

文章编号: 1001-0920(2013)02-0264-05

## 基于核和信息域的区间灰数 Verhulst 模型

杨德岭, 刘思峰, 曾 波

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

**摘 要:** 针对传统 Verhulst 模型的建模对象仅局限于实数序列这一缺陷, 对 Verhulst 模型进行了拓展. 首先, 对“灰度不减”公理进行延伸, 得到了“信息域不减”的推论; 然后, 构建核序列的 Verhulst 模型, 并以信息域不减推论为依据, 以核为中心推导区间灰数上(下)界的时间响应式; 最后, 通过实例演示了模型的计算步骤. 所进行的研究对于丰富和完善灰色预测模型理论体系、拓展灰色预测模型的应用范围具有积极意义.

**关键词:** 灰色系统理论; Verhulst 模型; 区间灰数序列; 信息域不减

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

## Verhulst model of interval grey number based on kernel and information field

YANG De-ling, LIU Si-feng, ZENG Bo

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.  
Correspondent: YANG De-ling, E-mail: zzb8913@163.com)

**Abstract:** Modeling objects of traditional Verhulst model are only suitable for real number sequences. Therefore, an expanding study of Verhulst model is given. Firstly, the axiom of grey degree not-reducing is expanded, and the conclusion of information field not-reducing is obtained. Then a Verhulst model based on the kernel sequence of interval grey numbers is obtained. On the foundation of the conclusion of information field not-reducing, this paper deduces the time response formulas of lower limit point and upper limit point of interval grey numbers through the centers of kernels of interval grey numbers. Finally, an example demonstrates the calculation process of the new model. Then proposed model has a vital significance for enriching and perfecting the grey prediction model theory system, and extending the applied scope of grey prediction model.

**Key words:** grey system theory; Verhulst model; interval grey number sequence; information field not-reducing

## 0 引 言

灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分, 也是预测理论体系中一个新的研究分支, 它主要针对现实世界中大量存在的灰色不确定性问题, 利用少量有效数据和灰色不确定性数据, 通过序列的累加生成揭示系统未来发展趋势<sup>[1]</sup>. 经过近 30 年的发展, 灰色预测模型已经在许多领域得到广泛应用, 成功地解决了生产生活和科学研究中的大量实际问题, 灰色预测模型也由原始的 GM(1, 1) 扩展出 GM(1, N), GM(2, 1), DGM(1, 1) 和 Verhulst 模型等多种新的预测模型类别<sup>[2-4]</sup>, 预测类型也拓展到数列预测、区间预测、灾变预测和波形预测等方面, 展现出了重要的理论价值

和实际应用价值<sup>[5]</sup>.

Verhulst 模型主要用来描述具有饱和状态的过程, 常用于人口预测、生物生长、繁殖预测和产品经济寿命预测等. 目前 Verhulst 模型的既有研究成果<sup>[6-9]</sup>只能构建基于实数序列的预测模型, 而对于灰色系统理论中更加常见的区间灰数序列则无能为力. 随着科学技术的发展, 人类所涉及的系统越来越复杂, 表征系统的信息灰度也越来越大, 在这样的大背景下, 以实数序列为建模对象的传统 Verhulst 模型及其优化模型, 已经无法满足系统建模的实际需要. 因此, 构建面向区间灰数序列的 Verhulst 模型, 对于拓展灰色预测模型的应用范围具有重要的意义.

收稿日期: 2011-08-17; 修回日期: 2011-12-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271226); 重庆自然科学基金项目(cstc2012jjA00017); 教育部人文社科研究项目(11YJC630273); 重庆市教委人文社科研究重点项目(11SKH03); 重庆市教委科学技术研究项目(KJ120706).

作者简介: 杨德岭(1963—), 男, 教授, 博士生, 从事教育经济与管理的研究; 刘思峰(1955—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统预测、决策及评价等研究.

目前, 灰代数运算体系尚不完善, 灰数间的代数运算会导致结果灰度增加, 从而增大直接构建面向区间灰数序列 Verhulst 模型的难度. 文献 [10] 提出了区间灰数序列的灰数带及灰数层的基本概念, 通过计算灰数层的面积和灰数层中位线中点的坐标, 在不损失已有灰数信息的前提下将区间灰数序列转换成实数序列, 并在此基础上构建了基于区间灰数序列的灰色预测模型<sup>[11]</sup>和灰色关联度模型<sup>[12]</sup>. 文献 [13] 以区间灰数的“核”为基础, 以“灰度不减公理”为理论依据构建了区间灰数序列的 GM(1, 1) 模型. 本文受此启发, 借助文献 [13] 的建模思想构建面向区间灰数序列的 Verhulst 模型.

### 1 实数序列的 Verhulst 模型

**定义 1** 设  $X^{(0)}$  为原始数据序列,  $X^{(1)}$  为  $X^{(0)}$  的 1-AGO 序列,  $Z^{(1)}$  为  $X^{(1)}$  的紧邻均值生成序列, 则称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^\alpha \quad (1)$$

为 GM(1, 1) 幂模型.

**定义 2** 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^\alpha \quad (2)$$

为 GM(1, 1) 幂模型的白化方程.

**定理 1** GM(1, 1) 幂模型之白化方程的解为

$$x^{(1)}(t) = \left\{ e^{-(1-\alpha)at} \left[ (1-\alpha) \int b e^{(1-\alpha)at} dt + c \right] \right\}^{1/(1-\alpha)} \quad (3)$$

**定理 2** 设  $X^{(0)}, X^{(1)}, Z^{(1)}$  如定义 1 所述,

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^\alpha \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^\alpha \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^\alpha \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

则 GM(1, 1) 幂模型参数列  $\hat{a} = [a, b]^T$  的最小二乘估计为  $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ .

**定义 3** 当  $\alpha = 2$  时, 称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 \quad (4)$$

为灰色 Verhulst 模型.

**定义 4** 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^2 \quad (5)$$

为灰色 Verhulst 模型的白化方程.

**定理 3** 1° Verhulst 白化方程的解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{e^{at} \left[ \frac{1}{x^{(1)}(0)} - \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \right]} = \frac{ax^{(1)}(0)}{e^{at} [a - bx^{(1)}(0)(1 - e^{-at})]},$$

$$x^{(1)}(t) = \frac{ax^{(1)}(0)}{bx^{(1)}(0) + (a - bx^{(1)}(0))e^{at}}; \quad (6)$$

2° 灰色 Verhulst 模型的时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{ax^{(1)}(0)}{bx^{(1)}(0) + (a - bx^{(1)}(0))e^{ak}}. \quad (7)$$

在实际问题中, 常遇到原始数据 (实数) 本身呈  $S$  的过程. 这时, 通常取原始数据为  $X^{(1)}$ , 其 1-IAGO 为  $X^{(0)}$ , 并建立 Verhulst 模型直接对  $X^{(1)}$  进行模拟.

## 2 模型构建

### 2.1 基本概念

**定义 5** 设灰数  $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\underline{a} < \bar{a}$ ,  $\underline{a}$  和  $\bar{a}$  分别称为  $\otimes$  的上界和下界. 在缺乏  $\otimes$  取值分布信息的情况下:

1) 若  $\otimes$  为连续灰数, 则称  $\tilde{\otimes} = \frac{(\underline{a} + \bar{a})}{2}$  为灰数  $\otimes$  的核;

2) 若  $\otimes$  为离散灰数,  $a_i \in [\underline{a}, \bar{a}]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为灰数  $\otimes$  的所有可能取值, 则称  $\tilde{\otimes} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  为灰数  $\otimes$  的核<sup>[13]</sup>.

**定义 6** 设灰数  $\otimes$  产生的背景或者论域为  $\Omega$ ,  $\mu(\otimes)$  为  $\otimes$  所取数域的测度, 则称

$$g^\circ(\otimes) = \frac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega)}$$

为灰数  $\otimes$  的灰度<sup>[13]</sup>.

**定义 7** 在  $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$  中, 根据定义 5 和定义 6, 由每个灰元的“核”和“灰度”所构成的序列分别称为  $X(\otimes)$  的核序列  $X(\tilde{\otimes})$  和灰度序列  $G^\circ(\otimes)$ , 记作

$$X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_1, \tilde{\otimes}_2, \dots, \tilde{\otimes}_n),$$

$$G^\circ(\otimes) = (g^\circ(\otimes_1), g^\circ(\otimes_2), \dots, g^\circ(\otimes_n)).$$

**定义 8** 由区间灰数  $\otimes_k \in [a_k, b_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 构成的序列称为区间灰数序列, 记作  $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ ; 区间灰数  $\otimes_k$  的上界点  $b_k$  与下界点  $a_k$  的差值称为区间灰数  $\otimes_k$  的信息域 (或区间距), 记为  $d_k = b_k - a_k$ ; 区间灰数序列  $X(\otimes)$  中所有灰元的信息域  $d_k$  所构成的序列称作  $X(\otimes)$  的信息域序列, 记作  $X_d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

**定义 9** 以区间灰数的核序列和灰度序列为基础构建的灰色预测模型, 简称为区间灰数的“核-灰”预测模型.

**公理 1** (灰度不减公理) 两个灰度不同的区间灰数进行和、差、积、商运算时, 运算结果的灰度不小于灰度较大的区间灰数的灰度<sup>[14]</sup>.

**推论 1** 两个信息域不同的区间灰数进行和、差、积、商运算时, 运算结果的信息域不小于信息域较大的区间灰数的信息域.

**证明** 设区间灰数  $\otimes_k \in [a_k, b_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

产生的背景或论域为  $\Omega$ , 其信息域为  $d_k$ , 则  $\otimes(t_k)$  的灰度为  $g^\circ(\otimes_k) = d_k/\mu(\Omega)$ . 同理,  $\otimes_r \in [a_r, b_r]$  的灰度  $g^\circ(\otimes_r) = d_r/\mu(\Omega)$ ;  $\otimes_k$  与  $\otimes_r$  的和、差、积、商运算的结果记为  $\otimes_{kr}$ . 则根据公理 1, 有

$$g^\circ(\otimes_{kr}) \geq \max(g^\circ(\otimes_k), g^\circ(\otimes_r)) \rightarrow \frac{d_{kr}}{\mu(\Omega)} \geq \max\left(\frac{d_k}{\mu(\Omega)}, \frac{d_r}{\mu(\Omega)}\right) \rightarrow d_{kr} \geq \max(d_k, d_r).$$

从而推论 1 得以证明.  $\square$

与公理 1 相比, 推论 1 的优点在于: 在对区间灰数进行计算时, 不必已知区间灰数的论域, 这对“小样本、贫信息”的灰色系统而言极具价值. 根据推论 1, 为了构建区间灰数序列 Verhulst 预测模型, 通常可将预测结果的信息域定义为建模序列所有灰元中信息域较大的区间灰数的信息域.

区间灰数序列的 Verhulst 模型的基本思路是: 首先, 建立基于区间灰数核序列的 Verhulst 模型, 实现区间灰数“核”的预测; 然后, 以“核”为基础, 以区间灰数序列中信息域较大的区间灰数的信息域作为预测结果的信息域(推论 1), 并以此为基础推导区间灰数上界和下界的预测表达式, 进而建立区间灰数的 Verhulst 预测模型.

### 2.2 核序列的 Verhulst 模型

设  $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ , 其核序列  $X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_1, \tilde{\otimes}_2, \dots, \tilde{\otimes}_n)$ , 则由式 (7) 可得

$$\hat{\tilde{\otimes}}_{k+1}^{(1)} = \frac{a\tilde{\otimes}_1}{b\tilde{\otimes}_1 + (a - b\tilde{\otimes}_1)e^{ak}}. \quad (8)$$

其中:  $Z^{(1)}$  为  $X(\tilde{\otimes})$  的紧邻均值生成序列,

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2 \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \tilde{\otimes}_2^{(0)} \\ \tilde{\otimes}_3^{(0)} \\ \vdots \\ \tilde{\otimes}_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\hat{a} = [a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

### 2.3 信息域确定

根据推论 1, 通常可将区间灰数序列  $X(\otimes)$  中信息域较大的区间灰数的信息域作为预测结果的信息域. 设  $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ , 信息域序列  $X_d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 则区间灰数  $\hat{\otimes}(t_{k+1})$  预测值的信息域

$$\hat{d}_{k+1} = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_n. \quad (9)$$

### 2.4 模型推导

设  $\hat{\otimes}_{k+1}^{(1)} \in [\hat{a}_{k+1}, \hat{b}_{k+1}]$ , 根据定义 (8), 得

$$\hat{b}_{k+1} - \hat{a}_{k+1} = \hat{d}_{k+1}. \quad (10)$$

又根据定义 5, 得

$$\hat{\tilde{\otimes}}_{k+1}^{(1)} = \frac{(\hat{a}_{k+1} + \hat{b}_{k+1})}{2}. \quad (11)$$

联立式 (8), (10) 和 (11) 组合方程组, 得

$$\begin{cases} \hat{b}_{k+1} - \hat{a}_{k+1} = \hat{d}_{k+1}, \\ \hat{\tilde{\otimes}}_{k+1}^{(1)} = \frac{(\hat{a}_{k+1} + \hat{b}_{k+1})}{2}, \\ \hat{\tilde{\otimes}}_{k+1}^{(1)} = \frac{a\tilde{\otimes}_1}{b\tilde{\otimes}_1 + (a - b\tilde{\otimes}_1)e^{ak}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}_{k+1} = \frac{a\tilde{\otimes}_1}{b\tilde{\otimes}_1 + (a - b\tilde{\otimes}_1)e^{ak}} - \frac{\hat{d}_{k+1}}{2}, \\ \hat{b}_{k+1} = \frac{a\tilde{\otimes}_1}{b\tilde{\otimes}_1 + (a - b\tilde{\otimes}_1)e^{ak}} + \frac{\hat{d}_{k+1}}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

式 (12) 称为基于区间灰数的 Verhulst 预测模型.

## 3 高层住宅沉降量的 Verhulst 预测

下面通过建立某高层住宅工程沉降量的 Verhulst 模型来演示区间灰数序列 Verhulst 模型的建模步骤, 同时验证 Verhulst 模型在解决实际问题时的有效性和实用性.

根据表 1, 可得到区间灰数序列

$$X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3, \otimes_4, \otimes_5, \otimes_6, \otimes_7, \otimes_8, \otimes_9) = ([2.9, 3.5], [5.0, 5.4], [7.4, 8.2], [10.4, 10.8] \Rightarrow [14.5, 15.1], [18.9, 19.7], [24.5, 25.3] \Rightarrow [28.0, 28.6], [30.8, 31.6]).$$

表 1 某高层住宅工程沉降观测结果的区间灰数值

观测时间/d	45	90	135
沉降值/mm	[2.9, 3.5]	[5.0, 5.4]	[7.4, 8.2]
观测时间/d	180	225	270
沉降值/mm	[10.4, 10.8]	[14.5, 15.1]	[18.9, 19.7]
观测时间/d	315	360	405
沉降值/mm	[24.5, 25.3]	[28.0, 28.6]	[30.8, 31.6]

下面根据第 3 节所研究的有关内容, 构建区间灰数序列  $X(\otimes)$  的 Verhulst 模型.

Step 1: 核序列的生成.

由定义 5 可知,  $X(\otimes)$  的核序列  $X(\tilde{\otimes})$  为

$$X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_1, \tilde{\otimes}_2, \tilde{\otimes}_3, \tilde{\otimes}_4, \tilde{\otimes}_5, \tilde{\otimes}_6, \tilde{\otimes}_7, \tilde{\otimes}_8, \tilde{\otimes}_9) = (3.2, 5.2, 7.8, 10.6, 14.8, 19.3, 24.9, 28.3, 31.2).$$

区间灰数的“核”序列需满足 Verhulst 模型的建模条件, 这是构建区间灰数序列 Verhulst 模型的前

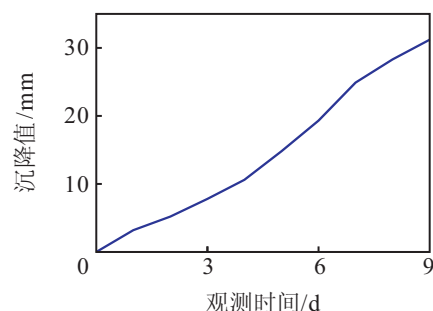


图 1 核序列  $X(\tilde{\otimes})$  的近似 S 形特征

提. Verhulst 模型主要用来描述具有饱和状态的过程, 即 S 形过程. 从  $X(\otimes)$  在二维平面坐标上的映射图形不难发现,  $X(\otimes)$  的核序列  $X(\otimes)$  表现出近似 S 形特征 (见图 1), 可以建立 Verhulst 模型.

Step 2: 核序列的 Verhulst 模型.

构建序列  $X(\otimes)$  的 Verhulst 模型, 应用曾波等<sup>[15]</sup> 提出的灰色建模软件计算模型参数、模型模拟误差和模型预测值, 结果如图 2 所示.



图 2 应用灰色建模软件计算 Verhulst 模型参数

由图 2 可知, 核序列的 Verhulst 模型为

$$\hat{\otimes}_{k+1}^{(1)} = \frac{1.5961}{0.0426 + 0.4561 \times e^{-0.4988 \times k}} \quad (13)$$

Step 3: 取数域的确定.

$$\begin{aligned} \hat{d}_{k+1} &= \\ d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_n &= \\ 0.6 \vee 0.4 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee & \\ 0.8 \vee 0.6 \vee 0.8 &= 0.8. \end{aligned}$$

Step 4: 模型构建.

由式 (12) 可得

$$\begin{cases} \hat{a}_{k+1} = \frac{a_{\otimes_1}}{b_{\otimes_1} + (a - b_{\otimes_1})e^{ak}} - \frac{\hat{d}_{k+1}}{2} = \frac{1.5961}{0.0426 + 0.4561 \times e^{-0.4988 \times k}} - 0.4, \\ \hat{b}_{k+1} = \frac{a_{\otimes_1}}{b_{\otimes_1} + (a - b_{\otimes_1})e^{ak}} + \frac{\hat{d}_{k+1}}{2} = \frac{1.5961}{0.0426 + 0.4561 \times e^{-0.4988 \times k}} + 0.4. \end{cases} \quad (14)$$

Step 5: 预测.

由图 2 可知, 核序列 Verhulst 预测模型的平均相对误差为 2.4310%, 模型精度接近 I 级, 可用于预测.

预测结果如表 2 所示.

表 2 某高层住宅工程沉降量的预测值

项目	观测时间/d				
	450	495	540	595	640
核	34.9	35.8	36.4	36.8	37.1
沉降值/mm	[34.5, 35.3]	[35.4, 36.2]	[36.0, 36.8]	[36.4, 37.2]	[36.7, 37.5]

## 4 结 论

Verhulst 模型是灰色预测模型体系的重要组成部分. 该模型主要用于描述具有饱和状态的过程, 常用于人口预测、生物生长、繁殖预测和产品经济寿命预测等. 然而, 目前 Verhulst 模型只能构建基于实数序列的预测模型, 而对于灰色系统理论中更为常见的区间灰数序列则无能为力. 为此, 本文首先通过构建区间灰数核序列的 Verhulst 模型, 实现了区间灰数核的预测; 然后通过信息域不减推论对核进行拓展, 得到了区间灰数上界/下界的预测表达式, 进而构建了区间灰数序列的 Verhulst 模型; 最后将该模型应用于某高层住宅工程沉降量的预测, 其建模过程验证了新模型的有效性和实用性.

## 参考文献(References)

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System(UK), 1989, 1(1): 1-24.

- [2] 王丰效. 多变量非等间距 GM(1,  $m$ ) 模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 388-390.  
(Wang F X. Multivariable non-equidistance GM(1,  $m$ ) model and its applications[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(3): 388-390.)
- [3] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1, 1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.  
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)
- [4] 何文章, 吴爱弟. 估计 Verhulst 模型中参数的线性规划方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(8): 141-144.  
(He W Z, Wu A D. Estimation of Verhulst model parameter based on linear programming[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2006, 26(8): 141-144.)
- [5] Liu S F, Lin Y. Grey systems theory and applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 169-190.
- [6] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 无偏灰色 Verhulst 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10): 138-143.  
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Unbiased grey Verhulst model and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(10): 138-143.)
- [7] 刘威, 徐伟. 灰色 Verhulst 模型参数估计的一种新算法[J]. 计算机仿真, 2008(11): 119-123.  
(Liu W, Xu W. A new algorithm for estimating parameters of grey Verhulst model test[J]. Computer Simulation, 2008(11): 119-123.)
- [8] 李军亮, 肖新平, 廖锐全. 非等间隔 GM(1, 1) 幂模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 490-495.  
(Li J L, Xiao X P, Liao R Q. Non-equidistance GM(1, 1) power and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(3): 490-495.)
- [9] 偶昌宝, 俞亚南, 王战国. 不等时距灰色 Verhulst 模型及其在沉降预测中的应用[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2005, 4(1): 63-65.  
(Ou C B, Yu Y N, Wang Z G. Unequal interval grey verhulst model and its application to settlement prediction[J]. J of Southern Yangtze University: Natural Science Edition, 2005, 4(1): 63-65.)
- [10] 曾波, 刘思峰, 谢乃明. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1586.  
(Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model for interval grey number based on grey band and grey layer[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1586.)
- [11] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1820.  
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known whitenization weight function [J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1820.)
- [12] 曾波, 刘思峰, 孟伟. 基于空间映射的区间灰数关联度模型[J]. 系统工程, 2010, 28(8): 122-126.  
(Zeng B, Liu S F, Meng W. Incidence degree model of interval grey number based on space mapping[J]. Systems Engineering, 2010, 28(8): 122-126.)
- [13] 曾波. 基于核和灰度的区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 52-55.  
(Zeng B. Prediction model of interval grey number based on kernel and degree of greyness[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(4): 52-55.)
- [14] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.  
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "kernel" and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)
- [15] 曾波, 刘思峰. 灰色建模软件 V3.0[EB/OL]. (2010-05-10). <http://igss.nuaa.edu.cn/institute/>.  
(Zeng B, Liu S F. Grey modeling software V3.0[EB/OL]. (2010-05-10). <http://igss.nuaa.edu.cn/institute/>.)

(上接第263页)

- [15] 刘金琨. 滑模变结构控制 Matlab 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 5-7.  
(Liu J K. Matlab simulation for sliding mode control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 5-7.)
- [16] Man Zhi-hong, Yu Xing-huo. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[C]. Proc of the 35th Conf on Decision and Control. Kobe, 1996: 1146-1151.
- [17] Tie Lin, Cai Kai-yuan. A general form and improvement of fast terminal sliding mode[C]. Proc of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Ji'nan, 2010: 2496-2501.
- [18] Tian Bai-ling, Zong Qun. Optimal guidance for reentry vehicles based on indirect legendre pseudospectral method[J]. Acta Astronautica, 2011, 68(7): 1176-1184.