵敏度分析可以用来确定模型的输入不确定性对输出不确定性的影响程度, 通过灵敏度分析可以确定对结构系统输出性能影响较大的输入变量并对其加以控制. 一般来讲, 灵敏度分析可以分为局部灵敏度分析和全局灵敏度分析 (重要性测度分析). 目前, 灵敏度分析的发展已较为成熟, 并且许多学者提出了各自的指标和求解方法, 如 Helton 等 [2] 和 Saltelli 等 [3] 分别提出的非参数方法 (nonparametric technique), Sobol [4], Iman 等 [5] 和 Saltelli 等 [3] 分别提出的各自基于方差的重要性测度指标和求解方法, Chun 等 [6]、Liu 等 [7] 和 Borgonovo 等 [8] 各自提出的相应的矩独立重要性测度指标 (moment independent importance measure). 本文基于 Sobol 的重要性测度指标, 研究在分布参数具有不确定性时对模型输出响应和失效概率的影响, 建立了输出响应和失效概率基于方差的主效应和总效应指标. 由于模糊理论可以较好地描述和解释一些不确定性现象 [9], 并且隶属度水平可以用来衡量对分布参数主观不确定性的认识程度, 所以本文将不确定分布参数看作是模糊数来建立结构系统的效应分析模型, 并且研究在不同隶属度水平下分布参数不确定性对模型输出响应和失效概率的影响.

文中通过对功能函数的前四阶矩进行一阶泰勒展开, 将各阶矩分解为只包含客观不确定性和包含各阶矩偏导数的两部分, 建立了输出响应和失效概率的主效应和总效应分析方法. 文中的算例表明所提方法能够以较小的计算成本得到分布参数不确定性对模型输出响应和失效概率的影响.

2011–12–06 收到第 1 稿, 2012–01–12 收到修改稿.

1) 航空基金 (2011ZA53015), 国家自然科学基金 (51175425), 博士学科点专项科研基金 (20116102110003) 和航天支撑基金 (2011XW010001) 资助项目.

2) E-mail: panwang@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

1 模糊分布参数条件下的主效应和总效应指标

1.1 分布参数的模糊性

一般情况下, 由于对随机变量分布参数的认识不足和信息缺失, 不能明确给出分布参数的取值, 只能凭现有信息给出分布参数的大致区间和取值可能性, 此时可将分布参数 θ 处理为一个模糊数 $\tilde{\theta}$ [10], 并以隶属函数 $\mu_{\tilde{\theta}}(\theta)$ 描述分布参数取某一值 θ 时属于模糊集 $\tilde{\theta}$ 的程度. 不失一般性, 可选择 L-R 型模糊数 [11], 即假定模糊数 $\tilde{\theta}$ 可表示为三元组 $\tilde{\theta}(t,\alpha,\beta)$, 对应隶属度为 1 时的分布参数的取值, 即模糊数的核, α 和 β 称为模糊数的左右分布, 采用工程中常用的正态型参照函数, 模糊数 $\tilde{\theta}$ 的隶属函数可表示为

$$\mu_{\tilde{\theta}}(\theta)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{(t-\theta)^2}{\alpha^2}\right], & \alpha>0,\ \theta\le t\\ \exp\left[-\dfrac{(\theta-t)^2}{\beta^2}\right], & \beta>0,\ \theta>t\end{cases}\tag{1}$$

依据模糊数学中的水平截集的概念, 可将模糊数 $\tilde{\theta}$ 转换为与一系列 λ 水平截集下对应的区间 $[\underline{\theta}_\lambda,\bar{\theta}_\lambda]$ (λ 为阈值且 $\lambda\in[0,1]$). 对于 L-R 型模糊数, 记 λ 水平截集下的分布参数为 θ_λ, 则 θ_λ 对应的区间 $\Theta_\lambda=[\underline{\theta}_\lambda,\bar{\theta}_\lambda]$ 在式 (1) 所示的隶属函数下为 $[t-\alpha\sqrt{-\ln\lambda},\ t+\beta\sqrt{-\ln\lambda}]$.

在隶属度水平 λ 下, 按区间 Θ_λ 上无频率信息的情况, 可假设分布参数 θ_λ 在 Θ_λ 上服从均匀分布 [11], 即 $\theta_\lambda\sim U(\underline{\theta}_\lambda,\bar{\theta}_\lambda)$. 由图 1 可以看出, 隶属度水平 λ 越小, 对应分布参数 θ 的区间 $[\underline{\theta}_\lambda,\bar{\theta}_\lambda]$ 宽度越大, 分布参数的不确定性就越大, 因此隶属度水平 λ 可以用来衡量对分布参数不确定性的认识程度. 当 $\lambda=1$ 时, 表示对分布参数的认识最强, 此时分布参数不再就具有不确定性, 影响结构系统输出性能的只有输入变量的客观不确定性. 当 $\lambda=0$ 时, 表示对分布参数没有任何认识, 这时分布参数在可在实数域内取值. 为了研究不同认识水平下分布参数不确定性对结构系统输出响应和失效概率不确定性影响, 可以建立输出响应和失效概率基于方差的主效应和总效应模型.

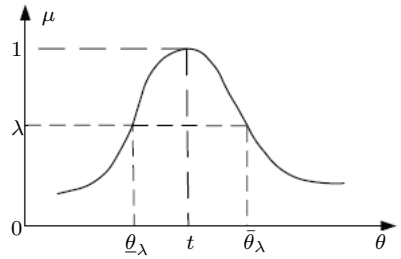

图 1　正态型的 L-R 模糊数水平截集示意图

Fig. 1 Depict of the level set for normal type L-R fuzzy number

1.2 输出响应的主效应和总效应指标

在不同的隶属度水平 $\lambda_l\,(l=1,2,\cdots,N)$ 下, 输出响应基于方差的主效应可以定义为单个参数 $\theta_i(\lambda_l)\,(i=1,2,\cdots,p)$ 作用下输出响应条件期望 $E[Y(\boldsymbol{x})|\theta_i(\lambda_l)]$ 的方差

$$M_{\theta_i}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(E[Y(\boldsymbol{x})|\theta_i(\lambda_l)])\tag{2}$$

输出响应基于方差的总效应可以定义输出响应的总方差 $\mathrm{Var}(Y(\boldsymbol{x}))$ 减去除 θ_i 外的多个参数 $\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)$ 作用下输出响应条件期望 $E[Y(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)]$ 的方差

$$T_{\theta_i}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(Y(\boldsymbol{x}))-\mathrm{Var}(E[Y(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)])\tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为输入变量, $\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)=(\theta_1,\cdots,\theta_{i-1},\theta_i^*,\theta_{i+1},\cdots\theta_p)$.

两种输出响应基于方差的效应指标中, 分布参数 θ_i 的主效应 M_{θ_i} 表征了在参数 θ_i 单独作用时其不确定性对输出响应的变异性的影响程度, 而参数 θ_i 的总效应 T_{θ_i} 则表征了 θ_i 对输出响应的总影响程度, 包括 θ_i 与其他参数之间的交互作用.

当隶属度水平 λ 的在其取值区间内变化时, 为了衡量分布参数不确定性对输出响应的影响, 可以定义输出响应的平均主效应和平均总效应

$$\eta_{\theta_i}^M=E[M_{\theta_i}(\lambda_l)]\tag{4}$$

$$\eta_{\theta_i}^T=E[T_{\theta_i}(\lambda_l)]\tag{5}$$

随着分布参数不确定性的减小, 隶属度水平 λ 趋近于 1, 输出响应的主效应随之减小, 而总效应随之增加, 并且当 $\lambda=1$ 时, $\eta_{\theta_i}^M=0$, $\eta_{\theta_i}^T=\mathrm{Var}(Y(\boldsymbol{x}))$, 这是因为 $\lambda=1$ 时分布参数不再具有不确定性, 取为定值, 分布参数作用下的输出响应条件期望的变异性为 0, 但输出响应的变异性依然存在. 可以看出, 在不同隶属度水平 λ_l 下, 输出响应的主效应 M_{θ_i} 和总效应 T_{θ_i} 都需要两层抽样进行计算. 考虑隶属度水平 λ_l 在区间 $[0,1]$ 内变化时分布参数不确定性对输出响应的影响, 平均效应指标 $\eta_{\theta_i}^M$ 和 $\eta_{\theta_i}^T$ 都需要三重抽样.

1.3 失效概率的主效应和总效应指标

类似地, 失效概率基于方差的主效应可以定义为单个参数$\theta_i(\lambda_l)$作用下失效概率条件期望$E[P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l))|\theta_i(\lambda_l)]$的方差

$$M_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(E[P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l))|\theta_i(\lambda_l)]) \tag{6}$$

失效概率基于方差的总效应可以定义为失效概率的总方差$\mathrm{Var}(P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l)))$减去除$\theta_i$外多个参数$\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)$作用下失效概率条件期望$E[P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l))|\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)]$的方差

$$T_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l)))-\mathrm{Var}(E[P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l))|\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)]) \tag{7}$$

同样, 当隶属度水平λ的在其取值区间内变化时, 为了衡量分布参数不确定性对失效概率的影响, 可以定义失效概率的平均主效应和平均总效应

$$\delta_{\theta_i}^{M}=E[M_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)] \tag{8}$$

$$\delta_{\theta_i}^{T}=E[T_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)] \tag{9}$$

随着分布参数不确定性的减小, 失效概率的主效应和总效应都随之减小, 并且当$\lambda=1$时, $\delta_{\theta_i}^{M}=\delta_{\theta_i}^{T}=0$, 这是因为$\lambda=1$时分布参数作用下的失效概率的变异性为0.

1.4 失效概率的主效应和总效应指标的简化

可以看到, 式(6)和式(7)中定义的失效概率主效应和总效应的计算需要三重抽样, 难以实现. Hofer在文献[12]中提出一种输出响应基于方差的重要性测度求解方法, 该方法通过对重要性测度表达式进行简化, 将三重抽样化为两重抽样, 这使得重要性测度具有更强的适用性. 类似地, 利用该方法可以对文中所提指标作如下简化. 首先将失效概率表示为条件期望的形式, 为了表述方便, 将$\boldsymbol{\theta}(\lambda_l)$和$\theta_i(\lambda_l)$分别简记为$\boldsymbol{\theta}$和$\theta_i$.

$$P_f(\boldsymbol{\theta})=E[I_F(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta}] \tag{10}$$

其中, F为失效域, $I_F(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in F\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin F\end{cases}$ 为失效概率指示函数.

式(6)和式(7)中的失效概率主效应和总效应指标可以改写为

$$M_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(E[E[I_F(x)|\boldsymbol{\theta}]|\theta_i]) \tag{11}$$

$$T_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(E[I_F(x)|\boldsymbol{\theta}])-\mathrm{Var}(E[E[I_F(x)|\boldsymbol{\theta}]|\boldsymbol{\theta}_{-i}]) \tag{12}$$

利用条件期望的性质

$$E[E[I_F(x)|\boldsymbol{\theta}]|\theta_i]=E[I_F(\boldsymbol{x})|\theta_i]=P_f(\theta_i) \tag{13}$$

可将式(6)和式(7)的主效应和总效应简化为

$$M_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(P_f(\theta_i(\lambda_l))) \tag{14}$$

$$T_{\theta_i}^{P_f}(\lambda_l)=\mathrm{Var}(P_f(\boldsymbol{\theta}(\lambda_l)))-\mathrm{Var}(P_f(\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l))) \tag{15}$$

可以看出, 在不同隶属度水平λ_l下, 简化后的失效概率的主效应$M_{\theta_i}^{P_f}$和总效应$T_{\theta_i}^{P_f}$也需要两层抽样进行计算. 考虑隶属度水平λ_l在区间[0,1]内变化时分布参数不确定性对失效概率的影响, 平均效应指标$\delta_{\theta_i}^{M}$和$\delta_{\theta_i}^{T}$都需要三重抽样.

2 主效应和总效应指标的求解方法

2.1 输出响应主效应和总效应指标的求解方法

对于输出响应的主效应和总效应指标的求解, 式(2)和式(3)表明其关键是求解输出响应的条件期望. 为了简化计算, 本文将采用泰勒展开来解析表示输出响应的条件期望.

对于单个参数作用下的输出响应期望$E[Y(\boldsymbol{x})|\theta_i(\lambda_l)]$(简记为$E[Y|\theta_i]$)和多个参数作用下的输出响应期望$E[Y(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta}_{-i}(\lambda_l)]$(简记为$E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}]$), 当分布参数相互独立时, 可以将其在参数的名义值处进行一元和多元泰勒展开, 并取其一阶项. 名义值的选取决定着泰勒展开的意义, 为了将展开式中只包含客观不确定性的部分分离出来, 文中选取隶属度水平为1时的参数值θ_i^*或$\boldsymbol{\theta}_{-i}^*$为名义值(即图1中$t$点)

$$E[Y|\theta_i]\approx E[Y|\theta_i^*]+(\theta_i-\theta_i^*)\frac{\partial E[Y|\theta_i^*]}{\partial\theta_i} \tag{16}$$

$$E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}]\approx E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}^*]+\sum_{r=1,r\neq i}^{p}(\theta_r-\theta_r^*)\frac{\partial E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}^*]}{\partial\theta_r} \tag{17}$$

展开式(16)和式(17)右端的第1项$E[Y|\theta_i^*]$, $E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}^*]$只包含客观不确定性, 可以利用条件概率

密度函数 $f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{x}|\theta_i^*)$ 对客观变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 进行抽样计算. 一元泰勒展开式 (16) 右端第 2 项包含输出响应条件期望偏导数 $\dfrac{\partial E[Y|\theta_i^*]}{\partial\theta_i}$, 并且在其前乘有系数 $(\theta_i-\theta_i^*)$, 该系数反映了分布参数 θ_i 在其取值范围内变化时偏离名义值 θ_i^* 的程度, 这说明该项能够描述分布参数在整个参数空间内变化时对功能函数期望 $E[Y|\theta_i]$ 的影响. 类似地, 多元泰勒展开式 (17) 的右端第 2 项通过单个参数 θ_r 对输出响应影响的累加来描述多个参数 $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ 对输出响应的总影响程度.

为了计算一阶泰勒展开式 (16) 和式 (17) 中的偏导数, 可以将功能函数的期望表示成积分的形式. 由于式 (16) 和式 (17) 定义相同, 此处只对式 (16) 进行分析.

$$E[Y|\theta_i^*]=\int_{-\infty}^{+\infty}Y\cdot f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{x}|\theta_i^*)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{18}$$

输出响应条件期望的偏导数可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[Y|\theta_i^*]}{\partial\theta_i}&=\frac{\partial\int_{-\infty}^{+\infty}Y\cdot f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{x}|\theta_i^*)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\partial\theta_i}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}Y\cdot\frac{f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{x}|\theta_i^*)}{\partial\theta_i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) 中偏导数的计算方法发展已经较为成熟, 许多方法可以用于计算该偏导数, 例如, Monte Carlo 法 [13]、点估计方法 [14]和重要抽样法 [15]等, 所以一阶泰勒展开式 (16) 和式 (17) 可以很容易进行计算.

在单个参数 θ_i 和多个参数 $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ 作用下, 分别对一阶泰勒展开式 (16) 和 (17) 两边取方差, 可以得到

$$\mathrm{Var}(E[Y|\theta_i])\approx\left(\frac{\partial E[Y|\theta_i^*]}{\partial\theta_i}\right)^2\mathrm{Var}(\theta_i) \tag{20}$$

$$\mathrm{Var}(E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}])\approx\sum_{r=1,r\neq i}^{p}\left(\frac{\partial E[Y|\boldsymbol{\theta}_{-i}^*]}{\partial\theta_r}\right)^2\mathrm{Var}(\theta_r) \tag{21}$$

式 (20) 和式 (21) 可以表征结构系统输入参数和输出响应不确定性之间的关系. 在不同隶属度水平 λ_l 下, 输出响应基于方差的主效应 M_{θ_i} 和总效应 T_{θ_i} 可以通过式 (20) 和式 (21)得到, 两者对应的平均效应 $\eta_{\theta_i}^M$ 和 $\eta_{\theta_i}^T$ 也可以很容易求解.

2.2 失效概率主效应和总效应指标的求解方法

同样, 对于失效概率的主效应和总效应的计算, 式 (14) 和式 (15) 表明其关键是求解条件失效概率, 而条件失效概率的求解也需要两重抽样计算. 显然, 利用抽样方法计算失效概率的, 计算成本较大. 由于泰勒展开可以很方便地求解输出响应的各阶矩并且考虑四阶矩方法在求解失效概率时的高效性, 本文将结合两种方法来求解条件失效概率.

根据四阶矩方法分析理论, 只要得到可靠度指标, 相应的失效概率则可由 $P_f=\Phi(-\beta)$ 求得. 利用四阶矩方法来描述可靠度指标 [16], 可表示为

$$\beta_{4M}=\frac{3(\alpha_{4g}-1)\beta_{2M}+\alpha_{3g}(\beta_{2M}^2-1)}{\sqrt{(5\alpha_{3g}^2-9\alpha_{4g}+9)(1-\alpha_{4g})}} \tag{22}$$

其中 $\alpha_{kg}(k=1,2,3,4)$ 为功能函数的前 k 阶矩, β_{2M} 为二阶矩方法得到的可靠度指标, 可以表示为 $\beta_{2M}=\alpha_{1g}/\alpha_{2g}$.

为了计算四阶矩表示的可靠度指标, 类似于式 (16) 和式 (17), 将功能函数的 k 阶矩 $\alpha_{kg}(k=2,3,4)$ 分别在分布参数的名义值 θ_i^* 或 $\boldsymbol{\theta}_{-i}^*$ 处进行一阶泰勒展开. 为了计算各阶矩的偏导数, 将其表示为积分的形式

$$\alpha_{2g}=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^2f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\right]^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

$$\alpha_{3g}=\frac{1}{\alpha_{2g}^3}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^3f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{24}$$

$$\alpha_{4g}=\frac{1}{\alpha_{2g}^4}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^4f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{25}$$

则偏导数可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_{2g}}{\partial\theta_i}=&\frac{1}{2}\alpha_{2g}^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}-2(Y-\alpha_{1g})\frac{\partial\alpha_{1g}}{\partial\theta_i}f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})+\\&(Y-\alpha_{1g})^2\frac{\partial f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_{3g}}{\partial\theta_i}=&\frac{1}{\alpha_{2g}^3}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^3\frac{\partial f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}-3(Y-\\&\alpha_{1g})^2\frac{\partial\alpha_{1g}}{\partial\theta_i}f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{3}{\alpha_{2g}^4}\cdot\\&\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^3f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\frac{\partial\alpha_{2g}}{\partial\theta_i}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\alpha_{4g}}{\partial\theta_i}=\frac{1}{\alpha_{2g}^4}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^4\frac{\partial f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}-4(Y-\alpha_{1g})^3\frac{\partial\alpha_{1g}}{\partial\theta_i}f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{4}{\alpha_{2g}^5}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(Y-\alpha_{1g})^4f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\frac{\partial\alpha_{2g}}{\partial\theta_i}\tag{28}$$

得到各阶矩 $\boldsymbol{\alpha}_g=(\alpha_{1g},\alpha_{2g},\alpha_{3g},\alpha_{4g})$ 的偏导数后, 可以对失效概率的主效应和总效应进行计算. 计算主效应 $M_{\theta_i}^{P_f}$ 的步骤如下:

(1) 在不同隶属度水平 λ_l 下, 将分布参数的条件样本 $\boldsymbol{\theta}_{ij}=(\theta_1^*,\cdots,\theta_{(i-1)}^*,\theta_{ij},\theta_{(i+1)}^*,\cdots,\theta_p^*)\,(j=1,2,\cdots,m)$ 代入各阶矩的一元泰勒展开式, 得到各阶矩的条件样本 $(\boldsymbol{\alpha}_g^{i1},\boldsymbol{\alpha}_g^{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_g^{im})\,(i=1,2,\cdots,p)$.

(2) 利用式 (22) 计算得到 θ_i 单独作用下的条件可靠度指标的样本 $(\beta_{4M}^{i1},\beta_{4M}^{i2},\cdots,\beta_{4M}^{im})$, 进而得到条件失效概率.

(3) 对条件失效概率进行方差分析, 得到 θ_i 单独作用下的失效概率的方差 $\mathrm{Var}(P_f|\theta_i)$, 即主效应 $M_{\theta_i}^{P_f}$.

计算总效应 $T_{\theta_i}^{P_f}$ 的步骤如下:

(1) 将分布参数的条件样本 $\boldsymbol{\theta}_{(-i)j}=(\theta_{1j},\cdots,\theta_{(i-1)j},\theta_i^*,\theta_{(i+1)j},\cdots,\theta_p)$ 代入各阶矩的多元泰勒展开式, 得到各阶矩的条件样本 $(\boldsymbol{\alpha}_g^{(-i)1},\boldsymbol{\alpha}_g^{(-i)2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_g^{(-i)m})$.

(2) 计算得到 $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ 作用下的条件可靠度指标的样本 $(\beta_{4M}^{(-i)1},\beta_{4M}^{(-i)2},\cdots,\beta_{4M}^{(-i)m})$, 进而得到条件失效概率.

(3) 对条件失效概率进行方差分析, 得到 $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ 作用下的失效概率的方差 $\mathrm{Var}(P_f|\boldsymbol{\theta}_{-i})$, 即总效应 $T_{\theta_i}^{P_f}$.

在得到失效概率的主效应 $M_{\theta_i}^{P_f}$ 和总效应 $T_{\theta_i}^{P_f}$ 后, 两者对应的平均效应 $\delta_{\theta_i}^M$ 和 $\delta_{\theta_i}^T$ 可以很容易求解.

2.3 本文所提求解方法的误差分析和适用范围

对于输出响应的主效应和总效应, 本文利用一阶泰勒展开建立了两种指标的求解方法, 此过程忽略了泰勒展开的高阶项, 对于非线性问题会有一定的误差. 但本文方法的计算量只取决于各阶矩偏导数的计算量, 而各阶矩偏导数可以以很小的计算量得到, 所以本文方法使得所提指标具有更强的适用性, 易于和有限元模型结合来处理复杂的工程问题.

对于失效概率的主效应和总效应, 除了泰勒展开所带来的误差外, 利用四阶矩方法来求解失效概率时也有一定误差, 这是由于针对非线性程度较高的问题, 四阶矩方法的局限性难以克服[17]. 但本文方法能够以很小的计算成本给出正确的分布参数不确定性影响的排序结果, 这是工程中更加注重的, 所以对于非线性程度较高的问题, 本文方法的计算结果具有很好的参考价值.

3 算 例

3.1 数值算例

非线性极限状态函数 $g(\boldsymbol{x})=-18x_1+x_2^2+x_2+x_3^2+5x_3+40$ 中基本变量 x_1, x_2 和 x_3 相互独立且同时服从均值为 μ_i 标准差为 1 的正态分布, 即 $x_i\sim N(\mu,1)\,(i=1,2,3)$ 且 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$. 考虑均值 μ 具有模糊不确定性时的效应分析问题, 可以设模糊隶属函数的参数为 $t=4$, $\alpha=\beta=0.5$. 表 1 中给出了 Monte Carlo 法和文中所提方法计算结果的对比, 图 2 ~ 图 5 给出了各指标和隶属度水平的变化关系.

表 1 数值算例的计算结果

Table 1 Computational results of numerical example

Methods	Indices	$\eta_{\mu_i}^M$	$\eta_{\mu_i}^T$	$\delta_{\mu_i}^M/\times10^{-3}$	$\delta_{\mu_i}^T/\times10^{-3}$
MC	μ_1	25.42	575.66	2.84	2.74
	μ_2	6.45	556.72	0.55	0.55
	μ_3	13.09	563.33	1.29	1.21
proposed method	μ_1	26.94	557.32	2.61	2.82
	μ_2	8.30	538.68	0.59	0.73
	μ_3	14.27	544.65	1.08	1.28

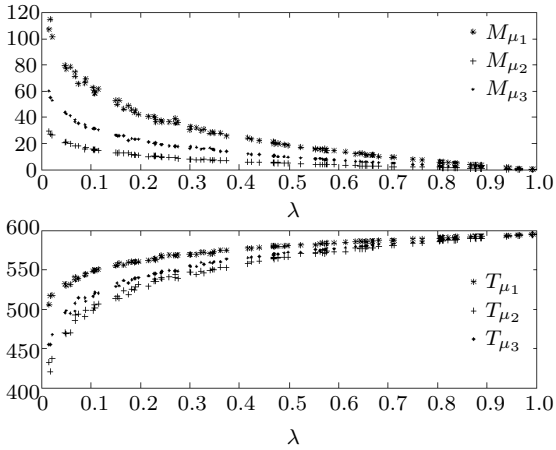

图 2　MC 法计算 M_μ 和 T_μ 随隶属度变化曲线

Fig. 2 Relationship of M_μ and T_μ with membership level by MC method

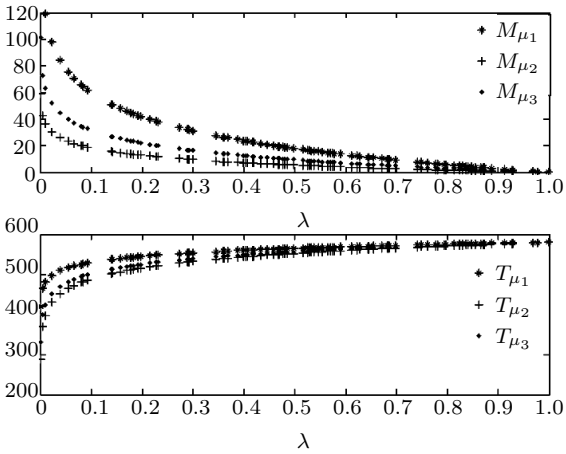

图 3　文中方法计算 M_μ 和 T_μ 随隶属度变化曲线

Fig. 3 Relationship of M_μ and T_μ with membership level by proposed method

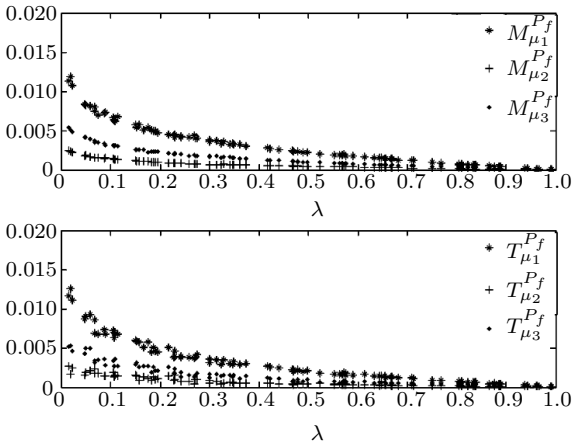

图 4　MC 法计算 $M_\mu^{P_f}$ 和 $T_\mu^{P_f}$ 随隶属度变化曲线

Fig. 4 Relationship of $M_\mu^{P_f}$ and $T_\mu^{P_f}$ with membership level by MC method

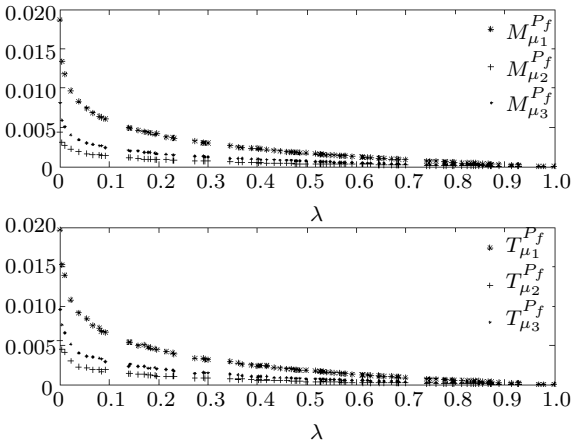

图 5　文中方法计算 $M_\mu^{P_f}$ 和 $T_\mu^{P_f}$ 随隶属度变化曲线

Fig. 5 Relationship of $M_\mu^{P_f}$ and $T_\mu^{P_f}$ with membership level by proposed method

表 1 的结果表明, 文中方法和 Monte Carlo 法的计算结果基本一致, 在每个隶属度水平下, Monte Carlo 法的抽样次数为 $10^3 \times 10^4$, 其中外层对分布参数抽样 10^3 次, 内层对随机变量抽样 10^4 次, 但文中方法的总抽样次数为 4×10^3 次 (其中利用数值方法计算各阶矩偏导数的抽样次数为 10^3 次), 所以文中方法具有高效性. 此外, 几种指标的排序为: $\eta_{\mu_1}^M > \eta_{\mu_3}^M > \eta_{\mu_2}^M$, $\eta_{\mu_1}^T > \eta_{\mu_3}^T > \eta_{\mu_2}^T$, $\delta_{\mu_1}^M > \delta_{\mu_3}^M > \delta_{\mu_2}^M$, $\delta_{\mu_1}^T > \delta_{\mu_3}^T > \delta_{\mu_2}^T$, 其中输出响应和失效概率的主效应和总效应排序相同, 这说明算例中分布参数的交互作用对模型输出响应和失效概率的影响不大.

从图 2～图 5 可以看出, Monte Carlo 法和本文方法所得到的主效应和总效应随隶属度水平的变化曲线基本一致, 并且随着隶属度水平的增加, 输出响应的主效应 M_μ 逐渐减小至 0, 总效应 T_μ 逐渐增加至不存在分布参数不确定性时的输出响应方差, 失效概率的总效应和主效应逐渐减小至 0. 这说明随着分布参数不确定性的减小, 单个分布参数对输出响应的影响会减小, 分布参数之间的交互作用对输出响应的影响则会增强, 而单个分布参数和分布参数之间的交互作用对失效概率的影响都会减小.

3.2　工程算例 1

如图 6 所示的 Y 型节点管, 剖面 A-A 的载荷包括轴向力 F、面内弯矩 M_i、截面弯矩 M_0, 可以建立极限状态方程如下式

$$g = 0.7 - 2 \times 10^{-5} F - (2 \times 10^{-4} |M_i|)^{1.2} - (2 \times 10^{-5} |M_0|)^{2.1} \tag{29}$$

其中, F, M_i 和 M_0 为互不相关的正态分布随机变量, 其分布参数见表 2. 考虑轴向力 F、面内弯矩 M_i、截面弯矩 M_0 的均值具有模糊不确定性时的效应分析问题, 可取模糊隶属函数的参数为表 3 所示. 表 4 中列出了两种方法的计算结果的对比, 图 7～图 10 给出了各指标和隶属度水平的变化关系.

从表 4 可以看出, 本文所提方法在计算输出响应的主效应和总效应时, 计算结果和 Monte Carlo 法基本一致, 而失效概率的主效应和总效应则有较大偏差, 这是由于本算例的非线性程度较高造成的. 但是表 4 的结果表明, 文中方法依然能够给出正确的排序结果, 这是工程问题中更加注重的, 所以文中方法的计算结果具有很好的参考价值. 此外, 输出响应的总效应排序和主效应的结果不同, 这说明分布参数的交互作用对输出响应的影响不可忽略.

从图 7～图 10 可以看出, 在相同隶属度水平下, 随着隶属度水平的增加, 面内弯矩的均值 μ_{M_i} 对结构系统的输出响应和失效概率影响最大, 因此注重

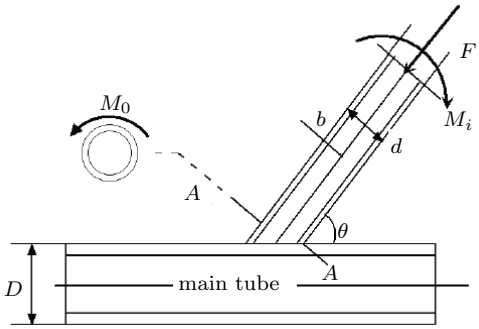

图 6 Y 型节点管示意图

Fig. 6 Scheme of Y type pipe

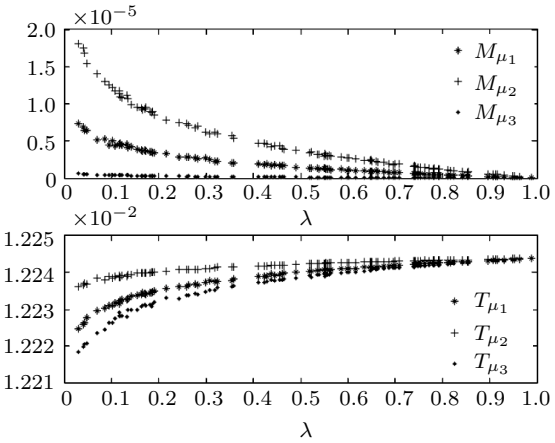

图 7 MC 法计算 M_μ 和 T_μ 随隶属度变化曲线

Fig. 7 Relationship of M_μ and T_μ with membership level by MC method

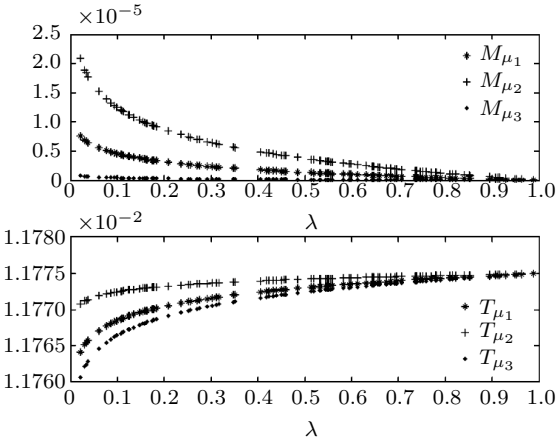

图 8 本文方法计算 M_μ 和 T_μ 随隶属度变化曲线

Fig. 8 Relationship of M_μ and T_μ with membership level by proposed method

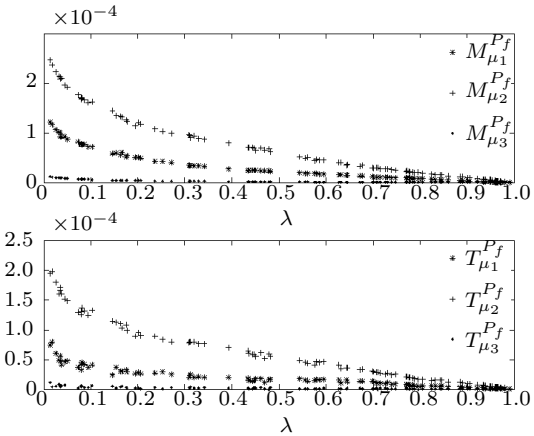

图 9 MC 法计算 $M_\mu^{P_f}$ 和 $T_\mu^{P_f}$ 随隶属度变化曲线

Fig. 9 Relationship of $M_\mu^{P_f}$ and $T_\mu^{P_f}$ with membership level by MC method

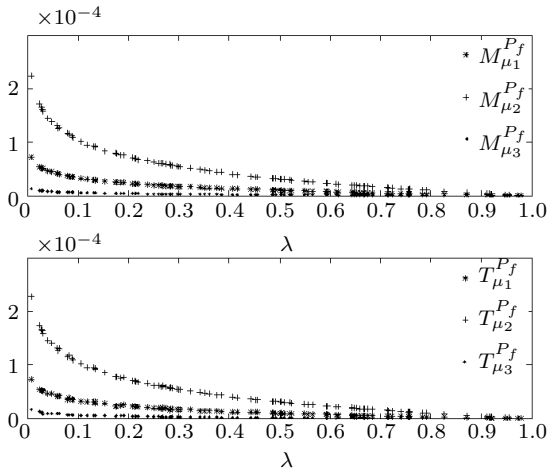

图 10 本文方法计算 $M_\mu^{P_f}$ 和 $T_\mu^{P_f}$ 随隶属度变化曲线

Fig. 10 Relationship of $M_\mu^{P_f}$ and $T_\mu^{P_f}$ with membership level by proposed method

表 2　Y 型节点管中随机变量的分布参数

Table 2 Distribution parameters of input variables

Variables	Mean value	Standard deviation
F	μ_F	0.2×10^4
M_i	μ_{M_i}	0.5×10^3
M_0	μ_{M_0}	0.1×10^4

表 3　均值模糊隶属函数中的参数

Table 3 Parameters of the fuzzy membership function of mean value

Mean value	$\mu_F(\mu_1)$	$\mu_{M_i}(\mu_2)$	$\mu_{M_0}(\mu_3)$
t	1×10^4	2×10^3	1×10^4
$\alpha=\beta$	0.2×10^3	0.5×10^2	0.1×10^3

表 4　Y 型节点管的计算结果

Table 4 Computational results of Y type pipe

Methods	Indices	$\eta^M_{\mu_i}/\times10^{-6}$	$\eta^T_{\mu_i}/\times10^{-2}$	$\delta^M_{\mu_i}/\times10^{-5}$	$\delta^T_{\mu_i}/\times10^{-5}$
MC	μ_F	1.98	1.186	2.92	1.79
	μ_{M_i}	5.01	1.187	7.10	5.91
	μ_{M_0}	0.16	1.186	0.24	0.15
proposed method	μ_F	2.05	1.178	1.52	1.53
	μ_{M_i}	5.61	1.178	4.73	4.75
	μ_{M_0}	0.20	1.178	0.27	0.30

对该参数数据的收集以减小其不确定性可以最大程度上的减小输出响应和失效概率的不确定性. 但在不同的隶属度水平下, 弯矩的均值 μ_{M_i} 对结构输出性能的影响可能会减小, 因此工程中需要对各个参数具有合理的认识.

3.3　工程算例2

机翼的九盒段结构由64个杆元件和42个板元件构成, 材料为铝合金. 图11给出了九盒段模拟结构的几何形状和受载方式. 九盒段根部的前后缘4个节点为固定端, 内部4个节点简化为只有1个自由度的支座. 翼盒上表面的前后缘6个节点受载为 P, 中间部分的6个节点的受载为 $2P$. 所有杆的长度均为 L 的整数倍, 假设所有杆的面积 A 都相同, E 表示杆元和板元的弹性模量, 泊松比取为0.3, H 表示板 (即蒙皮) 的厚度. 各个变量的分布如表5所示, 假设各个变量的均值具有模糊不确定性, 可取模糊隶属函数的参数为表6所示.

表 5　九盒段结构中随机变量的分布参数

Table 5 Distribution parameters of input variables of nine-box structure

Variables	L/m	A/cm^2	E/GP	P/kN	H/mm
mean value	μ_L	μ_A	μ_E	μ_P	μ_H
standard deviation	0.01	0.05	3.55	0.5	0.15

表 6　均值模糊隶属函数中的参数

Table 6 Parameters of the fuzzy membership function of mean value

Parameters	$\mu_L(\mu_1)$	$\mu_A(\mu_2)$	$\mu_E(\mu_3)$	$\mu_P(\mu_4)$	$\mu_H(\mu_5)$
t	0.2	1	71	10	3
$\alpha=\beta$	0.002	0.01	0.71	0.1	0.03

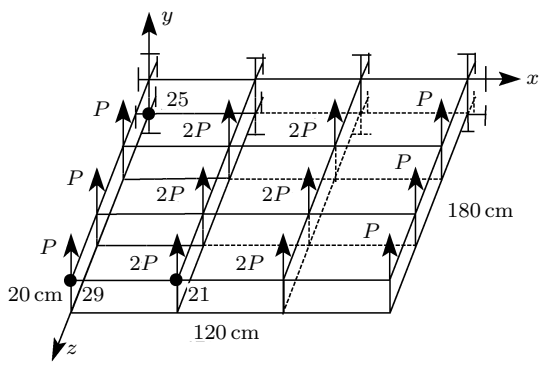

图 11　九盒段结构示意图

Fig. 11 Scheme of nine-box structure

九盒段结构经有限元分析后可知, 盒段根部具有最大应力 $\sigma_{\max}$, 查材料手册可知, 铝合金材料的最大拉伸强度为510 MPa, 故以此建立如下功能函数

$$g(L,A,E,P,H)=510-\sigma_{\max} \tag{30}$$

式中, $\sigma_{\max}$ 与输入基本变量之间具有隐含的函数关

系, 可以利用有限元分析求得. 显然对于上述结构采用 Monte Carlo 法计算所提指标的成本相当庞大, 因此这里采用本文所提的方法进行求解, 计算结果如图 12 和图 13 所示, 图 14 和图 15 给出了各指标随着隶属度的变化情况.

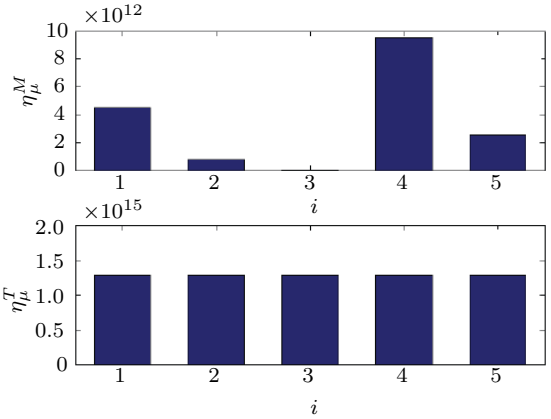

图 12 η_μ^M 和 η_μ^T 的计算结果

Fig. 12 Computational results of η_μ^M and η_μ^T

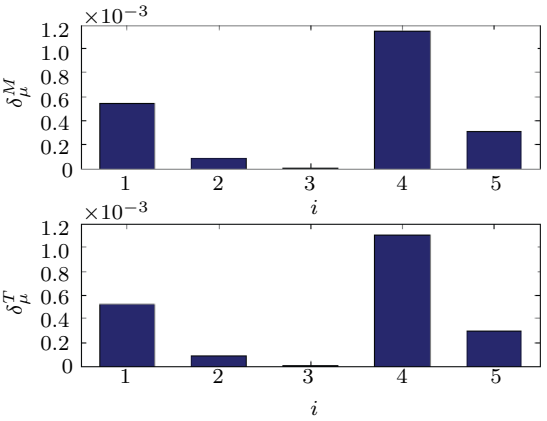

图 13 δ_μ^M 和 δ_μ^T 的计算结果

Fig. 13 Computational results of δ_μ^M and δ_μ^T

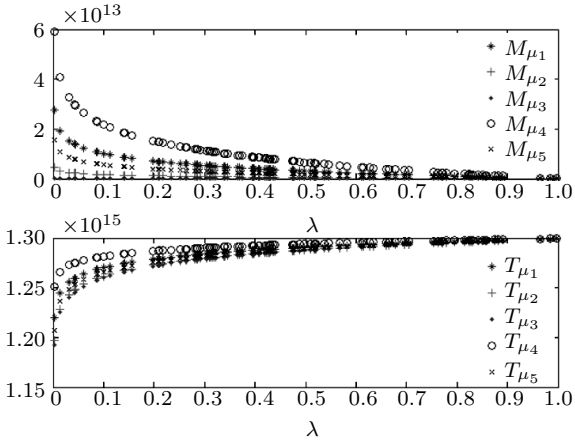

图 14 M_μ 和 T_μ 随隶属度变化曲线

Fig. 14 Relationship of M_μ and T_μ with membership level

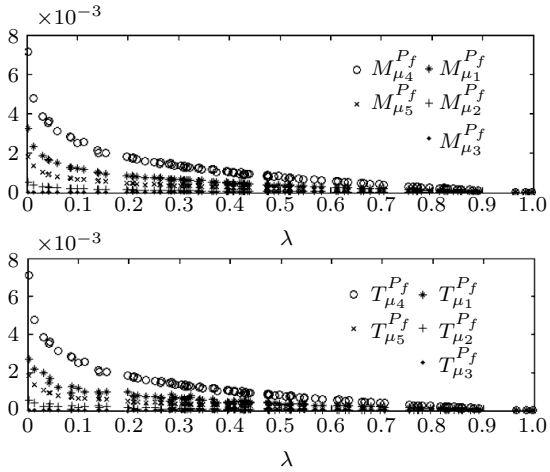

图 15 $M_\mu^{P_f}$ 和 $T_\mu^{P_f}$ 随隶属度变化曲线

Fig. 15 Relationship of $M_\mu^{P_f}$ and $T_\mu^{P_f}$ with membership level

从图 1 和图 13 可以看出, 在考虑分布参数具有模糊不确定的情况下, 载荷均值 μ_P 的输出响应和失效概率主效应最大, 而弹性模量均值 μ_E 的主效应最小, 这说明了载荷均值 μ_P 对结构的最大应力影响最大, 通过合理调整载荷均值 μ_P 可以有效的减小输出响应变异性和结构系统失效概率. 而对于输出响应的总效应, 各参数的总效应排序和主效应不同, 这说明各个均值之间的交互作用较强, 尤其是弹性模量均值 μ_E 对结构系统输出响应的影响不能忽略. 对于失效概率的总效应, 其排序结果和主效应相同, 这说明各个参数的交互作用对失效概率的影响很小, 此时弹性模量对结构系统失效概率的影响可以忽略.

此外, 从结构设计的角度考虑, 杆长均值 μ_L 和蒙皮厚度均值 μ_H 的主效应相对较大, 这说明两者对结构的物理性能影响较大, 通过合理的控制杆长均值 μ_L 和蒙皮厚度均值 μ_H 可以有效地改进结构物理性能, 这也说明文中指标的计算结果可以为结构的设计提供了参考.

图 14 和图 15 也反映出在不同的隶属度水平下, 各种指标的次序有可能改变, 这说明了考虑各个变量的均值具有不确定时的效应分析是非常有必要的, 对各个变量均值的不同认识程度, 将会导致不同的分析结果.

4 结 论

工程实际中, 结构系统的输出性能经常会受到分布参数不确定性的影响, 并且分布参数的不确定性可以随着认识的深入和数据的丰富而减少, 所以研究分布参数的不确定性可以为减小输出响应的变异性和结构系统失效概率提供途径. 本文利用模糊

模型来描述分布参数的不确定性, 并且利用隶属度来衡量该不确定性的大小. 针对分布参数不确定性对结构系统输出响应和失效概率的影响问题, 文中建立了在不同隶属度水平下两种基于方差的主效应和总效应分析模型, 并且提出了相应的平均效应指标. 通过研究隶属度水平和各种效应指标之间的关系, 得到分布参数不确定性对输出响应和失效概率的影响规律. 文中算例结果表明, 所提方法具有高效性, 但是该方法在处理非线性程度较高的问题时还具有一定局限性.

参 考 文 献

1 Kiureghian AD. Analysis of structure reliability under parameter uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2008, 23(4): 351-358

2 Helton JC, Davis FJ. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003, 81(1): 23-69

3 Saltelli A, Marivoet J. Non-parametric statistics in sensitivity analysis for model output: a comparison of selected techniques. *Reliability Engineering and System Safety*, 1990, 28(2): 229-253

4 Sobol IM. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematic Compute Simulation*, 2001, 55(1-3): 221-280

5 Iman RL, Hora SC. A robust measure of uncertainty importance for use in fault tree system analysis. *Risk Analysis*, 1990, 10(3): 401-406

6 Chun MH, Han SJ, Tak NI. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function. *Reliability Engineering and System Safety*, 2000, 70(3): 313-321

7 Liu HB, Chen W, Sudjianto A. Relative entropy based method for probabilistic sensitivity analysis in engineering design. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(2): 326-333

8 Borgonovo E. A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771-784

9 郭书祥, 吕震宙, 张陵. 结构的能度可靠性方法和随机可靠性方法的比较. 计算力学学报, 2003, 20(4): 446-450 (Guo Shuxiang, Lü Zhenzhou, Zhang Ling. Comparison of possibilistic reliability and stochastic reliability methods for uncertain structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(4): 446-450 (in Chinese))

10 董玉革, 朱文予, 陈心昭. 机械模糊可靠性计算方法研究. 系统工程学报, 2000, 15(1): 7-12 (Dong Yuge, Zhu Wenyu, Chen Xinzhao. Study for calculating method of machine fuzzy reliability. *Journal Systems Engineering*, 2000, 15: 7-12 (in Chinese))

11 董玉革. 随机变量和模糊变量组合时的模糊可靠性设计. 机械工程学报, 2006, 36(6): 25-29 (Dong Yuge. Fuzzy reliability design with random variable and fuzzy variable. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 36: 25-29 (in Chinese))

12 Hofer E, Kloos M, Krzykacz-Hansmann B, et al. An approximate epistemic uncertainty analysis approach in the presence of epistemic and aleatory uncertainties. *Reliability Engineering and System Safety*, 2002, 77(3): 229-238

13 Zio E. Reliability engineering: old problems and new challenges. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009 94(2): 125-141

14 Hong HP. Point-estimate moment-based reliability analysis. *Civil Engineering System*, 1996, 13(4): 281-294

15 Mekchers RE. Importance sampling in structure system. *Structural Safety*, 1989, 6(1): 3-10

16 Zhao YG, Ono T. Moment method for structural reliability. *Structural Safety*, 2001, 23(1): 47-75

17 Zhao YG, Lu ZH. Applicable range of the fourth-moment method for structural reliability. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 2007, 6(1): 151-158

(责任编辑: 刘希国)

AN APPROXIMATE EFFECT ANALYSIS OF STRUCTURAL SYSTEM WITH FUZZY DISTRIBUTION PARAMETERS [1)]

Wang Pan [2)] Lü Zhenzhou [3)] Tang Zhangchun
(*School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

Abstract In order to analyze the effect of the epistemic uncertainty of the random input variables' distribution parameters on the structure system, the fuzzy variables are introduced to describe the epistemic uncertainty and the membership levels are employed to measure the degree of the epistemic uncertainty. Two effect indicators, main effect and total effect, for the output response and failure probability are proposed at each possibility level, respectively, and then their relationships with the membership levels are investigated in detail. Finally the expected effect indicators are presented to define the effect of each parameter on the system. In order to reduce the computational cost of the proposed indicators, a new method is proposed by the Taylor expansion for the moments of the output response. Three examples are utilized to demonstrate the reasonability of the proposed indices and the efficiency of the proposed method.

Key words main effect, total effect, distribution parameter, output response, failure probability

Received 6 December 2011, revised 12 January 2012.

1) The project was supported by the Chinese Aviation Science Foundation (2011ZA53015), the National Natural Science Foundation of China (51175425), Research Fund for Doctoral Program of High Education of China（20116102110003）and the Aerospace Support Fund (2011XW010001).

2) E-mail：panwang@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail：zhenzhoulu@nwpu.edu.cn