

基于改进等效平面法的结构系统可靠性分析¹⁾

陈卫东²⁾ 李建操

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 将复相关理论引入到结构系统可靠性分析中, 推导了并联体系等效功能函数的递推公式, 提出了复相关等效平面法. 解决了等效平面法等效原则中不包含相关性信息的问题, 克服了等效平面法计算并联体系误差大的缺点. 通过算例证明该方法有较高的计算精度, 优于传统结构系统可靠性分析方法, 适合大型结构系统的可靠性分析.

关键词 结构系统可靠性, 可靠度, 复相关系数, 等效平面法

中图分类号: TB114.3 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)04-0797-05

引 言

结构系统可靠度的近似算法, 如限界法^[1]、抽样法^[2-3]、概率网络评估技术法^[4]、基于条件概率的逐步降维方法^[5]、发生函数法^[6]等只能计算体系可靠度, 不能给出体系对应的功能函数, 不利于进一步开展结构系统可靠性分析. 而新型代理模型^[7-8]给出体系功能函数的同时具有很高计算精度, 但对大型结构系统而言这类算法的耗时往往难以忍受.

等效平面法^[9]可以给出体系等效功能函数, 改进后计算量较小, 在结构系统可靠性分析中具有巨大的应用价值. 但对并联体系计算精度低的缺点严重阻碍了其发展和应用. 等效原则中不包含相关性信息, 导致等效过程中涉及的相关性计算缺少理论依据, 是等效平面法计算误差大的主要原因.

针对这一问题, 将复相关的原理引入到可靠性分析中, 提出了复相关等效平面法. 用等效前的复相关系数表示等效面与其余状态面的相关性, 克服了等效原则中不包含相关性信息的缺点, 有更高的计算精度, 并可方便获得并联体系的等效功能函数.

1 基本原理

等效平面的基本原理是用一个极限状态平面代替多个极限状态面, 等效前后具有相同的失效概率和随机变量对可靠性指标的敏感度^[9].

记 Z_i^{i-1} ($i = 2, 3, \dots, m$) 为事件 $(Z_{i-1}^{i-2} \leq 0 \cap$

$Z_i^0 \leq 0)$ 的等效功能函数, 则并联体系失效概率

$$\begin{aligned} P_f &= P(Z_2^1 \leq 0 \cap Z_3^0 \leq 0 \cap \dots \cap Z_m^0 \leq 0) = \\ &\dots = \\ &P(Z_{m-1}^{m-2} \cap Z_m^0 \leq 0) = P(Z_m^{m-1} \leq 0) \end{aligned} \quad (1)$$

同理, 串联体系有

$$\begin{aligned} P_f &= P(Z_1^0 \leq 0 \cup Z_2^0 \leq 0 \cup \dots \cup Z_m^0 \leq 0) = \\ &\dots = \\ &P(Z_{m-1}^{m-2} \cup Z_m^0 \leq 0) = P(Z_m^{m-1} \leq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

2 复相关等效平面法

2.1 串联和并联体系可靠性指标

设 E_i 代表 $Z_i^0 \leq 0$ 事件, β_i 为对应的可靠性指标; E^j ($j \geq 2$) 代表 $(Z_1^0 \leq 0 \cap Z_2^0 \leq 0 \cap \dots \cap Z_j^0 \leq 0)$ 事件, β^j 为对应可靠性指标; $E^1 \Leftrightarrow E_1$, 则

$$\beta_i = -\Phi^{-1}(P(E_i)), \quad \beta^{(j)} = -\Phi^{-1}(P(E^{(j)})) \quad (3)$$

式中, $\Phi(\bullet)$ 为标准正态变量的分布函数.

并联体系失效概率、可靠性指标

$$\begin{aligned} P_f &= P\left(\bigcap_{i=1}^m E_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i \cap E_m\right) = \\ &P\left(E^{(m-1)} \cap E_m\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\beta^m = -\Phi^{-1}(P_f) = -\Phi^{-1}\left(\Phi_2(-\beta^{(m-1)}, -\beta_m; \rho)\right) \quad (5)$$

式中, ρ 为事件 $E^{(m-1)}$ 与 E_m 之间的相关性, 下同.

2011-11-11 收到第 1 稿, 2012-02-11 收到修改稿.

1) 中央高校基本科研业务费资助项目 (HEUCFZ1126).

2) E-mail: chenweidong@hrbeu.edu.cn

由概率论可知, 任意事件 A 和 B 有如下公式

$$\begin{aligned}
P(A \leq 0 \cup B \leq 0) = \\
P(A \leq 0) + P(B \leq 0) - P(A \leq 0 \cap B \leq 0)
\end{aligned} \tag{6}$$

串联体系失效概率、可靠性指标

$$P_f = P(E^{(m-1)}) + P(E_m) - P(E^{(m-1)} \cap E_m) \tag{7}$$

式中, E^j 代表 $(Z_1^0 \leq 0 \cup Z_2^0 \leq 0 \cup \dots \cup Z_j^0 \leq 0)$ 事件.

$$\begin{aligned}
\beta^m = -\Phi^{-1}(\Phi(-\beta^{(m-1)}) + \Phi(-\beta_m) - \\
\Phi_2(-\beta^{(m-1)}, -\beta_m; \rho))
\end{aligned} \tag{8}$$

关于 ρ 的计算将在 2.3 节讨论.

2.2 并联体系等效功能函数

设并联体系 m 个单元的线性功能函数为

$$Z_i^0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}U_j + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{9}$$

式中, U_j 为相互独立的标准正态变量; $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ 为单位向量.

并联体系的失效概率可写为

$$P_f = \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = P\left(\bigcap_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}U_j + \beta_i < 0\right) \tag{10}$$

式中, $\boldsymbol{\rho}$ 为元素 $\rho_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}$ 组成的相关系数矩阵.

设并联体系的等效功能函数为

$$Z^e = \sum_{j=1}^n a_j^e U_j + \beta^e \tag{11}$$

给标准正态变量 U_j 一个微增量 ε_j , 则有

$$\beta^e(\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^n a_j^e \varepsilon_j + \beta^e \tag{12}$$

由等效原则, 并归一化后有

$$\beta^e = \beta^m, \quad a_j^e = \frac{\partial \beta^m}{\partial U_j} \left/ \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \beta^m}{\partial U_k} \right)^2 \right]^{1/2} \right. \tag{13}$$

对式 (5) 求偏导

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \beta^m}{\delta U_j} = \frac{1}{\varphi(\beta^m)} \left\{ \frac{\delta \Phi_2[(-\beta^{(m-1)}, -\beta_m; \rho)]}{\delta \beta^{(m-1)}} \frac{\delta \beta^{(m-1)}}{\delta U_j} + \right. \\
\left. \frac{\delta \Phi_2[(-\beta^{(m-1)}, -\beta_m; \rho)]}{\delta \beta_m} \frac{\delta \beta_m}{\delta U_j} \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

由式 (9) 和式 (11) 可得

$$\frac{\delta \beta^{(m-1)}}{\delta U_j} = a_j^{m-1}, \quad \frac{\delta \beta_m}{\delta U_j} = a_{mj} \tag{15}$$

由二维标准正态分布函数的表达式可得

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\delta \Phi_2}{\delta \beta^{(m-1)}} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \Phi \cdot \\
&\left(-\frac{\beta_m - \rho \beta^{(m-1)}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \varphi(\beta^{(m-1)}) \\
\frac{\delta \Phi_2}{\delta \beta_m} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \Phi \cdot \\
&\left(-\frac{\beta^{(m-1)} - \rho \beta_m}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \varphi(\beta_m)
\end{aligned} \right\} \tag{16}$$

只要确定事件 $E^{(m-1)}$ 与事件 E_m 之间的相关系数 ρ , 就可求解并联体系的等效功能函数.

2.3 相关系数计算

ρ 描述的是事件 $E^{(m-1)}$ 与事件 E_m 之间的相关性. 对于一个变量和一组变量间的相关程度, 可以用 x_1 与 x_2, x_3, \dots, x_p 的一个线性组合的相关系数来描述, 称为复 (多重) 相关系数 [10]. 记作 $\rho_{1 \bullet 2, \dots, p}$, 有

$$\rho_{1 \bullet 2, \dots, p} = \max_{l \neq 0} \rho(x_1, \mathbf{l}^T \mathbf{x}_2) = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_{21}^T \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{21}}{\sigma_{11}} \right)^{1/2} \tag{17}$$

功能函数的均方差为 1, 所以协方差 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与相关系数 $\boldsymbol{\rho}$ 相等, 对相关系数矩阵剖分如下

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\rho} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 1 \end{array} \right) \tag{18}$$

$\boldsymbol{\rho} = \rho_{1,2,\dots,m-1 \bullet m}$ 可通过下式求解

$$\rho_{1,2,\dots,m-1 \bullet m} = \rho_{m \bullet 1,2,\dots,m-1} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{1/2} \tag{19}$$

3 算例分析

3.1 计算精度分析

算例 1 假设存在有如下 n 个功能函数的体系

$$g_i = ax_0 + x_i + b, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a = \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}, \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\rho}}$$

其中, (x_0, x_1, \dots, x_i) 为相互独立的标准正态变量.

图 1 和图 2 分别给出了当 $\beta = 2.5, 3.0, 3.5$, $n = 10$, 相关系数 $\rho = 0 \sim 1.0$ 时, 将数值积分结果作为准确值, 该方法的相对误差.

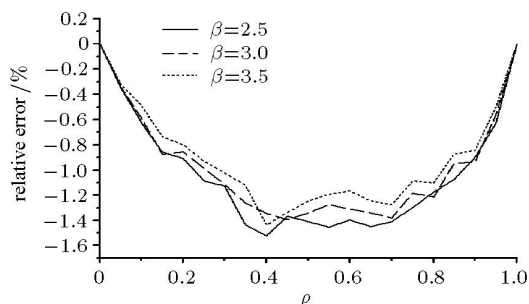


图 1 并联体系相对误差与 ρ 关系

Fig.1 Relation between the relative error of parallel system and ρ

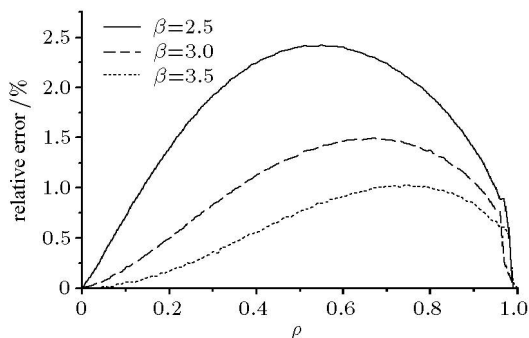


图 2 串联体系相对误差与 ρ 关系

Fig.2 Relation between the relative error of series system and ρ

对于并联体系, 图 1 相对误差曲线并不光滑, 但总体变化趋势较明显, 随着 β 的降低误差变大, $\beta = 2.5$ 的最大误差为 -1.5% , 最大误差均出现在 $\rho = 0.4$ 附近, 相对误差均为负值, 说明计算结果是偏保守的; 对于串联体, 图 2 曲线较光滑, 变化趋势明显, 随着 β 的降低误差变大, $\beta = 2.5$ 的最大误差为 2.3% , 且最大误差点随 β 的升高向 ρ 较大方向偏移, 相对误差均为正, 说明计算结果是偏危险的.

当 $\beta = 1.0, \beta = 1.5$ 和 $\beta = 2.0, n = 5$ 体系为并联时, 该方法与 MC 模拟 10^8 次结果的相对误差见图 3.

图 3 相对误差曲线变化趋势与图 1 完全相符, 最大相对误差 -2.6% , 进一步证明了复相关等效平

面法对并联体系可靠性指标较高的计算精度. 由此, 说明本文算法在不同可靠性指标和相关系数下, 计算结果稳定, 精确度是较高的.

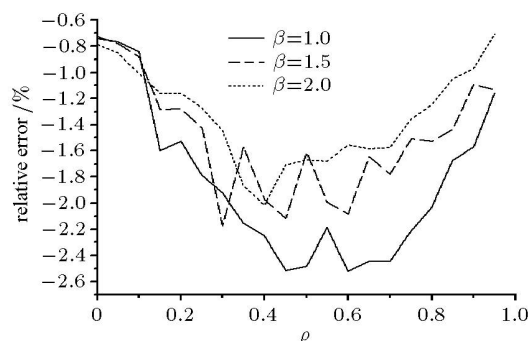


图 3 并联体系相对误差与 ρ 关系

Fig.3 Relation between the relative error of parallel system and ρ

结合图 1 和图 3, 对并联体系取 $\beta = 0.5$, 误差最大位置 $\rho = 0.4, n = 5 \sim 50$ 时复相关等效平面法与 MC 模拟 10^8 次结果的相对误差随 n 变化见图 4.

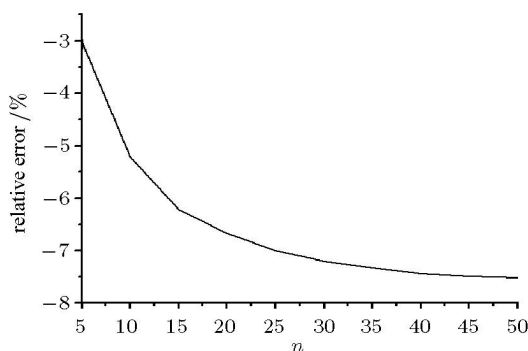


图 4 并联体系相对误差与 n 关系

Fig.4 Relation between the relative error of parallel system and n

图 4 中, 随并联体系单元个数 n 的增加, 相对误差变大, 相对误差的变化幅度趋于平缓, 特别是在 n 大于 40 以后有较明显收敛的趋势. 说明该算法, 即使计算庞大的并联体系也能获得很高的计算精度, 且计算精度不会随并联体系的增大而无限降低.

对串联体系取 $\beta = 3.0$, 误差最大位置 $\rho = 0.6, n = 5 \sim 50$ 时复相关等效平面法与 MC 模拟 10^8 次结果的相对误差随 n 变化见图 5. 图中, 曲线虽没有明显随 n 增加趋于平缓的趋势, 但最大误差只有 4% .

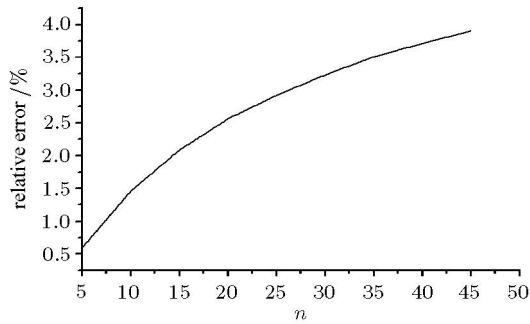


图 5 串联体系相对误差与 n 关系
Fig.5 Relation between the relative error of series system and n

3.2 典型算例分析

算例 2 图 6 所示超静定 16 杆桁架结构系统, 载荷 $P_1 = P_2 = P_3$ 均值为 44.45 kN, 变异系数为 0.1, 载荷之间相互独立. 杆件拉压屈服应力均值为 276 MPa, 变异系数为 0.05, 材料弹性模量 206 GPa. 杆件共 8 种型号, 同型号杆件完全相关, 杆件型号见表 1.

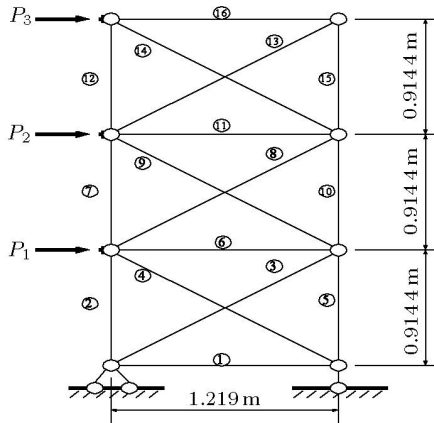


图 6 16 杆超静定桁架
Fig.6 Indeterminate truss contains 16 members

表 1 杆件型号表
Table 1 The model of member bar

Type	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
serial number	1	2	3	4	5	6	7	8
area/cm ²	3.71	8.69	4.72	1.30	3.89	3.00	1.38	0.94

结构系统可靠性分析常用处理方法是基于式

$$P_f = P\left(\bigcap_{i=1}^m E_i\right) \approx \min_{i \neq j; i, j \in (1, 2, \dots, m)} P(E_i \cap E_j)$$

近似计算失效模式的可靠性指标; 利用失效路径中

最后一个功能函数近似作为模式功能函数. 为方便叙述, 将这种处理方法简记为 M1. 复相关等效平面法缩写为 MCEP. MCEP 法计算得结构系统 6 个主要失效模式的等效功能函数见表 2. 对该结构系统, 杆件 7 和杆件 11 失效后, 残余结构中杆件的失效概率极高. 由可靠性理论可知, 失效路径中可靠性较低的失效元对模式可靠性指标影响较低, MCEP 法得模式 5 等效功能函数符合理论分析结果.

表 2 失效模式等效功能函数

Table 2 Failure mode of equivalent function

Failure mode	Equivalent function
mode 1	$Z^e = -0.019P_1 + 0.063P_2 + 0.900P_3 - 0.430R_{12} + 0.005R_{13} + 2.355$
mode 2	$Z^e = -0.001P_1 + 0.004P_2 + 0.919P_3 - 0.356R_{12} + 0.167R_{16} + 2.705$
mode 3	$Z^e = 0.065P_1 + 0.441P_2 + 0.795P_3 - 0.254R_{12} - 0.324R_9 + 3.163$
mode 4	$Z^e = -0.110P_1 - 0.332P_2 - 0.829P_3 + 0.06R_{12} + 0.399R_7 - 0.026R_6 + 0.163R_2 + 4.098$
mode 5	$Z^e = 0.062P_1 + 0.328P_2 + 0.750P_3 - 0.571R_7 + 3.821$
mode 6	$Z^e = -0.134P_1 + 0.081P_2 + 0.615P_3 - 0.669R_7 + 0.386R_3 + 4.744$

M1, MCEP 和 MC (模拟 10^8 次) 3 种方法计算结果见表 3 (MC 作为准确值计算相对误差). MCEP 法相对误差 0.09%, 精度远高于 M1 法的 -2.05%.

表 3 失效模式及结构系统可靠性分析结果

Table 3 Failure mode and reliability analysis of structural system

	Reliability index β			Relative error / %	
	M1	MCEP	MC	M1	MCEP
mode1	2.355	2.355	2.355	0.0	0.0
mode2	2.705	2.705	2.705	0.0	0.0
mode3	3.161	3.163	3.183	-0.69	-0.63
mode4	3.815	4.098	4.119	-7.38	-0.51
mode5	3.816	3.821	3.846	-0.78	-0.65
mode6	4.218	4.744	4.754	-11.27	-0.21
system	2.298	2.348	2.346	-2.05	0.09

表 3 中, 模式 1 和模式 2 用 3 种方法获得的结果相同, 是因为模式 1 和模式 2 失效路径长度为 2, M1 和 MCEP 法通过求解二维数值积分获得的结果即为准确值; 模式 3 和模式 5 的 M1 法相对误差略大于 MCEP 法, 且均为负, 符合 M1 和 MCEP 法属偏保守算法的特点, M1 法更保守, 是因为该法

完全忽略掉了部分失效元; 模式 4 和模式 6 失效路径长度为 4, MCEP 与 MC 法结果比较接近, M1 法误差较大, 说明随失效路径增长 M1 法越发保守, 而 MCEP 法计算误差受失效路径长度影响较小, 更适合大型结构系统可靠性分析.

4 结 论

(1) 复相关等效平面法计算效率、精度较高, 可以方便给出系统等效函数, 便于进一步可靠性分析;

(2) 该方法对串联体系计算结果偏危险, 对串联体系可靠性分析需慎用.

参 考 文 献

- 1 Zhang YC. Derivative fitting procedure for computing bivariate normal distribution and some applications. *Structural Safety*, 1994, 14(3): 173-183
- 2 Gillespie CS, Renshaw E. An improved saddle point approximation. *Math Biosci*, 2007, 208(2): 359-374
- 3 宋述芳, 吕震宙, 傅霖. 基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法. *力学学报*, 2007, 39(4): 564-570 (Song Shufang, Lü Zhenzhou, Fu Lin. Reliability sensitivity algorithm based on line sampling. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(4): 564-570 (in Chinese))
- 4 Aksu G, Ali R. Free vibration analysis of stiffened plates using finite difference method. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, 44: 147-158
- 5 Hohenbichler M, Rackwitz R. First-order concepts in system reliability. *Struct Saf*, 1983, 1: 177-188
- 6 周金宇, 谢里阳. 结构系统可靠性分析的发生函数法. *中国科学: 技术科学*, 2009, 52(10): 2849-2858 (Zhou Jinyu, Xie Liyang. Generating function approach to reliability analysis of structural systems. *Scientia Sinica (Technologica)*, 2009, 52(10): 2849-2858 (in Chinese))
- 7 马超, 吕震宙. 基于支持向量机回归的结构系统可靠性及灵敏度分析方法. *固体力学学报*, 2007, 28(4): 415-419 (Ma Chao, Lü Zhenzhou. Structural system reliability and sensitivity analysis based on support vector machine regression. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, 28(4): 415-419 (in Chinese))
- 8 郑春青, 吕震宙. 改进的 Kriging 法在计算结构可靠度中的应用. *机械强度*, 2009, 31(4): 615-619 (Zheng Chunqing, Lü Zhenzhou. Application of an improved Kriging technique in reliability. *Journal of Mechanical Strength*, 2009, 31(4): 615-619 (in Chinese))
- 9 Gollwitzer S, Rackwitz R. Equivalent components in first-order system reliability. *Reliability Engineering*, 1983, 5(2): 99-115
- 10 王学民. 应用多元分析 (第三版). 上海: 上海财经大学出版社, 2009 (Wang Xuemin. Applied Multivariate Analysis (3rd edn). Shanghai University of Finance and Economics Press, 2009 (in Chinese))

DOI: 10.6052/0459-1879-11-328

(责任编辑: 刘希国)

ADVANCED EQUIVALENT PLANE METHOD FOR STRUCTURAL SYSTEM RELIABILITY¹⁾

Chen Weidong²⁾ Li Jiancao

(College of Astronautics and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract The theory of multiple correlations was adopted in structural system reliability analysis for the first time and the recursive formula of equivalent function for parallel system was deduced, and multiple correlation-equivalent plane method was presented. The method solves the problem that equivalent principles of equivalent plane method don't include the correlation information, and overcomes the lack of great error of equivalent plane method used in parallel system reliability. The result proves that the method has high accuracy and is better to traditional structure system analysis method, and is suitable for large structural system reliability analysis.

Key words structural system reliability, reliability, multiple correlation coefficients, equivalent plane method

Received 11 November 2011, revised 11 February 2012.

1) The project was supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (HEUCFZ1126).

2) E-mail: chenweidong@hrbeu.edu.cn