

# 含非理想空间棱柱铰的多体系统接触分析<sup>1)</sup>

齐朝晖<sup>2)</sup> 罗晓明 黄志浩

(大连理工大学工业装备与结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘要** 传统的接触分析方法通过物体间的相对运动确定接触位置. 将这种方法用于多体系统中铰内的接触分析时, 无论铰内间隙是否十分微小都必须解除铰的运动学约束, 从而导致求解效率和求解精度方面的诸多弊端. 基于铰约束反力与铰内接触力之间的力系等效关系, 以及铰内可能接触点运动之间内在的运动学关系, 以矩形截面的棱柱铰为例, 提出了一种对空间棱柱铰进行摩擦接触分析的方法, 可在不解除铰的运动学约束的前提下得到铰内接触模式和接触力. 数值算例验证了方法的可行性.

**关键词** 多体系统, 空间棱柱铰, 摩擦接触, 约束反力

中图分类号: O313.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)03-0570-09

## 引 言

多体系统中物体之间相对运动模式是由铰维持的, 因而铰所关联的两个物体不可避免地要在铰内发生接触. 一般情况下, 相互接触的两物体沿接触面法线和切线方向都具有一定的相对速度, 因而接触往往伴随着碰撞和摩擦. 忽略这些效应, 有时会使分析结果与实际明显不符.

物体间的接触是最常见的物理现象, 同时也是一个非常复杂的物理过程. 相关的研究主要集中在如下两个方面: 接触力模型和接触点的识别. 试图用一个简单的宏观定律描述涉及波的传播、反射, 能量转换、耗散等众多物理现象的碰撞过程是极其困难的, 因而接触力模型的研究在现有文献中占有很大的比例<sup>[1-3]</sup>. 离散接触力模型忽略碰撞的大部分细节, 借助于某种恢复系数(如法向速度恢复系数、法向冲量恢复系数以及能量恢复系数等)和摩擦定律确定碰撞结束后的系统状态<sup>[4-6]</sup>; 连续接触力模型用弹簧阻尼模拟接触过程, 并用赫兹接触理论近似相应的刚度和阻尼系数. 两种接触力模型虽然都含有对计算结果有明显影响但又难以确定的参数, 但也都成功地解决了很多实际问题. 接触点的识别则主要采用以下方法: 首先给出系统运动过程中全部可能接触点对, 用对应的缝隙函数检测可能接触点对之间的距离, 如果缝隙函数值为零则认为对应的

点对发生接触<sup>[7]</sup>. 这些研究加深了对接触过程的理解, 同时也形成了求解多体系统中接触问题的主流方法.

采用这种方法分析多体系统中铰内的接触时, 首先要解除铰的运动学约束, 将铰所关联的两个物体看作是自由物体, 通过物体的相对运动确定接触点的位置, 然后按照特定的接触力模型计算接触力<sup>[8-9]</sup>. 其优势在于可用统一的方法分析任意铰内的碰撞和摩擦效应, 但计算过程十分繁复, 并且常常遇到数值病态问题. 更为不合理的是: 当铰内间隙十分微小以至于碰撞效应可以忽略时, 这种方法不但不能获得更高的计算效率, 反而会因铰内物体的相对运动幅度与物体宏观运动幅度之间相差多个数量级而使数值性态变得更差.

针对这种困难, 文献[10]提出了一种方法, 可通过铰约束反力得到铰内接触点位置及其接触力大小, 而不必实际计算出铰内物体的相对运动, 并且已经用于旋转铰、万向节、球铰以及圆柱铰内的接触分析中. 相比之下, 空间棱柱铰内的接触要复杂得多. 原因在于: 棱柱铰内接触模式受滑块截面上多个角点位置的影响, 可能接触模式繁多, 从而不能仅凭约束反力与接触力系之间的等效关系确定接触模式和接触力.

以矩形截面棱柱铰为例, 本文提出了一种方法, 可在不解除铰的运动学约束的前提下求解棱柱铰内

2009-11-06 收到第 1 稿, 2010-05-04 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10972044)和国家重点基础研究发展计划(2006CB705400)资助项目.

2) E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn

接触模式和摩擦力；通过恰当选取棱柱铰的铰点，规范统一了相关求解方程。数值算例验证了方法的有效性。

### 1 铰约束反力的分解

多体系统中的铰通常假设为由刚体组成。铰所连接的两个物体在铰内彼此接触，从而生成一对接触力系。作用在铰点处的铰约束反力实际上是相应的接触力系向铰点等效的结果，内外接铰点处的约束反力是一组作用与反作用力，因而它们是彼此平衡的，即

$$f_1 + f_2 = 0 \tag{1}$$

$$m_1 + m_2 + h \times f_2 = 0 \tag{2}$$

其中， $(f_1, m_1)$  和  $(f_2, m_2)$  分别为内外接铰点处的约束反力和约束反力矩； $h$  为从内接铰点指向外接铰点的滑移矢量，如图 1 所示。

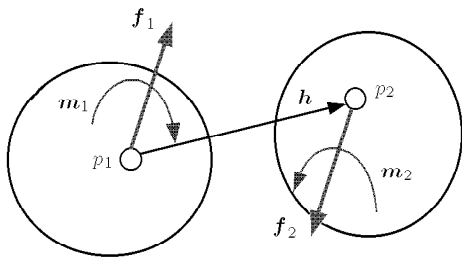


图 1 铰约束反力

Fig.1 Joint reaction forces

铰限制了物体间的相对运动，使其只能绕特定的轴（旋转轴）相对转动，沿特定的轴（滑移轴）相对滑动。如果  $v_r$  和  $\omega_r$  分别为铰的相对滑移速度和相对角速度，则铰约束反力所做的虚功率

$$\delta w = f_2 \cdot \delta v_r + m_2 \cdot \delta \omega_r \tag{3}$$

对于理想铰约束，约束反力没有沿滑移轴和旋转轴方向的分量。式 (3) 中的虚速度  $\delta v_r$  和虚角速度  $\delta \omega_r$  的模无论取任何值，虚功率  $\delta w$  都应为零。

如果铰约束是含摩擦效应的非理想约束，约束反力所做的虚功率不为零，铰约束反力也就含有沿滑移轴和旋转轴方向的分量。因此，外接铰点处的约束反力可以分解为两部分： $f_2 = \bar{f}_2 + f_2, m_2 = \bar{m}_2 + m_2$ ，其中  $\bar{f}_2$  和  $\bar{m}_2$  分别为理想铰约束反力和理想铰约束反力矩，它们所做的虚功率为零； $f_2$  和  $m_2$  则分别为滑移轴与旋转轴的线性组合，它们所做的虚功率非零。例如，对于万向节， $f_2 = 0, m_2 = \eta_1 p_{r1} + \eta_2 p_{r2}$

$(p_{r1}$  和  $p_{r2}$  为万向节的旋转轴， $\eta_1$  和  $\eta_2$  为组合系数)；对于棱柱铰， $m_2 = 0, f_2 = \eta p_s$  ( $p_s$  为棱柱铰的滑移轴， $\eta$  为组合系数)；对于含摩擦等非理想约束效应的铰，其约束反力所做的虚功率

$$\delta w = (\delta \dot{q}_s)^T P_s^T P_s \eta_s + (\delta \dot{q}_r)^T P_r^T P_r \eta_r \tag{4}$$

其中， $q_s$  为铰的滑移坐标； $q_r$  为铰的转动坐标； $P_s$  为由铰的滑移轴组成的矩阵； $P_r$  为铰的旋转轴组成的矩阵。将铰约束反力中的第 2 部分 ( $f_2$  和  $m_2$ ) 看作系统所受外力，含非理想约束的多体系统就可以按理想约束系统处理<sup>[11]</sup>。

### 2 考虑摩擦效应的多体系统动力学方程

由方程 (4) 可知：铰内摩擦力所对应的广义力可以表示为未知乘子的线性组合，因而相应的系统动力学方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + W\eta \\ \xi \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中， $q$  为铰坐标列阵， $\lambda$  为切断铰约束反力乘子列阵， $\eta$  为描述铰内摩擦力的乘子列阵， $M$  为系统质量矩阵， $G$  为约束雅克比矩阵， $F$  为外力和惯性力组成的广义力， $\xi$  为切断铰约束方程的右端项。从式 (5) 中可得

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W\eta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

式 (6) 可以分解为

$$\ddot{q} = \ddot{q}_0 + B\eta, \quad \lambda = \lambda_0 + D\eta \tag{7}$$

由于系统中每个物体的平动和转动加速度是  $\ddot{q}$  和  $\lambda$  的线性函数，利用单个物体的运动学方程可用从末端物体向零号物体递推的方式将内外接铰点处约束反力  $f_1$  和  $f_2$ ，以及约束反力矩  $m_1$  和  $m_2$  表示为<sup>[11]</sup>

$$f_1 = a_1 + N_1\eta, \quad f_2 = a_2 + N_2\eta \tag{8}$$

$$m_1 = b_1 + T_1\eta, \quad m_2 = b_2 + T_2\eta \tag{9}$$

其中矩阵  $B, D, N_1, N_2, T_1$  和  $T_2$  中的元素与  $\ddot{q}$  无关，皆为系统状态变量的函数。

从式 (6)~ 式 (9) 中可见：如果多体系统中所有铰都是理想的 (相当于  $\eta = 0$ )，系统的铰坐标以及约束反力可由系统运动方程完全确定 (即式 (7) 中的

$\dot{q}_0$  和  $\lambda_0$ ). 但对于含摩擦的多体系统,  $\dot{q}$  和  $\lambda$  只能表示为未知乘子  $\eta$  的线性组合. 求解乘子  $\eta$  需要一组补充方程. 这组方程可由摩擦定律以及铰内接触力的力学性质提供.

### 3 棱柱铰内的接触分析

棱柱铰由内滑块和外导轨组成, 其构造形式有两种: 一种为内滑块可滑出导轨之外 (变接触长度), 如图 2 所示. 另一种是内滑块只能在导轨内运动 (定常接触), 如图 3 所示.

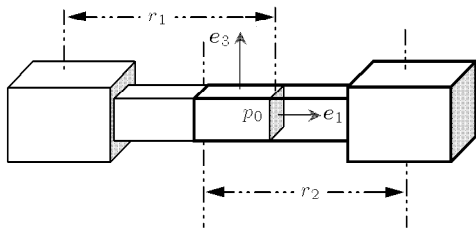


图 2 棱柱铰的构造参数 (变接触长度)

Fig.2 Geometric parameters of a prismatic joint with variable contact length

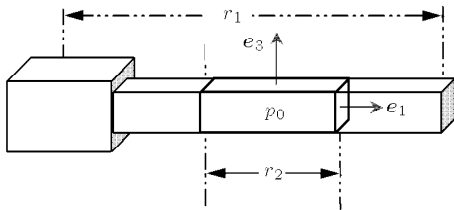


图 3 棱柱铰的构造参数 (定常接触)

Fig.3 Geometric parameters of a prismatic joint with constant contact length

以常见的矩形截面棱柱铰为研究对象, 并采用以下几个基本假设:

(1) 铰内的间隙  $\varepsilon$  和  $\delta$  为无穷小 (如图 4 所示), 从而铰内的碰撞效应可以忽略.

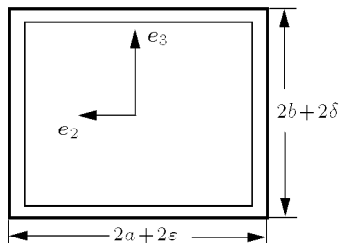


图 4 铰内间隙

Fig.4 Clearance in the joint

(2) 铰内的接触可以等效为接触端面上各个角点的接触, 相应的接触力 (不计摩擦力) 如图 5 所示.

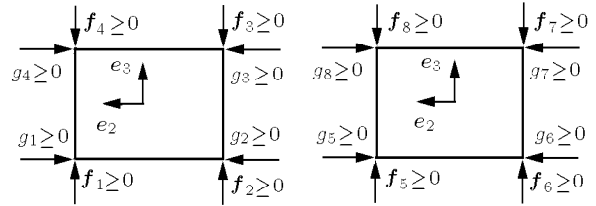


图 5 铰内接触力

Fig.5 Contact forces in the joint

(3) 摩擦力符合库伦摩擦定律.

虽然原则上铰点的选择完全是主观的, 但为了简化描述, 约定: 定常接触时内滑块上的铰点为其左端面的几何中心.

运动过程中, 棱柱铰内的接触长度

$$c = \begin{cases} 0.5 \min(r_1, r_2), & s < \min(r_1, r_2) \\ 0.5(r_1 + r_2 - s), & s \geq \min(r_1, r_2) \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $r_1$  为内接物体上铰点到右端面的距离;  $r_2$  为外接物体上铰点到左端面的距离;  $s$  为内外铰点之间的距离, 也是棱柱铰的铰坐标.

如果内滑块位于内接物体上, 则滑块上接触区域的几何中心  $p_0$  到内接铰点的矢径

$$d_1 = -(r_1 - c)e_1 \quad (11)$$

其中  $e_1$  为表示滑移方向的单位矢量. 此时,  $p_0$  处的约束反力和约束反力矩分别为

$$f^c = f_1 \quad (12)$$

$$m^c = m_1 + d_1 \times f^c \quad (13)$$

如果内滑块位于外接物体上, 则  $p_0$  到外接铰点的矢径

$$d_2 = (c - r_2)e_1 \quad (14)$$

此时,  $p_0$  处的约束反力和约束反力矩分别为

$$f^c = f_2 \quad (15)$$

$$m^c = m_2 + d_2 \times f^c \quad (16)$$

其中,  $f_1$  和  $f_2$  分别为内外铰点处约束反力, 以及  $m_1$  和  $m_2$  分别为内外铰点处的约束反力矩.

由于接触区域几何中心点处的约束反力  $f^c = f_1^c e_1 + f_2^c e_2 + f_3^c e_3$  和约束反力矩  $m^c = m_1^c e_1 + m_2^c e_2 + m_3^c e_3$

所构成的力系与作用在滑块上的接触力形成的力系等效，因此

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_5 \\ f_2 \\ f_8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_g \begin{pmatrix} g_2 \\ g_4 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_f \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_c \begin{pmatrix} f_2^c \\ f_3^c \\ m_1^c \\ m_2^c \\ m_3^c \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中的系数矩阵

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 1 - \frac{ka}{c} & \frac{ka}{c} & -\frac{ka}{c} & -1 & 1 + \frac{ka}{c} \\ -ka/c & 1 + \frac{ka}{c} & -\frac{ka}{c} & -1 & 1 + \frac{ka}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \frac{kb}{c} & -\frac{kb}{c} & \frac{kb}{c} & 0 & -\frac{kb}{c} \\ \frac{kb}{c} & -\frac{kb}{c} & \frac{kb}{c} & 0 & -\frac{kb}{c} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} + \frac{ka}{c} & -\frac{ka}{c} & -\frac{a}{b} & \frac{ka}{c} & -\frac{a}{b} & \frac{a}{b} - \frac{ka}{c} \\ \frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \\ -\frac{ka}{c} & \frac{ka}{c} & 0 & -\frac{ka}{c} & 0 & \frac{ka}{c} \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2ka}{c} & -\frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} & \frac{1}{c} \\ 1 + \frac{ka}{c} & -\frac{ka}{c} & -\frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} & 0 \\ \frac{ka}{c} - 1 & \frac{ka}{c} & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ -\frac{kb}{c} & 1 + \frac{kb}{c} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{kb}{c} & \frac{kb}{c} - 1 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

式 (17) 可以简记为： $\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_f \mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_f$ ，其中的矢量定义为式 (17) 中对应位置的矢量。在式 (18)~式 (20) 中，如果内滑块位于内接物体上，则等效摩擦系数  $k = \mu \text{sgn}(\dot{s})$ ；否则， $k = -\mu \text{sgn}(\dot{s})$ 。当  $|\dot{s}| \leq 10^{-3}$  时用  $\dot{s}/10^{-3}$  取代  $\text{sgn}(\dot{s})$ ，以改善数值性态。

由于方程组 (17) 中仅有 5 个方程 16 个未知接触力，确定全部接触力还需要一组补充方程。这可由铰内接触力的单面约束性质提供。接触力只能阻止滑块穿越导轨。因此，按图 5 所示定义的接触力

必须非负，而接触力大于零意味着在相应作用点处发生接触。这说明接触力除满足方程 (17) 外，还要受铰内接触模式的约束。

一个可能的接触模式必须满足如下条件：滑块在导轨内的相对运动应是刚体运动。不失一般性，假设：在初始时刻，滑块截面形心与导轨截面的形心重合，并且滑块截面上的边界线与导轨截面相应的边界线平行，如图 4 所示。此时，左端接触面 4 个角点的初始位置

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \begin{pmatrix} -c \\ a \\ -b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ -a \\ -b \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_3 &= \begin{pmatrix} -c \\ -a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} -c \\ a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

右端接触面 4 个角点的初始位置

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_5 &= \begin{pmatrix} c \\ a \\ -b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_6 = \begin{pmatrix} c \\ -a \\ -b \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_7 &= \begin{pmatrix} c \\ -a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_8 = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

实际发生接触时，接触区域几何中心  $p_0$  点相对于初始位置的微位移可以表示为

$$\mathbf{d}_0 = [0 \quad u_2 \quad u_3]^T \quad (23)$$

滑块相对于导轨的微转角可以表示为

$$\boldsymbol{\theta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T \quad (24)$$

由于铰内缝隙为无穷小， $u_2, u_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  这 5 个参数也都是无穷小量，从而左右端面各角点的位移

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{d}_0 - \tilde{\mathbf{p}}_i \boldsymbol{\theta} \quad (25)$$

如图 6 所示，定义左右端面角点水平方向缝隙函数

$$h_i = \begin{cases} \varepsilon - \bar{u}_i(2), & i = 1, 4, 5, 8 \\ \varepsilon + \bar{u}_i(2), & i = 2, 3, 6, 7 \end{cases} \quad (26)$$

如图 7 所示，定义左右端面角点竖直方向缝隙函数

$$v_i = \begin{cases} \delta + \bar{u}_i(3), & i = 1, 2, 5, 6 \\ \delta - \bar{u}_i(3), & i = 3, 4, 7, 8 \end{cases} \quad (27)$$

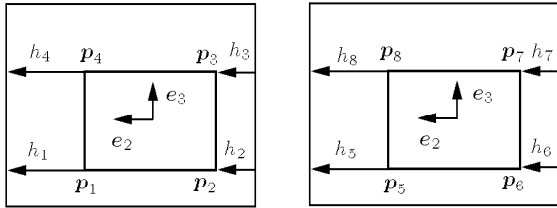


图 6 水平方向缝隙函数

Fig.6 Horizontal gap functions

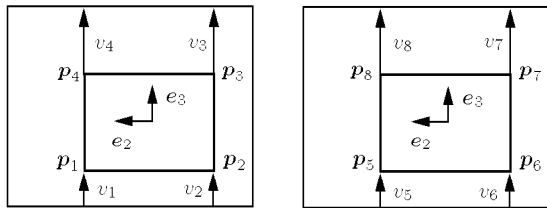


图 7 竖直方向缝隙函数

Fig.7 Vertical gap functions

式中， $\bar{u}_i(2), \bar{u}_i(3)$  分别表示  $\bar{u}_i$  的第 2 个和第 3 个分量。从缝隙函数的定义式中可以得到

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2bc} \begin{bmatrix} 0 & bc & -bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc & -bc \\ -c & -c & 0 & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 & b & b \\ b & 0 & -b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_5 \\ v_2 \\ v_8 \end{pmatrix} + \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon c \\ \varepsilon a - \delta b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

从而缝隙函数之间存在关系

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ h_4 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_5 \\ v_2 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 2\varepsilon \\ 2\varepsilon \\ 0 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} -a & -a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ a & a & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ a & a & 0 & 0 & -b \\ -a & -a & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_5 \\ v_2 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon a \\ b\delta \\ b\delta - \varepsilon a \\ b\delta \\ b\delta - \varepsilon a \\ \varepsilon a \end{pmatrix} \quad (30)$$

将式 (29) 和式 (30) 分别简记为  $y_2 = A_h x_1 + b_h$  和  $y_3 = A_v x_1 + b_v$ , 其中的矩阵和矢量定义为式中对应该位置的矩阵和矢量。综合式 (17), (29) 和 (30) 可得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_g & A_f \\ A_h & 0 & 0 \\ A_v & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_f \\ b_h \\ b_v \end{pmatrix} \quad (31)$$

由于接触点处的接触反力与缝隙函数之间满足互补条件

$$0 \leq f_i \perp v_i \geq 0, \quad 0 \leq g_i \perp h_i \geq 0 \quad (32)$$

方程 (31) 中的变量  $y_i, x_i (i = 1, 2, 3)$  满足互补条件

$$0 \leq x_i \perp y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (33)$$

由此可见, 方程 (31) 与 (33) 恰好构成一个线性互补问题, 从中可以求得全部接触力。

由于式 (31) 中的系数矩阵不是正定的, 求解这个互补问题具有一定的难度。建议采用互补函数法求解<sup>[12]</sup>, 即将其转化为近似等效的非线性方程组

$$\sqrt{(\bar{y}_i)^2 + (\bar{x}_i)^2 + \varepsilon_0^2} - \bar{y}_i - \bar{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 16 \quad (34)$$

其中  $\varepsilon_0$  为一个非常小的正数。另外, 为改善数值解性态, 可做如下所述的规范化, 令

$$\left. \begin{aligned} b_f &= b_f/k_f, \quad k_f = \max(|f_2^c|, |f_3^c|, |m_1^c|, |m_2^c|, |m_3^c|) \\ b_h &= b_h/\varepsilon \\ b_v &= b_v/\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

由于约束反力是乘子  $\eta$  的函数, 铰内接触力也是乘子  $\eta$  的函数。在求解接触反力时, 没有用到

滑移轴方向的等效关系，因此接触力还需满足方程

$$f_1^c = k \sum_{i=1}^8 (f_i + g_i) \quad (36)$$

这正是求解乘子  $\eta$  所需的补充方程.

从上述分析过程可知：空间棱柱铰的摩擦接触分析涉及 16 个缝隙函数、16 个接触力以及一个描述摩擦力的乘子，共计 33 个未知变量. 接触力与约束反力之间的力系等效关系提供 6 个方程，接触力与缝隙函数之间的互补关系提供 16 个方程，全部缝隙函数可由描述滑块刚体运动的 5 个运动学参数确定，使得缝隙函数彼此关联，这又提供了 11 个方程，总计 33 个方程，因而问题是可解的. 值得注意的是：上述方法并不需要解除铰的运动学约束.

### 4 数值算例

**例 1** 如图 8 所示，一个定常接触滑移铰，由长 0.2 m 宽 0.1 m 高 0.1 m，材料密度  $\rho = 7801 \text{ kg/m}^3$  的滑块，以及长度  $L = 0.5 \text{ m}$  的导轨组成，铰内间隙比为 1. 滑块与导轨之间的摩擦系数  $\mu = 0.3$ ，重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  指向导轨下表面. 滑块在水平方向外力  $F = 100 \text{ N}$  的作用下由静止状态开始运动.

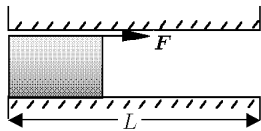


图 8 定常接触滑移铰

Fig.8 A prismatic joint with constant contact length

通常情况下，定常接触滑移铰中的滑块不会滑出导轨. 但为了检验本文所提方法的有效性，允许滑块在到达图 9 所示的极限位置后继续向右运动，从而接触长度逐渐缩短 (如图 10 所示). 从力矩平衡方程可知：接触长度越短，接触力越大，相应地滑块所受的摩擦力也就越大，最后滑块会在整体滑出导轨前停止运动.

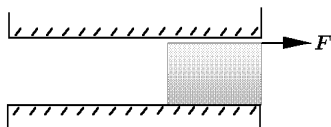


图 9 滑块定常接触的极限位置

Fig.9 Limit position of the slider with constant contact length

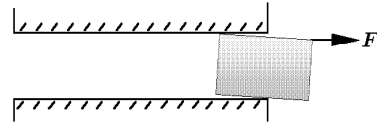


图 10 滑块的变长度接触

Fig.10 The slider with variable contact length

按本文方法求得的滑块中心位置和滑移速度变化曲线分别如图 11 和图 12 所示，从中可见：仿真结果与定性分析相符. 在运动过程中滑块与导轨之间的接触形式是变化的，计算结果表明：在滑块可能的 16 个接触力中，只有按图 13 所定义的接触力可能非零，它们在运动过程中的变化如图 14 和图 15 所示. 从中可以看出在滑块处于定常接触状态时 (0.425 2 s 之前) 滑块整个底面与导

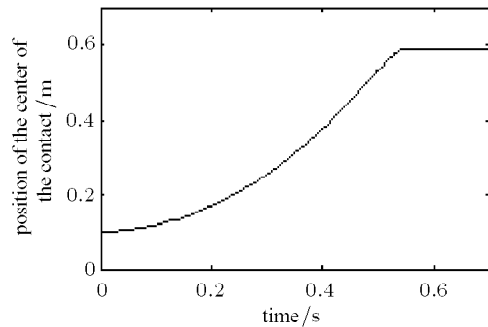


图 11 滑块接触中心位置

Fig.11 Position of the center of the contact

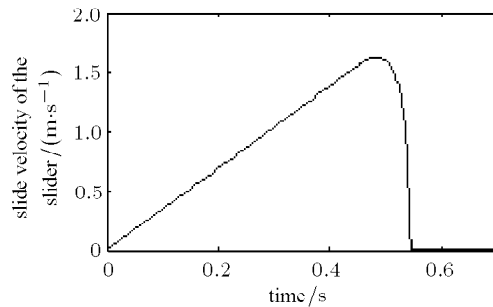


图 12 滑块滑移速度

Fig.12 Slide velocity of the slider

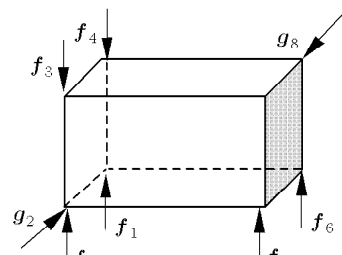


图 13 滑块上的接触力定义

Fig.13 Definition of the contact forces on the slider

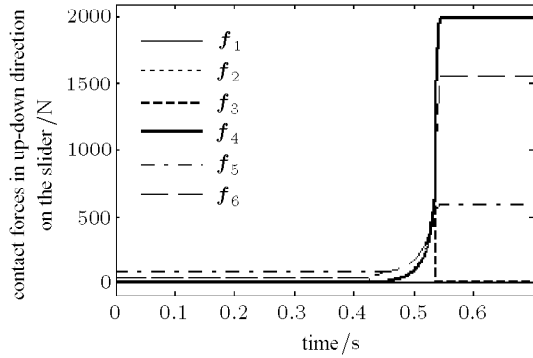


图 14 滑块沿上下方向接触力

Fig.14 Contact forces in up-down direction on the slider

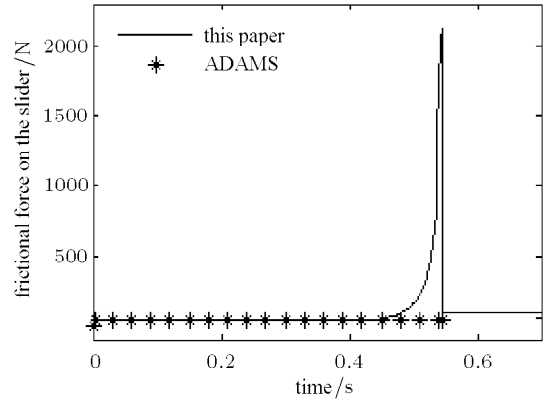


图 16 滑块所受摩擦力

Fig.16 Frictional force on the slider

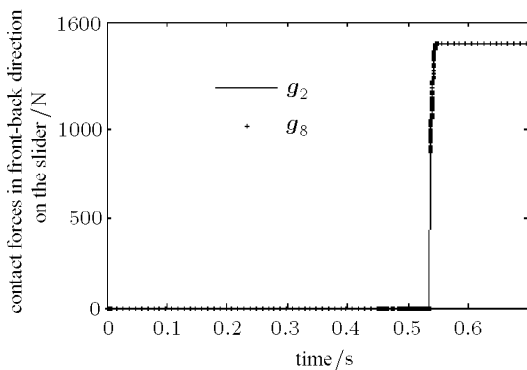


图 15 滑块沿前后方向接触力

Fig.15 Contact forces in front-back direction on the slider

轨接触;处于变接触长度状态时(如图 10 所示),滑块的左上边与右下边分别于导轨的上下表面接触,同时其左前角与右后角分别与导轨的前后表面接触.

Adams 在分析棱柱铰内的摩擦时,需要指定接触长度是定常的还是变化的,而不能分析两种状态相继出现的问题.为了与 Adams 进行比较,将例 1 所述问题分解为两个阶段分别求解:滑块从静止运动到图 9 所示极限位置阶段,以及从极限位置开始到静止的阶段,所得结果与本文所得结果的比较如图 16 所示.

从中可见,Adams 的结果与按本文方法所得结果在非定常接触阶段有差别.原因在于 Adams 并没有进行接触分析,而是采用了近似关系:空间滑移铰内的摩擦力  $F_{fri} = \mu(\|F\| + \|T_m\|/c + \|T_n\|/r_n)$ .其中,  $\mu$  为摩擦系数,  $\|F\|$  为接触中心处约束反力的模,  $\|T_n\|$  为轴向约束反力矩的模,  $\|T_m\|$  为滑块截面内约束反力矩的模,  $c$  为接触长度,  $r_n$  是滑块截面等效半径.也可以说 Adams 试图将铰内的多点接触近似为接触中心处的单点接触,其中显然包含了更多的假设.相对 Adams 而言,本文所述方法更合理一些.

**例 2** 如图 17 所示的曲柄滑块机构,受到外力矩  $M = 110 \text{ Nm}$  的作用.曲柄长  $L_1 = 0.5 \text{ m}$ ,连杆长  $L_2 = 1 \text{ m}$ ,滑块为长  $0.2 \text{ m}$  宽  $0.2 \text{ m}$  高  $0.2 \text{ m}$  的长方体,组成它们的材料密度均为  $\rho = 7801 \text{ kg/m}^3$ .曲柄和连杆截面均为长  $0.1 \text{ m}$  宽  $0.1 \text{ m}$  的矩形.滑移铰内间隙比为 1,滑块与导轨之间的摩擦系数  $\mu = 0.1$ .重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  方向朝下.初始状态时,曲柄、连杆以及滑块均处于水平位置.

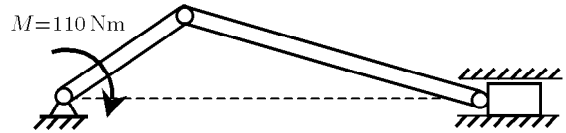


图 17 曲柄滑块机构

Fig.17 A Crank-slider mechanism

系统运动过程中滑块可有两种接触形式,如图 18 所示.滑块滑移速度以及滑块所受的摩擦力的变化分别如图 19 和图 20 所示.图 21 为 Adams 与本文所得结果间的对比图,直线为本文计算结果,虚线为 Adams 计算结果.图中,0 时刻到单点划线所示区域为曲柄运动的一个周期.这一周期中,0 时

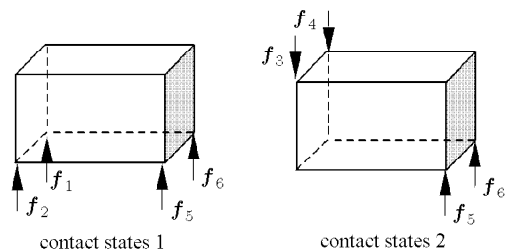


图 18 滑块接触形式

Fig.18 Contact states of the slider

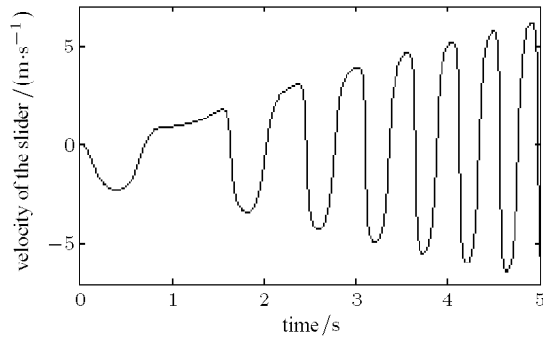


图 19 滑块滑移速度

Fig.19 Slide velocity of the slider

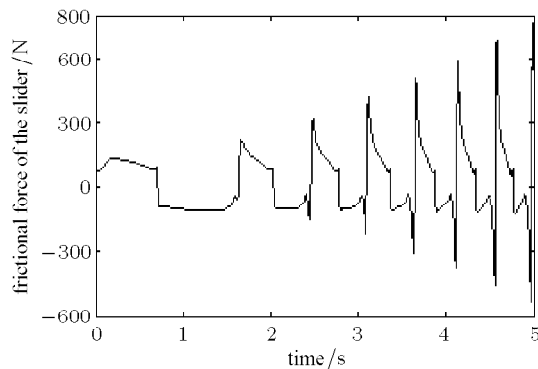


图 20 滑块所受摩擦力

Fig.20 Frictional force of the slider

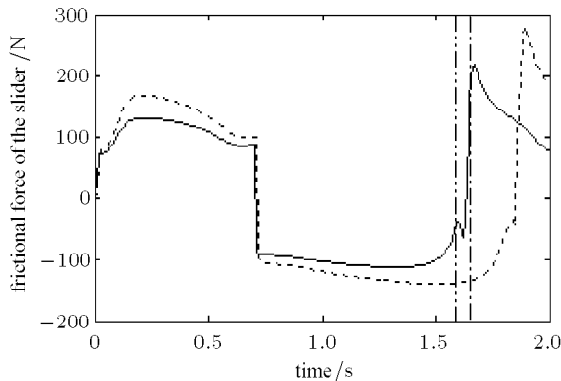


图 21 摩擦力对比图

Fig.21 Compare with Adams

刻到单点划线之间的时间区域内滑块按照图 18 所示接触形式 1 运动, 单点划线到双点划线之间的时间区域内, 滑块按照图 18 所示接触形式 2 运动. 由图可以看出, Adams 计算的结果较本文结果偏大, 这是由于 Adams 中没有考虑接触形式, 而只按近似点接触的形式计算摩擦力所致.

### 参 考 文 献

1 董富祥, 洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述. 力学进展, 2009, 39(3): 352-359 (Dong Fuxiang, Hong Jiazhen. Review of impact problem for dynamics of multibody system. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352-359(in Chinese))

- 2 姚文莉, 王育平, 边力等. 多刚体系统接触碰撞动力学研究进展. 力学与实践, 2007, 29(6): 9-12 (Yao Wenli, Wang Yuping, Bian Li, et al. Progress in dynamics of impact and contact of multi-rigid-body systems. *Mechanics in Engineering*, 2007, 29(6): 9-12(in Chinese))
- 3 刘才山, 陈滨. 多柔体系统动力学碰撞研究中的若干基本问题. 振动与冲击, 1999, 18(3): 5-12(Liu Caishan, Chen Bin. Some basic problems in impact dynamics research of flexible multibody. *Journal of Vibration and Shock*, 1999, 18(3): 5-12 (in Chinese))
- 4 Dubowsky S, Moening MF. An experimental and analytical study of impact forces in elastic mechanical systems with clearances. *Mechanisms and Machine Theory*, 1978, 13 (5): 451-465
- 5 姚文莉, 陈滨. 考虑摩擦的平面多刚体系统的冲击问题. 北京大学学报 (自然科学版), 2004, 40(5): 729-734(Yao Wenli, Chen Bin. Impact on planar multi-rigid-body systems with friction. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinesis*, 2004, 40(5): 729-734(in Chinese))
- 6 刘才山, 陈滨, 王玉玲. 考虑摩擦作用的多柔体系统点-面碰撞模型. 中国机械工程, 2000, 11(6): 616-620(Liu Caishan, Chen bin, Wang Yuling. The point-surface impact model considering the friction effect in flexible multi body system. *China Mechanical Engineering*, 2000, 11(6): 616-620(in Chinese))
- 7 Pfeiffer F. Multibody systems with unilateral constraints. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 65(4): 665-670
- 8 尉立肖, 刘才山. 圆柱铰间隙运动学分析及动力学仿真. 北京大学学报 (自然科学版). 2005, 41(5): 679-687(Yu Lixiao, Liu Caishan. Dynamic simulation and kinetic description of revolute joint with spatial clearance. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2005, 41(5): 679-687(in Chinese))
- 9 陶绍洋, 陈鹿民, 季林红等. 含间隙铰的机械多体系统动力学模型. 振动工程学, 2003, 16(3): 290-294(Yan Shaoze, Chen Lumin, Ji Lihong, et al. Dynamic modeling of multibody system with clearance joints. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(3): 290-294(in Chinese))
- 10 齐朝晖, 罗晓明, 黄志浩. 多体系统中典型铰的摩擦力计算模型. 动力学与控制学报, 2008, 6(4): 294-300(Qi Zhaohui, Luo Xiaoming, Huang Zhihao. Frictions in joints of multibody systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(4): 294-300(in Chinese))
- 11 齐朝晖, 许永生, 罗晓明. 含非理想约束多柔体系统递推建模方法. 力学学报, 2008, 40(5): 686-694(Qi Zhaohui, Xu Yongsheng, Luo Xiaoming. Recursive Methods for modeling closed-Loop flexible multibody systems with non-ideal constraints. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(5): 686-694(in Chinese))
- 12 修乃华, 高自友. 互补问题算法的新进展. 数学进展, 1999, 28(3): 194-210 (Xiu Naihua, Gao Ziyou. The new advances in methods for complementarity problems. *Advances in Mathematics*, 1999, 28(3): 194-210(in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)



## FRictional CONTACT ANALYSIS OF SPATIAL PRISMATIC JOINTS IN MULTIBODY SYSTEMS<sup>1)</sup>

Qi Zhaohui<sup>2)</sup> Luo Xiaoming Huang Zhihao

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract** In traditional methods, the details of relative motion between two bodies is necessary to locate contact points. When they are applied to analyze the contact in a joint, the bodies linked by the joint must be taken as free, no matter how small the clearance of the joint is. As a result, such drawback makes numerical solution inefficient and inaccurate in some cases. It is found that, the system of contact forces in a joint and the system of constraint reaction forces of the joint are equivalent, and the motion of possible contact points in joint relate each other inherently. Based on these facts, this paper present a method for frictional contact analysis of spatial prismatic joints, by which the positions and forces of contacts can be obtained while the kinematic constraints of prismatic joints are kept. Numerical examples prove the validity of the method.

**Key words** multibody systems, spatial prismatic joints, frictional contact, constraint forces

---

Received 6 November 2009, revised 4 May 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10972044) and the National Basic Research Program of China (2006CB705400).

2) E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn