

文章编号: 1001-0920(2013)02-0223-06

## 具有随机多丢包的 ARMA 信号最优线性估计

孙书利<sup>a</sup>, 刘丽芳<sup>b</sup>

(黑龙江大学 a. 电子工程学院, b. 数学科学学院, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 研究网络环境下具有随机丢包的自回归滑动平均 (ARMA) 信号的估计问题, 其中丢包现象通过一个满足 Bernoulli 分布的随机变量描述. 通过 ARMA 模型与状态空间模型的转化, 将具有丢包的 ARMA 信号估计问题转化为具有丢包的状态空间模型的状态和白噪声估计问题. 利用射影理论分别给出线性最小方差最优线性状态估值器和白噪声估值器, 进而获得 ARMA 信号估值器. 仿真结果表明, 当存在数据丢失时, 所提出的算法与以往基于完整数据的最优估计算法相比具有最优性和有效性.

**关键词:** 丢包; ARMA 信号; 状态估值器; 白噪声估值器; 射影理论

中图分类号: O211.64

文献标志码: A

## Optimal linear estimation for ARMA signals with stochastic multiple packet dropouts

SUN Shu-li<sup>a</sup>, LIU Li-fang<sup>b</sup>

(a. School of Electronics Engineering, b. School of Mathematics Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China. Correspondent: SUN Shu-li, E-mail: sunsl@hlju.edu.cn)

**Abstract:** The estimation problem for autoregressive moving average (ARMA) signals with stochastic packet dropouts in the networked environment is studied, where the phenomenon of the packet dropouts is described by a Bernoulli distributed random variable. The estimation problem for ARMA signals with packet dropouts is converted to the one for the state and white noise of state space model with packet dropouts by the transform from ARMA model to the state space model. Based on projection theory, the optimal linear estimators for the state and white noise are derived in the linear minimum variance sense respectively. Further, the estimators for ARMA signals are obtained. Simulation results show that, in the presence of packet dropouts, compared with the previous optimal estimation algorithms based on the complete data, the proposed algorithm has optimality and effectiveness.

**Key words:** packet dropout; ARMA signal; state estimator; white noise estimator; projection theory

### 0 引言

ARMA 信号估计问题广泛存在于通讯、信号处理、网络控制和工程预测等领域<sup>[1]</sup>. 近几年, 有关 ARMA 信号估计问题的研究已经取得了大量的理论成果<sup>[1-2]</sup>, 但所设计的估值器大都基于完整的观测数据. 然而, 在网络控制系统和传感器网络中, 由于外界环境和通信设施的影响, 在接收过程中经常导致数据丢失<sup>[3]</sup>, 因此研究具有数据丢失的网络系统具有实际意义. 目前, 已有很多文献对具有丢包系统的控制和估计问题进行了研究<sup>[4-12]</sup>. 例如: 基于带有时间

戳的观测, 文献 [4] 设计了具有丢包系统的 Kalman 滤波器, 并分析了丢包率与滤波器稳定性的关系; 文献 [5] 利用线性矩阵不等式, 通过一个统一的参数模型研究了不确定观测、随机滞后和丢包系统的  $H_2$  滤波问题; 文献 [6] 考虑了有限连续丢包系统的滤波问题, 没有借助状态增广, 通过将系统转化为一个带观测时滞和滑动平均 (MV) 有色噪声的系统, 给出了线性最小方差最优无偏估计, 但由于假设系统的状态转移矩阵是非奇异的, 所得到的滤波器在实际应用中有一定的局限性; 文献 [7] 避免了文献 [6] 中系统的状态

收稿日期: 2011-10-26; 修回日期: 2012-05-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874062, 61174139); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-10-0133); 黑龙江省高校新世纪优秀人才培养计划项目(1154-NCET-01); 黑龙江大学高层次人才创新团队项目(Hdtd2010-03); 黑龙江省高校重点实验室项目.

作者简介: 孙书利(1971—), 男, 教授, 博士生导师, 从事状态估计、信息融合等研究; 刘丽芳(1987—), 女, 硕士生, 从事状态估计的研究.

转移矩阵为非奇异的假设,给出了有限连续丢包系统的最优滤波、预报和平滑算法;文献[8]研究了可能具有无限丢包的离散随机线性系统的最优滤波、预报和平滑算法,并给出了稳态存在的一个充分条件;文献[9-11]研究了具有丢包不确定系统的鲁棒滤波问题;文献[12]考虑了不确定观测 ARMA 信号的最优滤波估计问题,但只考虑了在观测中含有不确定观测的情况.在某些时刻,估值器仅能收到观测噪声,这将导致较差的估计精度;而在当前数据丢失时,以往的数据可以被用于估计<sup>[8]</sup>.迄今为止,有关多丢包 ARMA 信号估计问题的研究报道尚不多见.

本文研究网络系统中具有随机多丢包 ARMA 信号的估计问题.首先将具有丢包的 ARMA 信号估计问题转化为具有丢包的状态空间模型的状态和白噪声估计问题.利用射影理论,在线性最小方差意义下给出了具有丢包的最优线性状态估值器和白噪声估值器,包括滤波器、预报器和平滑器.最后基于状态和白噪声估值器获得了具有丢包的 ARMA 信号估值器.以往文献基于完整数据的最优估计算法可以作为特殊情况获得,当存在数据丢失时,以往基于完整数据的最优估计算法会失去最优性.

## 1 问题阐述

考虑具有多丢包的多通道 ARMA 信号系统

$$B(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})w(t), \quad (1)$$

$$z(t) = s(t) + v(t), \quad (2)$$

$$y(t) = \xi(t)z(t) + (1 - \xi(t))y(t-1). \quad (3)$$

其中:  $s(t) \in R^m$  为待估信号;  $z(t) \in R^m$  为观测,它将通过网络将其发给估值器;  $y(t) \in R^m$  为估值器接收到的数据;  $w(t) \in R^r$  为零均值、方差为  $Q_w$  的输入白噪声;  $v(t) \in R^m$  为零均值、方差为  $Q_v$  的观测白噪声.  $w(t)$  与  $v(t)$  相关,而且互协方差阵为  $S_0$ .  $B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  是形如  $X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}$  的多项式矩阵,  $q^{-1}$  为单位滞后算子,即  $q^{-1}x(t) = x(t-1)$ .  $X_i (i=0, 1, \dots, n_x)$  为系数矩阵,  $n_x$  为阶数.  $B_0 = I_m$ ,  $n_b \geq n_c$ ,  $I_m$  为  $m \times m$  的单位阵,  $\xi(t)$  是一个服从 Bernoulli 分布的随机变量,满足概率  $\text{Prob}\{\xi(t)=1\} = \alpha$ ,  $\text{Prob}\{\xi(t)=0\} = 1 - \alpha$ , 其中  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 且与其他随机变量无关.当  $\xi(t)=1$  时,  $z(t)$  被估值器收到;当  $\xi(t)=0$  时,  $z(t)$  被丢失,则  $y(t-1)$  将被用于估计<sup>[7]</sup>.

本文的目的是基于观测  $(y(1), y(2), \dots, y(t+N))$ , 求信号的线性最小方差估值器  $\hat{s}(t|t+N)$ . 其中: 当  $N=0$  时称为滤波器, 当  $N < 0$  时称为预报器, 当  $N > 0$  时称为平滑器.

## 2 模型转化

首先将 ARMA 模型转化为状态空间模型. 系统 (1)~(3) 与如下状态空间模型等价<sup>[1]</sup>:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (4)$$

$$s(t) = Hx(t) + C_0 w(t), \quad (5)$$

$$z(t) = s(t) + v(t), \quad (6)$$

$$y(t) = \xi(t)z(t) + (1 - \xi(t))y(t-1). \quad (7)$$

其中:  $H = [I_m \ 0 \ \dots \ 0]$ , 其维数为  $m \times mn_b$ ; 而

$$\Phi = \begin{bmatrix} -B_1 & I_m & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -B_{n_b-1} & 0 & \dots & I_m \\ -B_{n_b} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} C_1 - B_1 C_0 \\ \vdots \\ C_{n_b} - B_{n_b} C_0 \end{bmatrix}.$$

当  $k > n_c$  时,  $C_k = 0$ . 初值  $x(0)$  与  $\xi(t)$ ,  $w(t)$  和  $v(t)$  相互独立, 且  $E[x(0)] = \mu_0$ ,  $E[(x(0) - \mu_0)(x(0) - \mu_0)^T] = P_0$ .  $E$  表示数学期望.

对式 (5) 左右两边同时取射影, 得

$$\hat{s}(t|t+N) = H\hat{x}(t|t+N) + C_0\hat{w}(t|t+N). \quad (8)$$

可见, 只要求出状态  $x(t)$  的估值器  $\hat{x}(t|t+N)$  和系统噪声  $w(t)$  的估值器  $\hat{w}(t|t+N)$ , 就可以得到信号  $s(t)$  的估值器  $\hat{s}(t|t+N)$ .

下面求状态和白噪声估值器.

## 3 最优线性估值器

将系统 (4)~(7) 增广, 可以得到下列状态空间模型:

$$X(t+1) = \tilde{\Phi}(t)X(t) + \tilde{\Gamma}(t)W(t), \quad (9)$$

$$y(t) = \tilde{H}(t)X(t) + \tilde{B}(t)W(t). \quad (10)$$

其中

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t-1) \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ \xi(t)H & (1 - \xi(t))I_m \end{bmatrix} = \Phi_0 + \xi(t)\Phi_1,$$

$$\tilde{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ \xi(t)C_0 & \xi(t)I_m \end{bmatrix} = \Gamma_0 + \xi(t)\Gamma_1,$$

$$\tilde{H}(t) = [\xi(t)H \ (1 - \xi(t))I_m] = H_0 + \xi(t)H_1,$$

$$\tilde{B}(t) = \xi(t)[C_0 \ I_m] = \xi(t)B; \quad (11)$$

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H & -I_m \end{bmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_0 & I_m \end{bmatrix}, \quad H_0 = [0 \ I_m], \quad H_1 = [H \ -I_m],$$

$$B = [C_0 \ I_m]. \quad (12)$$

易知

$$E[W(t)W^T(k)] = Q_W \delta_{tk}. \quad (13)$$

其中:  $Q_W = \begin{bmatrix} Q_w & S_0 \\ S_0^T & Q_v \end{bmatrix}$ ,  $\delta_{tk}$  为 Kronecker delta 函数.

**引理 1** 对于系统 (9) 和 (10), 有下列结论成立:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= E[\tilde{\Phi}(t)] = \Phi_0 + \alpha\Phi_1, \\ \bar{\Gamma} &= E[\tilde{\Gamma}(t)] = \Gamma_0 + \alpha\Gamma_1, \\ \bar{H} &= E[\tilde{H}(t)] = H_0 + \alpha H_1, \\ \bar{B} &= E[\tilde{B}(t)] = \alpha B; \\ \tilde{\Phi}(t) - \bar{\Phi} &= (\xi(t) - \alpha)\Phi_1, \\ \tilde{\Gamma}(t) - \bar{\Gamma} &= (\xi(t) - \alpha)\Gamma_1, \\ \tilde{H}(t) - \bar{H} &= (\xi(t) - \alpha)H_1. \end{aligned} \quad (14)$$

**引理 2**<sup>[1]</sup> 系统 (9) 的状态二阶矩矩阵  $q(t) = E[X(t)X^T(t)]$ , 可计算如下:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= \\ &\bar{\Phi}q(t)\bar{\Phi}^T + \alpha(1-\alpha)\Phi_1q(t)\Phi_1^T + \\ &\bar{\Gamma}Q_W\bar{\Gamma}^T + \alpha(1-\alpha)\Gamma_1Q_W\Gamma_1^T. \end{aligned} \quad (16)$$

初值  $q(0) = \text{diag}(P_0 + \mu_0\mu_0^T, 0)$ ,  $\text{diag}(\cdot)$  表示对角阵.

### 3.1 状态估值器

基于状态空间模型 (9) 和 (10), 应用射影理论<sup>[1]</sup>, 类似于文献 [8] 的证明可获得最优线性状态估值器. 限于篇幅, 这里不再赘述.

**定理 1** 系统 (9) 和 (10) 有如下递推的最优线性状态估值器:

1) 滤波器和一步预报器为

$$\hat{X}(t|t) = \hat{X}(t|t-1) + K(t)\varepsilon(t), \quad (17)$$

$$\hat{X}(t+1|t) = \bar{\Phi}\hat{X}(t|t-1) + L(t)\varepsilon(t), \quad (18)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \bar{H}\hat{X}(t|t-1), \quad (19)$$

$$K(t) = P_X(t|t-1)\bar{H}^TQ_\varepsilon^{-1}(t), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} L(t) &= \\ &\{\alpha(1-\alpha)\Phi_1q(t)H_1^T + \\ &\bar{\Phi}P_X(t|t-1)\bar{H}^T + \alpha(\Gamma_0 + \Gamma_1)Q_WB^T\}Q_\varepsilon^{-1}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(t) &= \alpha(1-\alpha)H_1q(t)H_1^T + \\ &\bar{H}P_X(t|t-1)\bar{H}^T + \alpha BQ_WB^T, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} P_X(t+1|t) &= \\ &\alpha(1-\alpha)(\Phi_1 - L(t)H_1)q(t)(\Phi_1 - L(t)H_1)^T + \\ &(\bar{\Phi} - L(t)\bar{H})P_X(t|t-1)(\bar{\Phi} - L(t)\bar{H})^T + \Lambda(t), \end{aligned} \quad (23)$$

$$P_X(t|t) = P_X(t|t-1) - K(t)Q_\varepsilon(t)K^T(t), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \\ &\bar{\Gamma}Q_W\bar{\Gamma}^T + \alpha(1-\alpha)\Gamma_1Q_W\Gamma_1^T - \\ &\alpha(\Gamma_0 + \Gamma_1)Q_WB^TL^T(t) - \\ &\alpha L(t)BQ_W(\Gamma_0 + \Gamma_1)^T + \alpha L(t)BQ_WB^TL^T(t). \end{aligned} \quad (25)$$

其中:  $\varepsilon(t)$  是方差为  $Q_\varepsilon(t)$  的新息序列,  $P_X(t|t)$  和  $P_X(t+1|t)$  分别为滤波和一步预报误差方差阵,  $K(t)$  和  $L(t)$  分别为滤波和一步预报增益矩阵, 初值  $\hat{X}(0|-1) = [\mu_0^T \ 0]^T$ ,  $P_X(0|-1) = \text{diag}(P_0, 0)$ .

$$\begin{aligned} &2) N(N < -1) \text{ 步预报器为} \\ &\hat{X}(t+1|t+N+1) = \bar{\Phi}\hat{X}(t|t+N+1), \end{aligned} \quad (26)$$

预报误差方差为

$$\begin{aligned} P_X(t+1|t+N+1) &= \\ &\alpha(1-\alpha)\Phi_1q(t)\Phi_1^T + \bar{\Phi}P_X(t|t+N+1)\bar{\Phi}^T + \\ &\bar{\Gamma}Q_W\bar{\Gamma}^T + \alpha(1-\alpha)\Gamma_1Q_W\Gamma_1^T. \end{aligned} \quad (27)$$

其中: 初值  $\hat{X}(t|t-1)$  和  $P_X(t|t-1)$  分别由式 (18) 和 (23) 计算,  $q(t)$  由引理 2 计算.

3)  $N(N > 0)$  步平滑器为

$$\begin{aligned} \hat{X}(t|t+N) &= \\ \hat{X}(t|t+N-1) &+ M_X(t|t+N)\varepsilon(t+N). \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} M_X(t|t+N) &= \Omega(t+N)\bar{H}^TQ_\varepsilon^{-1}(t+N), \\ \Omega(t+N) &= \\ \Omega(t+N-1) &(\bar{\Phi} - L(t+N-1)\bar{H})^T. \end{aligned} \quad (29)$$

平滑误差方差阵为

$$\begin{aligned} P_X(t|t+N) &= \\ P_X(t|t+N-1) &- \\ M_X(t|t+N)Q_\varepsilon(t+N)M_X^T(t|t+N). \end{aligned} \quad (30)$$

其中: 初值  $\Omega(t) = P_X(t|t-1)$ ,  $M_X(t|t+N)$  为状态平滑增益阵,  $\hat{X}(t|t)$  和  $P_X(t|t)$  分别由式 (17) 和 (24) 计算.

由定义  $X(t) = [x^T(t) \ y^T(t-1)]^T$ , 有如下推论.

**推论 1** 系统 (4) 的状态估值器和误差方差阵为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t+N) &= [I_{mn_b} \ 0]\hat{X}(t|t+N), \\ P_x(t|t+N) &= [I_{mn_b} \ 0]P_X(t|t+N)[I_{mn_b} \ 0]^T. \end{aligned} \quad (31)$$

其中: 增广状态估值器  $\hat{X}(t|t+N)$  由式 (17), (26) 和 (28) 计算; 误差方差阵  $P_X(t|t+N)$  由式 (24), (27) 和 (30) 计算.

### 3.2 白噪声估值器

下面在状态一步预报器的基础上求出白噪声估值器, 包括输入白噪声估值器和观测白噪声估值器. 这里以定理的形式给出.

**定理 2** 系统 (9) 和 (10) 有最优白噪声估值器:

1) 预报器为

$$\hat{W}(t|t+N) = 0, \quad N < 0. \quad (32)$$

2) 滤波器为

$$\hat{W}(t|t) = M_W(t|t)\varepsilon(t); \quad (33)$$

白噪声滤波增益为

$$M_W(t|t) = Q_W\bar{B}^TQ_\varepsilon^{-1}(t). \quad (34)$$

3) 平滑器为

$$\begin{aligned} \hat{W}(t|t+N) = \\ \hat{W}(t|t+N-1) + \\ M_W(t|t+N)\varepsilon(t+N), \quad N > 0; \end{aligned} \quad (35)$$

白噪声平滑增益为

$$\begin{aligned} M_W(t|t+N) = \\ Q_W(\bar{\Gamma} - L(t)\bar{B})^T \times \\ \Psi_P^T(t+N, t+1)\bar{H}^T Q_\varepsilon^{-1}(t+N), \quad N > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_P(t+N, t+k) = \prod_{i=1}^{N-k} (\bar{\Phi} - L(t+N-i)\bar{H}), \\ \Psi_P(t, t) = I_n, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (37)$$

估计误差方差阵为

$$P_W(t|t+N) = Q_W, \quad N < 0; \quad (38)$$

$$P_W(t|t) = Q_W - M_W(t|t)Q_\varepsilon(t)M_W^T(t|t); \quad (39)$$

$$P_W(t|t+N) =$$

$$P_W(t|t+N-1) -$$

$$M_W(t|t+N)Q_\varepsilon(t+N)M_W^T(t|t+N), \quad N > 0. \quad (40)$$

**证明** 由射影理论<sup>[1]</sup>, 式(32)~(35), (38)和(39)容易获得. 这里只给出式(36)和(40)的推导过程. 由定理1, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+N) = \\ (\xi(t+N) - \alpha)H_1 X(t+N) + \\ \bar{H}\tilde{X}(t+N|t+N-1) + \tilde{B}(t+N)W(t+N). \end{aligned} \quad (41)$$

由式(9)和(18), 可得一步预报误差方程为

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t+1|t) = \\ X(t+1) - \hat{X}(t+1|t) = \\ (\bar{\Phi} - L(t)\bar{H})\tilde{X}(t|t-1) + (\xi(t) - \alpha)(\Phi_1 - \\ L(t)H_1)X(t) + (\tilde{\Gamma}(t) - L(t)\tilde{B}(t))W(t). \end{aligned} \quad (42)$$

将式(42)逐步迭代 $N-1$ 步, 得

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t+N|t+N-1) = \\ \Psi_P(t+N, t)\tilde{X}(t|t-1) + \sum_{k=1}^N \Psi_P(t+ \\ N, t+k)\{(\xi(t+k-1) - \alpha)(\Phi_1 - L(t+k- \\ 1)H_1)X(t+k-1) + (\tilde{\Gamma}(t+k-1) - L(t+ \\ k-1)\tilde{B}(t+k-1))W(t+k-1)\}. \end{aligned} \quad (43)$$

将式(43)代入(41), 可得到

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+N) = \\ (\xi(t+N) - \alpha)H_1 X(t+N) + \bar{H}\left\{\Psi_P(t+ \\ N, t)\tilde{X}(t|t-1) + \sum_{k=1}^N \Psi_P(t+N, t+k)\right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\xi(t+k-1) - \alpha)(\Phi_1 - L(t+k-1)H_1)X(t+ \\ k-1) + (\tilde{\Gamma}(t+k-1) - L(t+k-1)\tilde{B}(t+ \\ k-1))W(t+k-1)]\} + \tilde{B}(t+N)W(t+N). \end{aligned}$$

当 $N > 0$ 时, 由 $E[\xi(t+N) - \alpha] = 0$ ,  $W(t)$ 与 $\tilde{X}(t|t-1)$ ,  $W(t+k-1)$ ( $k > 1$ )不相关, 可得

$$\begin{aligned} M_W(t|t+N) = \\ E[W(t)\varepsilon^T(t+N)]Q_\varepsilon^{-1}(t+N) = \\ E\{W(t)[\bar{H}\Psi_P(t+N, t+1)(\tilde{\Gamma}(t) - \\ L(t)\tilde{B}(t))W(t)]^T\}Q_\varepsilon^{-1}(t+N) = \\ Q_W(\bar{\Gamma} - L(t)\bar{B})^T \Psi_P^T(t+N, t+1)\bar{H}^T Q_\varepsilon^{-1}(t+N), \end{aligned}$$

即式(36)成立. 由式(35)可知, 白噪声平滑误差为

$$\begin{aligned} \tilde{W}(t|t+N) = \\ \tilde{W}(t|t+N-1) - M_W(t|t+N)\varepsilon(t+N). \end{aligned} \quad (44)$$

计算 $P_W(t|t+N) = E[\tilde{W}(t|t+N)\tilde{W}^T(t|t+N)]$ , 并利用 $\tilde{W}(t|t+N)$ 与 $\varepsilon(t+N)$ 正交, 可得白噪声平滑误差方差阵满足式(40).  $\square$

**推论 2** 由定义 $W(t) = [w^T(t) \ v^T(t)]^T$ 可知, 最优线性输入白噪声估值器和观测白噪声估值器及相应的误差方差阵为

$$\begin{aligned} \hat{w}(t|t+N) = [I_r \ 0]\hat{W}(t|t+N), \\ \hat{v}(t|t+N) = [0 \ I_m]\hat{W}(t|t+N); \end{aligned} \quad (45)$$

$$P_w(t|t+N) = [I_r \ 0]P_W(t|t+N)[I_r \ 0]^T,$$

$$P_v(t|t+N) = [0 \ I_m]P_W(t|t+N)[0 \ I_m]^T. \quad (46)$$

其中白噪声估值器 $\hat{W}(t|t+N)$ 和白噪声误差方差阵 $P_W(t|t+N)$ 由定理2计算.

### 3.3 ARMA 信号估值器

基于状态和白噪声估值器, 可获得信号 $s(t)$ 的估值器 $\hat{s}(t|t+N)$ . 下面通过定理的形式给出.

**定理 3** 系统(1)~(3)的信号 $s(t)$ 的估值器为

$$\hat{s}(t|t+N) = H\hat{x}(t|t+N), \quad N < 0; \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}(t|t+N) = \\ H\hat{x}(t|t+N) + C_0\hat{w}(t|t+N), \quad N \geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

估计误差方差阵为

$$\begin{aligned} P_s(t|t+N) = \\ HP_x(t|t+N)H^T + C_0Q_wC_0^T, \quad N < 0; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} P_s(t|t+N) = \\ HP_x(t|t+N)H^T + \\ H[I_{mn_b} \ 0]P_{XW}(t|t+N)[I_r \ 0]^T C_0^T + \\ C_0[I_r \ 0]P_{XW}^T(t|t+N)[I_{mn_b} \ 0]^T H^T + \\ C_0P_w(t|t+N)C_0^T, \quad N \geq 0; \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 P_{XW}(t|t+N) &= \\
 P_{XW}(t|t+N-1) &- \\
 M_X(t|t+N)Q_\varepsilon(t+N)M_W^T(t|t+N). & \quad (51)
 \end{aligned}$$

其中: 状态估值器  $\hat{x}(t|t+N)$ , 白噪声估值器  $\hat{w}(t|t+N)$  和误差方差阵  $P_x(t|t+N)$ ,  $P_w(t|t+N)$  分别由式 (31), (45) 和 (46) 计算; 状态增益  $M_X(t|t+N)$  由式 (29) 计算; 白噪声增益  $M_W(t|t+N)$  由式 (34) 和 (36) 计算; 初值为  $P_{XW}(t|t) = -K(t)Q_\varepsilon(t)M_W(t|t)$ .

**证明** 对式 (5) 两端取射影, 可得式 (47) 和 (48). 由式 (5) 和 (47) 可知信号  $s(t)$  的预报误差为

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t|t+N) &= \\
 s(t) - \hat{s}(t|t+N) &= \\
 H\tilde{x}(t|t+N) + C_0w(t), & \quad N < 0,
 \end{aligned}$$

其中  $\tilde{x}(t|t+N) = x(t) - \hat{x}(t|t+N)$  为状态误差. 于是, 预报误差方差阵为

$$\begin{aligned}
 P_s(t|t+N) &= \\
 E[\tilde{s}(t|t+N)\tilde{s}^T(t|t+N)] &= \\
 HP_x(t|t+N)H^T + C_0Q_wC_0^T. &
 \end{aligned}$$

从而式 (49) 成立. 由式 (5) 和 (48) 可知, 信号  $s(t)$  的滤波和平滑误差为

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t|t+N) &= s(t) - \hat{s}(t|t+N) = \\
 H\tilde{x}(t|t+N) + C_0\tilde{w}(t|t+N), & \quad N \geq 0,
 \end{aligned}$$

其中  $\tilde{w}(t|t+N) = w(t) - \hat{w}(t|t+N)$  为输入白噪声误差. 于是, 滤波和平滑误差方差阵为

$$\begin{aligned}
 P_s(t|t+N) &= \\
 E[\tilde{s}(t|t+N)\tilde{s}^T(t|t+N)] &= \\
 HP_x(t|t+N)H^T + C_0P_w(t|t+N)C_0^T &+ \\
 H[I_{mn_b} \ 0]E[\tilde{X}(t|t+N)\tilde{W}^T(t|t+N)] &[I_r \ 0]^T C_0^T + \\
 C_0[I_r \ 0]E[\tilde{W}(t|t+N)\tilde{X}^T(t|t+N)] &[I_{mn_b} \ 0]^T H^T. & \quad (52)
 \end{aligned}$$

令  $P_{XW}(t|t+N) = E[\tilde{X}(t|t+N)\tilde{W}^T(t|t+N)]$ , 则由  $W(t) \perp X(t)$ ,  $\tilde{X}(t|t+N) \perp \varepsilon(t+N)$ ,  $\tilde{W}(t|t+N) \perp \varepsilon(t+N)$  和式 (44) 可知

$$\begin{aligned}
 P_{XW}(t|t+N) &= \\
 E[\tilde{X}(t|t+N)\tilde{W}^T(t|t+N)] &= \\
 P_{XW}(t|t+N-1) &- \\
 M_X(t|t+N)Q_\varepsilon(t+N)M_W^T(t|t+N), & \quad (53)
 \end{aligned}$$

从而式 (51) 成立. 将式 (53) 代入 (52) 便可得到式 (50), 其中初值为  $P_{XW}(t|t) = -K(t)Q_\varepsilon(t)M_W(t|t)$ .  $\square$

**注 1** 由引理 1 可知,  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{B}$  和  $\bar{\Gamma}$  与  $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$  有关. 定理 1~定理 3 分别给出了可能存在数据丢失时的最优线性状态估值器、白噪声估值器和 ARMA

信号估值器. 当不存在数据丢失时 ( $\alpha = 1$ ), 定理 1~定理 3 即为完整观测数据下的最优估值器<sup>[1]</sup>.

### 4 仿真实例

考虑如下 ARMA 信号系统:

$$\begin{aligned}
 (I_2 + B_1q^{-1} + B_2q^{-2})s(t) &= (C_0 + C_1q^{-1})w(t), \\
 z(t) &= s(t) + v(t), \\
 y(t) &= \xi(t)z(t) + (1 - \xi(t))y(t-1).
 \end{aligned}$$

其中: 信号  $s(t) = [s_1(t), s_2(t)]^T$ ;  $w(t) = b(t)g(t)$  为输入白噪声;  $b(t)$  为 Bernoulli 白噪声, 满足  $\text{Prob}(b(t)=1) = \lambda$ ,  $\text{Prob}(b(t)=0) = 1 - \lambda$ ,  $\text{Prob}$  表示概率;  $g(t)$  是一个零均值、方差为  $Q_g$  且与  $b(t)$  相互独立的二维 Gaussian 白噪声; 观测白噪声  $v(t)$  与  $w(t)$  相关, 满足  $v(t) = cw(t) + \zeta(t)$ ,  $c$  为相关系数,  $\zeta(t)$  是零均值、方差为  $Q_\zeta$  的二维 Gaussian 白噪声. 求信号  $s(t)$  的滤波器  $\hat{s}(t|t)$ , 预报器  $\hat{s}(t|t-1)$  和平滑器  $\hat{s}(t|t+1)$ . 取

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{bmatrix} -0.8 & 0.1 \\ -2 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \\
 C_0 &= \begin{bmatrix} -1.3 & 1.1 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1.9 & -0.1 \\ -0.4 & 1.6 \end{bmatrix}, \\
 Q_w &= 0.01I_2, \quad Q_\zeta = 0.01I_2, \quad c = 0.9, \\
 \alpha &= 0.8, \quad \lambda = 0.3, \quad x(0) = 0, \quad P_0 = 0.1I_4,
 \end{aligned}$$

这里只给出第 2 个信号分量的仿真结果. 图 1 给出了信号分量  $s_2(t)$  的滤波器  $\hat{s}_2(t|t)$ , 图 2 给出了信号分量  $s_2(t)$  的稳态预报、滤波和平滑误差方差随收到率  $\alpha$  的变化情况. 由图 2 可见, 随着  $\alpha$  的增加, 信号的误差方差逐渐减小.

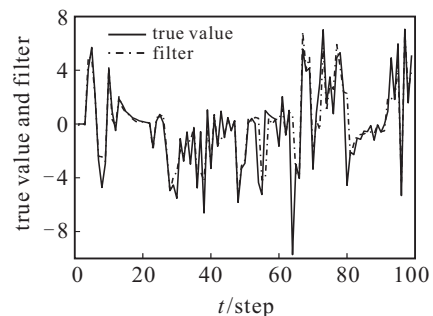


图 1 信号  $s_2(t)$  与滤波器  $\hat{s}_2(t|t)$

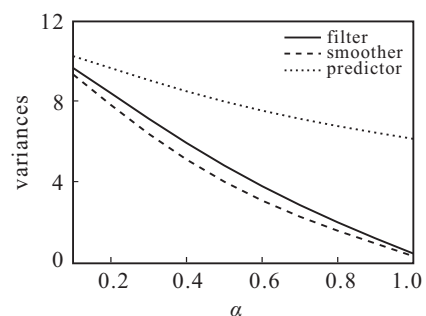


图 2 信号  $s_2(t)$  的估计误差方差随  $\alpha$  的变化情况

图3给出了本文算法与没有考虑数据丢失的经典 Kalman 滤波算法<sup>[1]</sup>基于 100 次 Monte-Carlo 仿真计算的均方误差 (MSE)。由图3可见, 当存在数据丢包时, 以往基于完整观测数据的最优滤波算法已经失去了最优性。图4给出了本文滤波器与文献 [12] 滤波器基于 100 次 Monte-Carlo 仿真计算的均方误差 (MSE)。由图4可见, 本文的滤波器具有更高的精度, 原因在于当存在数据丢失时, 文献 [12] 仅仅是观测噪声, 而本文则利用了以往收到的最新的观测数据。

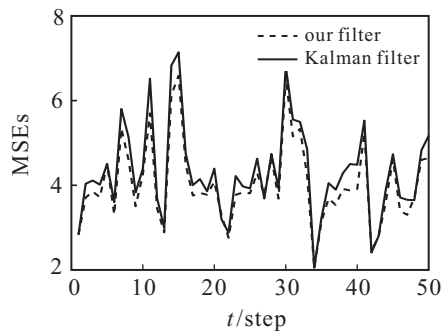


图3 本文滤波器和经典 Kalman 滤波器的MSEs比较

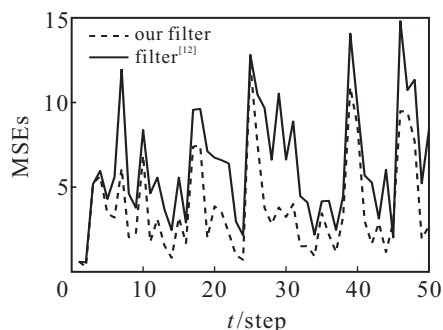


图4 本文滤波器与文献 [12] 滤波器的 MSEs 比较

## 5 结 论

本文将具有数据丢包的 ARMA 信号估计问题转化为具有丢包的状态空间模型的状态和白噪声估计问题, 利用射影理论在线性最小方差意义下给出了状态估值器和白噪声估值器, 包括滤波器、预报器和平滑器, 进而得到了具有丢包的 ARMA 信号估值器。从仿真结果可以看出: 当存在数据丢失时, 本文算法与以往文献基于完整数据的估计算法相比, 更具最优性和有效性; 当没有数据丢失时, 本文算法即为基于完整观测数据下的估计算法。

## 参考文献(References)

[1] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 197-200.  
(Deng Z L. Kalman filtering and Wiener filtering[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001: 197-200.)

[2] 邓自立, 高媛. 多通道 ARMA 信号信息融合 Wiener 滤波器[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(9): 1416-1419.  
(Deng Z L, Gao Y. Information fusion Wiener filter for multi-channel ARMA signals[J]. J of Electronics and Information Technology, 2005, 27(9): 1416-1419.)

[3] 高守婉, 唐功友. 具有随机丢包网络控制系统的镇定[J]. 控制与决策, 2011, 26(5): 690-694.  
(Gao S W, Tang G Y. Stabilization for networked control systems with random packet dropouts[J]. Control and Decision, 2011, 26(5): 690-694.)

[4] Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 1453-1464.

[5] Sahebsara M, Chen T, Shah S L. Optimal  $H_2$  filtering with random sensor delay multiple packet dropout and uncertain observations[J]. Int J of Control, 2007, 80(2): 292-301.

[6] Sun S L, Xie L H, Xiao W D, et al. Optimal filtering for systems with multiple packet dropouts[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II, 2008, 55(7): 695-699.

[7] Sun S L. Optimal estimators for systems with finite consecutive packet dropouts[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(7): 557-560.

[8] Sun S L, Xie L H, Xiao W D, et al. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1333-1342.

[9] Guo G, Wang B F. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems with multiple packet dropouts[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 767-772.

[10] 潘爽, 赵国荣, 高超, 等. 测量数据丢失的随机不确定系统鲁棒滤波递推算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 280-284.  
(Pan S, Zhao G R, Gao C, et al. Robust filter recursive algorithm for stochastic uncertain systems with missing measurements[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 280-284.)

[11] 王武, 杨富文, 詹耀清. 测量数据丢失的随机不确定离散系统的鲁棒  $H_2$  状态估计[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 439-445.  
(Wang W, Yang F W, Zhan Y Q. Robust  $H_2$  state estimation for stochastic uncertain discrete-time system with missing measurements[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(3): 439-445.)

[12] 鄢守玮, 孙书利, 屈冬梅. 不确定观测 ARMA 信号滤波器设计[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(22): 5396-5400.  
(Yan S W, Sun S L, Qu D M. Filter design for ARMA signals with uncertain observations[J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(22): 5396-5400.)