

随机过程的随机谐和函数表达¹⁾

陈建兵²⁾ 李 杰

(同济大学土木工程学院土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要 研究了随机过程的随机谐和函数表达及其性质. 首先证明了当随机谐和函数的频率分布与目标功率谱密度函数形状一致时, 随机谐和函数过程的功率谱密度函数等于目标功率谱密度函数. 进而, 证明了随机谐和函数过程的渐进正态性, 讨论了趋向正态分布的速率, 并采用 Pearson 分布研究了一维概率密度函数的性质. 与已有的随机过程谱表达方式相比, 采用随机谐和函数表达, 仅需要很少的展开项数, 即可获得精确的目标功率谱密度函数, 从而大大降低了与之相关的随机动力系统分析的难度. 最后, 以多自由度体系的线性和非线性响应分析为例, 验证了随机谐和函数模型的有效性和优越性.

关键词 随机谐和函数, 功率谱密度, 相关函数, 平稳过程, 非线性

中图分类号: O211.6 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)03-0505-09

引 言

科学与工程中广泛地存在随机动力系统, 这些系统受到随机过程的驱动或激励, 表现出复杂的随机行为和响应性态^[1-2]. 随机过程的合理描述与建模, 构成随机动力学的重要基础. 在数学上, 原则上可以通过有限维联合分布函数, 即任意多个时刻的联合概率密度函数完备地描述随机过程的概率信息. 遗憾的是, 在实际上有限维概率密度函数几乎不可能得到. 因此, 考虑有限个时刻之间的联合矩, 特别是一阶和二阶矩, 是一条反映正态平稳随机过程概率性质的可行途径. 对二阶平稳随机过程, 功率谱密度函数与相关函数构成 Fourier 变换对, 因而含有等价的概率信息, 并在工程中得到广泛的应用^[3]. 然而, 功率谱密度函数仍然是随机过程抽象函数表达的结果, 并未给出随机过程的样本与概率信息之间的明确关系. 因此, 如何由功率谱密度函数或相关函数生成具有给定概率信息的随机过程样本, 成为随机动力学中的一个重要环节^[4]. 在这一背景下, 已经开展了诸多卓有成效的研究, 发展了诸如 Karhunen-Loève 分解^[5]、取样定理模型^[6]和谱表示^[7]等方法. 然而, 这些方法普遍存在的问题是^[3,8]: (1) 由这些方法获得的随机函数表达式一般是无穷级数, 当取有限项作为近似时, 该随机过程的功率谱密度

函数或相关函数仅仅是目标函数的近似值, 而不是精确值; (2) 为了保证必要的精度, 级数截断的项数必须足够大, 通常达数百项, 因而导致数百个随机变量, 极大地增加了难度和计算工作量.

本文提出了随机过程的随机谐和函数表达方式. 证明了当且仅当随机谐和函数的频率分布与功率谱密度函数形式一致时, 随机谐和函数过程的功率谱与目标功率谱完全一致. 进而, 论证了该类随机过程的渐进正态性并详细研究了概率分布性质. 与已有的其他随机过程表达方法相比, 采用随机谐和函数, 仅需要很少的项数, 即可获得精确的目标功率谱密度, 因而极大地减少了随机变量的个数, 从而降低了随机动力系统分析的难度. 以多自由度体系的线性和非线性响应为例, 验证了随机谐和函数表达的有效性.

1 随机谐和函数 —— 随机过程的精确谱表达

考察随机谐和函数 $Y_N(t)$

$$Y_N(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\tilde{\omega}_i t + \phi_i) \quad (1)$$

其中, A_i , $\tilde{\omega}_i$ 和 ϕ_i 分别为第 i 个谐和分量的幅值、圆频率和相位角.

2010-06-02 收到第 1 稿, 2011-01-19 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10872148, 90715033), 国家高技术研究发展计划(2008AA05Z413)和教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目.

2) E-mail: chenjb@tongji.edu.cn

设 $[0, \omega_u]$ 为感兴趣的频率范围, $\omega_u < \infty$ 为上限截止频率, $\omega_i^{(p)}, 1 \leq i \leq N-1$ 为 $[0, \omega_u]$ 的内点, 且满足 $0 < \omega_1^{(p)} < \omega_2^{(p)} < \dots < \omega_{N-1}^{(p)} < \omega_u$, 记 $\omega_0^{(p)} = 0, \omega_N^{(p)} = \omega_u$. 与一般谱表达理论^[7]不同, 取 $\tilde{\omega}_i$ 和 ϕ_i 均为随机变量. 显然, 此时 $Y_N(t)$ 是一个随机过程. 易知, 当 ϕ_i 服从 $(0, 2\pi]$ 之间的独立均匀分布时, $Y_N(t)$ 的自相关函数

$$R_{Y_N}(\tau) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{2} E[\cos(\tilde{\omega}_i \tau)] \quad (2)$$

其中, $E[\cdot]$ 表示数学期望, τ 为两个时刻之间的时间差. 而 $R_{Y_N}(\tau)$ 的 Fourier 变换则给出 $Y_N(t)$ 的功率谱密度函数

$$S_{Y_N}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y_N}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

其中 ω 为圆频率.

设 $Y(t), -\infty < t < \infty$, 是一个平稳随机过程, 其相关函数为 $R_Y(\tau), -\infty < \tau < \infty$, 功率谱密度函数为 $S_Y(\omega), -\omega_u \leq \omega \leq \omega_u$, 它们构成一个 Fourier 变换对, 满足维纳-辛钦关系. 记 $Y(t)$ 的单边功率谱密度为 $G_Y(\omega)$, 即 $G_Y(\omega) = 2S_Y(\omega), 0 \leq \omega \leq \omega_u$.

存在如下定理:

定理 1 若式 (1) 中的随机谐和函数过程 $Y_N(t)$ 中 $A_i, \tilde{\omega}_i$ 和 ϕ_i 分别满足:

(1) $\tilde{\omega}_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为相互独立的随机变量, 其概率密度函数为

$$p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) = \frac{G_Y(\omega)}{2\pi E_i} I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (4)$$

式中, $I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\}$ 为示性函数, 若 $\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})$, 则 $I\{\cdot\} = 1$, 否则 $I\{\cdot\} = 0$. E_i 为 $[\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)}]$ 内的能量

$$E_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} G_Y(\omega) d\omega \quad (5)$$

(2) $\phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的独立随机变量;

(3) $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ 由下式给出

$$A_i = \sqrt{2E_i} \quad (6)$$

则式 (1) 中随机过程 $Y_N(t)$ 的功率谱密度函数为 $S_Y(\omega)$.

证明 注意条件 (2), 经推导易知, $Y_N(t)$ 的相关函数由式 (2) 给出, 其 Fourier 变换给出功率谱密度函数

$$S_{Y_N}(\omega) = \mathcal{F}[R_{Y_N}(\tau)] = \sum_{i=1}^N \frac{\pi A_i^2}{2} E\{\delta(\omega - \tilde{\omega}_i) + \delta(\omega + \tilde{\omega}_i)\} \quad (7)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, 其单边功率谱为

$$G_{Y_N}(\omega) = \sum_{i=1}^N \pi A_i^2 E\{\delta(\omega - \tilde{\omega}_i)\} = \sum_{i=1}^N \pi A_i^2 \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} \delta(\omega - \tilde{\omega}_i) p_{\tilde{\omega}_i}(\tilde{\omega}_i) d\tilde{\omega}_i = \sum_{i=1}^N \pi A_i^2 p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (8)$$

将式 (4)~(6) 代入式 (8), 立即得到

$$G_{Y_N}(\omega) = \sum_{i=1}^N G_Y(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} = G_Y(\omega), \quad \omega \in (0, \omega_u] \quad (9)$$

因而, 其双边功率谱 $S_{Y_N}(\omega) = S_Y(\omega), \omega \in [-\omega_u, \omega_u]$. 证毕.

可进一步证明定理 1 的逆定理亦成立.

定理 2 设式 (1) 中随机谐和函数 $Y_N(t)$ 的 $\phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的独立随机变量, $\tilde{\omega}_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为相互独立的随机变量, 且 $\tilde{\omega}_i \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})$. 若 $Y_N(t)$ 的双边功率谱密度 $S_{Y_N}(\omega) = S_Y(\omega), \omega \in [-\omega_u, \omega_u]$, 则必有 $A_i = \sqrt{2E_i}$ 且 $\tilde{\omega}_i$ 的概率密度函数必为式 (4), E_i 由式 (5) 给出.

证明 由于 $\phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的独立随机变量, 由式 (8) 可知 $Y_N(t)$ 的单边功率谱密度为

$$G_{Y_N}(\omega) = \sum_{i=1}^N \pi A_i^2 p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (10)$$

若 $S_{Y_N}(\omega) = S_Y(\omega), \omega \in [-\omega_u, \omega_u]$, 则 $G_{Y_N}(\omega) = G_Y(\omega), \omega \in [0, \omega_u]$, 式 (10) 成为

$$G_Y(\omega) = \sum_{i=1}^N \pi A_i^2 p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (11)$$

由于 $(\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)}) \cap (\omega_{j-1}^{(p)}, \omega_j^{(p)}) = \emptyset, \forall i \neq j$, 根据式 (11) 可知在每一子段 $(\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})$ 内均有

$$G_Y(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} = \pi A_i^2 p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (12)$$

从而可得

$$p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) = \frac{G_Y(\omega)}{\pi A_i^2} I\{\omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})\} \quad (13)$$

根据概率相容性, 有 $\int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} p_{\tilde{\omega}_i}(\omega) d\omega = 1$, 可知 $\pi A_i^2 = \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} G_Y(\omega) d\omega$, 若令

$$E_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} G_Y(\omega) d\omega$$

则有 $A_i = \sqrt{2E_i}$, 而式 (13) 与式 (4) 相同. 证毕.

定理 1 及其逆定理表明, 采用形如式 (1) 具有随机相位和随机频率的谐和分量合成的随机过程, 当且仅当相位角是 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的独立随机变量, 各谐和分量频率的概率密度函数与相应子段的目标功率谱密度函数形状相同且幅值与该子段能量平方根成正比时, 该随机过程的功率谱密度函数与目标功率谱密度函数完全相同. 换言之, 无论项数 N 为多少, 式 (1) 中的随机谐和函数过程的功率谱密度函数均精确地等于目标功率谱密度函数. 因而, 在功率谱密度相等的意义上, $Y_N(t)$ 是随机过程 $Y(t)$ 的精确表达. 而前已提到的各种现有随机过程表达方法都必须进行级数截断, 因而仅仅是目标随机过程的近似表达. 在经典谱表示理论中^[7], 为了保证必要的精度, 往往需要保留多达数百项的级数分量, 这与随机谐和函数表达形成鲜明的对照. 有意思的是, Goto 和 Toki^[9] 于 1969 年提出了一类可以获得精确目标功率谱的随机谐和函数表达, 后来 Shinozuka^[10] 及 Mignolet 和 Harish^[11] 等进行了进一步讨论. 然而, 在他们的工作中, 随机频率是在整个频率区间独立分布的, 因而为了保证样本性质和概率密度函数性质, 仍然需要很大的项数.

2 随机谐和函数的基本性质

2.1 平稳性和渐进正态性

容易验证

$$E\{Y_N(t)\} = 0 \quad (14)$$

而 $Y_N(t)$ 的相关函数由式 (2) 给出, 它仅依赖于时间差 τ 而与时间 t 无关, 因此, $Y_N(t)$ 是一个零均值二阶平稳过程.

在文献 [7] 中, 对经典谱表示的随机过程 $\tilde{Y}_N(t)$, 即相位随机而频率为确定性的谐和分量合成的随机过程, 利用 Laning-Battin 于 1956 年提出的双变量中

心极限定理, 证明了 $\tilde{Y}_N(t)$ 的渐进正态性: 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 任意 n 个时点的截面随机变量组成的随机向量 $(\tilde{Y}_N(t_1), \tilde{Y}_N(t_2), \dots, \tilde{Y}_N(t_n))$ 趋向于多维联合正态分布. 采用完全类似的步骤, 可以证明式 (1) 中的随机谐和函数 $Y_N(t)$ 满足定理 1 的条件时, 若 $N \rightarrow \infty$, 则任意 n 个时点的截面随机变量组成的随机向量 $(Y_N(t_1), Y_N(t_2), \dots, Y_N(t_n))$ 亦趋向于多维联合正态分布.

令 $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$ 是 n 个独立的双变量随机向量 $\mathbf{Z}_n = (X_n, Y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 其一阶与二阶矩均已知. 定义向量和为

$$\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^n \mathbf{Z}_j = \left(\sum_{j=1}^n X_j, \sum_{j=1}^n Y_j \right) = (X, Y) \quad (15)$$

Laning-Battin 定理断言, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{Z} = (X, Y)$ 趋向于双变量正态分布的充分条件是

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{j=1}^n E\{|X_j - E[X_j]|^3\} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_Y^3} \sum_{j=1}^n E\{|Y_j - E[Y_j]|^3\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $\sigma_X < \infty$, $\sigma_Y < \infty$ 分别为 $X = \sum_{j=1}^n X_j$ 和 $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$ 的标准差.

对式 (1) 中的随机过程 $Y_N(t)$, 定义

$$\left. \begin{aligned} X_j &= A_j \cos(\tilde{\omega}_j t_X + \phi_j) \\ Y_j &= A_j \cos(\tilde{\omega}_j t_Y + \phi_j) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

而 $\mathbf{Z}_j = (X_j, Y_j)$. 由于 $E[X_j] = 0$, $E[Y_j] = 0$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n E\{|X_j|^3\} &= \sum_{j=1}^n \int_{\omega_{j-1}^{(p)}}^{\omega_j^{(p)}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} p_{\tilde{\omega}_j}(\omega) |A_j \cos(\omega t_X + \phi_j)|^3 d\phi_j d\omega = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{4A_j^3}{3\pi} \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (5) 和式 (6) 代入式 (18), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{4A_j^3}{3\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \sum_{j=1}^n E_j \sqrt{E_j} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} G(\omega_j) \Delta\omega_j \right)^{\frac{3}{2}} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8\sqrt{2} G_{\max}^{\frac{3}{2}}}{3\pi (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^n (\Delta\omega_j)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

其中 $G_{\max} = \max_{0 \leq \omega \leq \omega_u} |G(\omega)|$. 因此, 只要当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega_j \rightarrow 0$, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{4A_j^3}{3\pi} = 0 \quad (20)$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{j=1}^n \frac{4A_j^3}{3\pi} = 0 \quad (21)$$

类似地可证明式 (16) 之第 2 式. 根据 Laning-Battin 定理, 可知 $Z = (Y_N(t_X), Y_N(t_Y))$ 是渐进正态的. 从这一结论可以自然地推广得知, 当 $N \rightarrow \infty$ 时任意 n 个时刻随机向量 $(Y_N(t_1), Y_N(t_2), \dots, Y_N(t_n))$ 均为渐进正态的.

2.2 截口概率密度函数

2.2.1 偏度与峰度系数

为了进一步了解式 (1) 中由随机谐和分量合成的随机过程 $Y_N(t)$ 的性质, 以下考察 $Y_N(t)$ 的截口随机变量的概率密度函数 $p_{Y_N}(y, t)$. 为此, 首先计算 $Y_N(t)$ 的前 4 阶中心矩. 显然, 均值 $\mu = E[Y_N(t)] = 0$. 从式 (2) 可知, 标准差

$$\sigma^2 = R_{Y_N}(0) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega \quad (22)$$

三阶中心矩

$$\alpha_3 = E[Y_N^3(t)] = E \left\{ \left[\sum_{i=1}^N A_i \cos(\tilde{\omega}_i t + \phi_i) \right]^3 \right\} = 0 \quad (23)$$

四阶中心矩

$$\alpha_4 = E[Y_N^4(t)] = E \left\{ \left[\sum_{i=1}^N A_i \cos(\tilde{\omega}_i t + \phi_i) \right]^4 \right\} =$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{3A_i^4}{8} + 3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{A_i^2 A_j^2}{4} \quad (24)$$

由此可知, 偏度系数

$$c_s = \frac{\alpha_3}{\sigma^3} = 0 \quad (25)$$

而峰度系数

$$c_k = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 =$$

$$\frac{3 \sum_{i=1}^N A_i^4 + 6 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N A_i^2 A_j^2}{2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i^2 A_j^2} - 3 \quad (26)$$

由于偏度系数为零, 可知 $p_{Y_N}(y, t)$ 是对称分布.

为简单计, 考虑等能量分布的情况, 即 $A_1 = A_2 = \dots = A_N$, 式 (26) 成为

$$c_k = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{3}{2N} < 0 \quad (27)$$

可见, 此时峰度系数总是小于零, 因而, $p_{Y_N}(y, t)$ 总是比相应的正态分布曲线平缓, 并且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_k(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} O(-N^{-1}) = 0 \quad (28)$$

即峰度系数随着 N 的增长以 N^{-1} 的速率趋向于零, 因而 $p_{Y_N}(y, t)$ 随着 N 的增长趋向于正态分布. 这与上一小节证明的结论是完全一致的.

为了进一步定量考虑 $p_{Y_N}(y, t)$ 趋于正态分布的速率, 考察 $\sigma^2 = 1$ 的情况. 这时

$$\alpha_4 = 3 \times \frac{2N - 1}{2N} \quad (29)$$

2.2.2 一维概率密度函数

文献 [7] 中采用椭圆函数研究了经典谱表示随机过程的一维概率密度函数, 这一基本技术亦用来研究随机谐和函数 $Y_N(t)$ 的一维概率密度函数. 但当前 4 阶矩均已知时, 采用 Pearson 分布函数族 [12], 可更为容易地获得 $p_{Y_N}(y, t)$ 的表达式

$$p_{Y_N}(y, t) \propto \left(1 - \frac{y}{a_1}\right)^{\nu(a_1 - a)} \left(1 - \frac{y}{a_2}\right)^{-\nu(a_2 - a)}$$

$$I\{a_1 \leq y \leq a_2\} \quad (30)$$

其中

$$a_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2b_2}, \quad \Delta = b_1^2 - 4b_0b_2$$

$$\nu = \frac{1}{b_2(a_1 - a_2)}, \quad b_0 = \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18} \sigma^2$$

$$a = b_1 = \sigma\sqrt{\beta_1} \frac{\beta_2 + 3}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}$$

$$b_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}, \beta_1 = \alpha_3^2, \beta_2 = \alpha_4$$

由于前 4 阶矩是时不变的， $p_{Y_N}(y, t)$ 也是时不变的，以下简称为 $p_{Y_N}(y)$ 。

将 $\sigma = 1$ 及式 (23) 和 (29) 代入式 (30)，可得

$$p_{Y_N}(y) = C \left(1 - \frac{y^2}{4N-2}\right)^{\frac{4N-5}{2}} I\{a_1 \leq y \leq a_2\} \tag{31}$$

其中， C 为满足概率相容条件的归一化常数。利用三角函数的积分公式 [13]，可得

$$C = \left(\int_{a_1}^{a_2} p_{Y_N}(y)dy\right)^{-1} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{4(N-1)-3}{4(N-1)-2} \frac{4(N-1)-1}{4(N-1)} \pi\sqrt{4N-2}\right]^{-1}$$

$$\xrightarrow{n=2(N-1)} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi\sqrt{2n+2}\right]^{-1} \tag{32}$$

根据 Wallis 公式 [14]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \tag{33}$$

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi\sqrt{2n+2}\right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{34}$$

当 $N = 1$ 时， $C = 1/(\sqrt{2\pi})$ ；当 $N = 2$ 时， $C = 8/(3\sqrt{6\pi})$ 。而界限

$$a_1 = -\sigma\sqrt{4N-2}, a_2 = \sigma\sqrt{4N-2} \tag{35}$$

显然，容易验证，当 $N = 1$ 时，从定理 1 可知 $Y_N(t)$ 的幅值 $A_1 = \sqrt{2}\sigma$ ，这与式 (35) 给出的界限是完全一致的，从而也验证了采用 Pearson 分布的正确性。

比较两个概率密度函数相近程度的一个有效指标是相对熵 [15]。当两个概率密度函数完全相同时，相对熵为零。当两个概率密度函数相差越大时，相对熵绝对值越大。记标准正态分布概率密度函数 $\phi(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$ ，则 $p_{Y_N}(y)$ 和 $\phi(y)$ 的相对熵为

$$H(p_{Y_N}, \phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \ln \frac{\phi(y)}{p_{Y_N}(y)} dy \tag{36}$$

为避免奇异问题，当 $p_{Y_N}(y) = 0$ 时，可用 $p_{Y_N}(y) = \varepsilon$ 替代， ε 取一小量，例如 10^{-8} 。

将式 (31) 代入式 (36)，并将 $\ln\left(1 - \frac{y^2}{4N-2}\right)$ 的 Taylor 展开式代入，可得

$$H(p_{Y_N}, \phi) \approx -\left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \ln C\right) - \frac{9}{4} \left[\frac{1}{4N-2} - \frac{1}{(4N-2)^2} + \dots\right] \tag{37}$$

注意到式 (34)，显然，随着 $N \rightarrow \infty$ ， $H(p_{Y_N}, \phi) = O(-N^{-1}) \rightarrow 0$ 。

图 1 给出随机谐和分量个数不同的截口概率密度函数与标准正态分布概率密度函数的对比，图 2 是上述分布的相对熵。从图 1 可以直观地看到，随着 N 的增大， $Y_N(t)$ 的一维概率密度函数 $p_{Y_N}(y, t)$ 很快地趋向于标准正态分布，而其相对熵则很快地趋近于零 (图 2)。特别值得指出的是， $N = 1$ 与 $N \geq 2$ 时的一维概率密度函数表现出明显的定性差异， $N \geq 2$ 时的一维概率密度函数都是钟形单峰曲

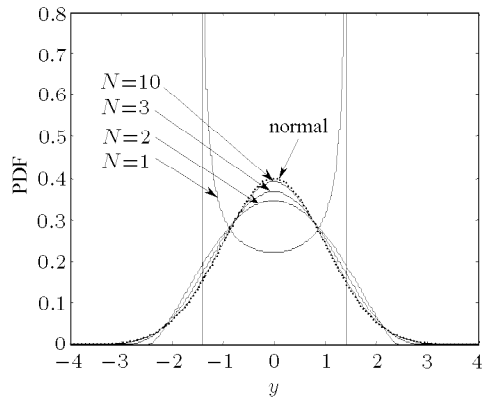


图 1 一维概率密度函数与标准正态分布
Fig.1 The one-dimensional PDF and the standard normal distribution

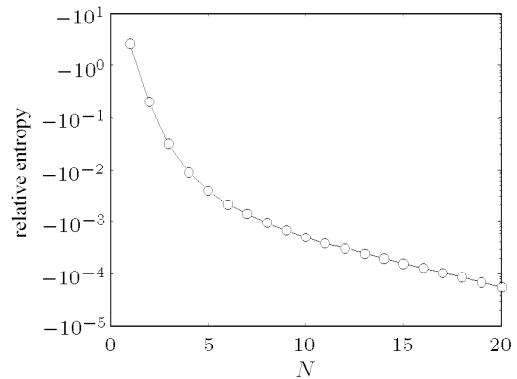


图 2 一维分布与标准正态分布的相对熵
Fig.2 The relative entropy between the one-dimensional PDF and the standard normal distribution

线, 而 $N = 1$ 时的一维概率密度函数则是一个对称有界的井型曲线. 这一特征, 与文献 [16] 中观察到的现象是不谋而合的.

3 相关问题讨论

3.1 宽带白噪声过程

当功率谱密度函数 $S_Y(\omega) = S_0 I\{-\omega_u \leq \omega \leq \omega_u\}$ 时, 随机过程 $Y(t)$ 称为有限带宽白噪声, 这里 S_0 为常数. 此时, 谐和分量的随机频率 $\tilde{\omega}_i$ 服从 $(\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})$ 之间的独立均匀分布.

3.2 随机谐和函数的项数

当 $N = 1$ 时, $Y_N(t)$ 退化为单一随机频率谐和过程 $Y_1(t) = A \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$. 根据定理 1 和定理 2, 当且仅当 ϕ 为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的随机变量, $A = \sqrt{2E}$, 而 $\tilde{\omega}$ 的概率密度函数与目标功率谱密度函数 $S_Y(\omega)$ 形状相同时, $Y_1(t)$ 的功率谱密度函数精确地等于目标功率谱密度函数. 在此情况下, 仅有一个谐和分量, 即可完全把握 $S_Y(\omega)$ 所含有的概率信息. 这一点, 从本质上解释了为什么采用虚拟激励法仅需要进行不同频率的单一谐和激励响应分析即可获得响应的功率谱密度函数 [17]. 事实上, 文献 [9] 中的方法即可认为是此种情况下再进行多次取样的加权平均.

虽然仅有一项即可完全表征功率谱密度函数, 但若需要逼近正态分布, 则通常要求项数 $N > 1$. 分别讨论如下:

(1) 若要求生成的随机过程幅值 $|Y_N(t)| \geq n_b \sigma$, 式 (35) 可给出随机过程的界限 $|Y_N(t)| \leq \sigma\sqrt{4N - 2}$, 因此, 有

$$N \geq \frac{n_b^2 + 2}{4} \tag{38}$$

例如, 若要求 $n_b = 3$, 则 $N \geq 3$ 即可.

(2) 从概率分布的峰度考察, 由于对标准正态分布 $\alpha_4 = 3\sigma^4$, 则可以定义

$$\kappa = \frac{|\alpha_4/\sigma^4 - 3|}{3} \times 100\% \tag{39}$$

作为目标概率密度与标准正态分布接近程度的度量指标. 将式 (29) 代入可得

$$\kappa = \frac{1}{2N} \times 100\% \tag{40}$$

因此, $N \geq \frac{1}{2\kappa}$. 例如, 若取 $\kappa = 10\%$, 则 $N \geq 5$ 即可; 若取 $\kappa = 5\%$, 则需取 $N \geq 10$.

(3) 从相对熵的角度, 若要求相对熵 $|H(p_{Y_N}, \phi)| \leq 1\%$, 从图 2 中可知 $N \geq 4$ ($|H(p_{Y_4}, \phi)| = 0.9\%$); 而若要求相对熵 $|H(p_{Y_N}, \phi)| \leq 0.1\%$, 则亦仅需 $N \geq 8$ 即可 ($|H(p_{Y_8}, \phi)| = 0.094\%$).

顺便指出, 只要式 (8) 得到满足, 式 (1) 中随机谐和函数过程的功率谱密度函数即为精确的目标功率谱密度函数. 基于这一认识, 最近又发展了第二类随机谐和函数表达方法.

4 数值算例

考虑功率谱密度函数为 $S_Y(\omega) = S_0 I\{\omega \leq \omega_u\}$ 的宽带白噪声过程, 取 $S_0 = 2 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_u = 100 \text{ rad/s}$. 图 3 是式 (1) 中含有 10 个随机谐和分量与采用经典谱表示方法 [7] 取 1000 个确定性频率谐和分量时的典型地震动时程. 从直观上看, 二者没有明显的定性差别. 图 4 是式 (1) 中取 10 个随机谐和分量与经

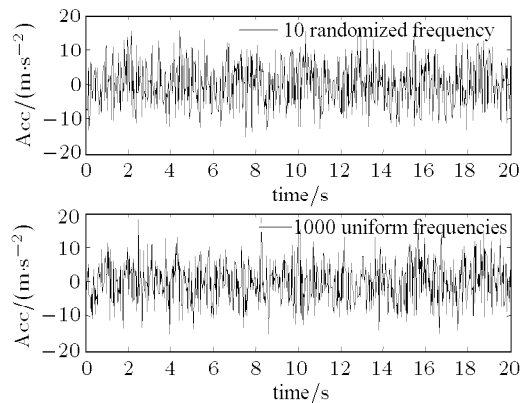


图 3 典型地震动时程

Fig.3 Typical time hisotry of the ground acceleration

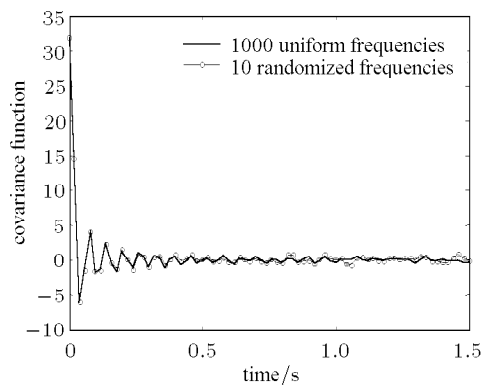


图 4 自相关函数

Fig.4 Auto-correlation function

典谱表达中取 1000 个确定性频率谱和分量时合成随机过程的自相关函数，可见二者吻合良好，此时一维概率密度函数的相对熵为 5.12×10^{-4} ，从而表明随机谱和函数表达式 (1) 含有精确的概率信息。

图 5 给出一个 9 层结构在随机地震动作用下的线性与非线性层间位移和内力响应的标准差过程。图 6 是典型样本的线性与非线性恢复力曲线过程，可见结构进入了严重的非线性阶段。从中可见，与经典方法相比较，无论是线性还是非线性情况下，10 个随机谱和分量构成的随机地震动作用下的结构内力和位移响应标准差均具有很高的精度。

值得指出的是，从图 5 可见，非线性结构的位移响应进入平稳段较之线性结构进入平稳段时间更长，即初始条件对非线性位移响应的影响比对线性

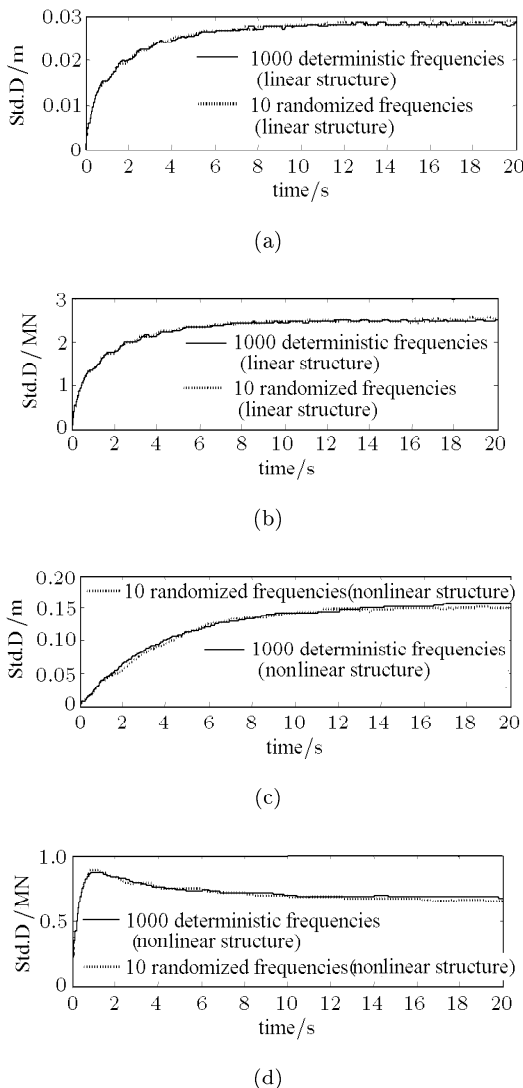


图 5 结构反应标准差

Fig.5 The standard deviation of the structural responses

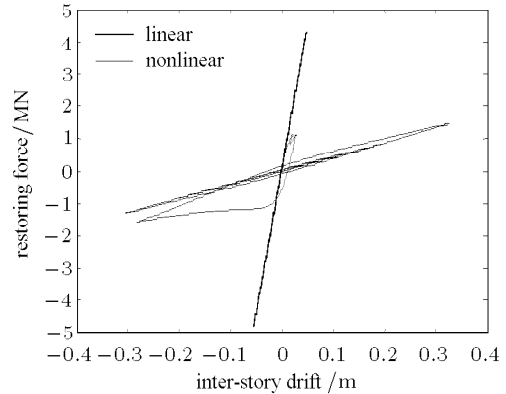


图 6 典型线性与非线性恢复力曲线

Fig.6 Typical linear and nonlinear restoring curves

位移反应的影响为大。特别是，与线性响应内力标准差几乎单调增长不同，非线性结构的内力响应标准差首先迅速增长，趋于某个极值之后缓慢下降。这一特点，无疑对非线性结构的可靠度分析具有重要的影响，仅考虑平稳内力响应获得的非线性结构可靠度分析结果，将是偏于危险的。

上述实例分析验证了随机谱和函数表达的有效性。采用已有的随机过程表达，常常需要数百个级数项才能获得目标功率谱密度的近似值，而采用随机谱和函数表达，仅需要数个分量，即可反映二阶平稳过程的精确功率谱信息，而且对宽带过程（如算例中的白噪声）也是适用的，因而极大地减少了随机变量的个数，大大降低了随机动力系统分析的难度。

5 结 论

随机过程的随机函数表述是随机动力学分析中的重要环节。经典的谱表示方法难以获得精确的功率谱密度函数，且含有的级数项数往往高达数百项，从而带来巨大的计算工作量。本文提出了一类随机过程的随机谱和函数表述方式，详细研究了其基本性质。研究证明，当随机谱和函数的频率服从的概率密度函数与目标功率谱密度函数一致时，随机谱和函数过程的功率谱与目标功率谱完全一致。同时，随机谱和函数过程具有渐进正态性。这表明，以极少数目的随机谱和分量，即可合成具有精确的目标功率谱密度的随机过程，极大地减少了随机变量的个数。以多自由度结构在平稳随机过程激励下的响应分析为例，验证了随机谱和函数过程的有效性和优越性。

上述基本思想，完全可能推广到演变功率谱描述的非平稳随机过程表达。同时，结合概率密度演

化方法, 可以进行工程结构非线性随机动力响应概率密度演化分析与结构可靠度的精细化分析. 值得进一步研究的问题包括如何更为深入地理解样本特性与集合性质之间的关系, 如何考虑非正态过程的随机谱和函数表达等等.

参 考 文 献

- 1 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992 (Zhu Weiqiu. Random Vibration. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 2 Li J, Chen JB. Stochastic Dynamics of Structures. Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 2009
- 3 李杰. 工程结构随机动力激励的物理模型. 李杰, 陈建兵主编. 随机振动理论与应用新进展, 上海: 同济大学出版社, 2009. 119-132 (Li Jie. Physical models for engineering dynamic excitations. In: Li Jie, Chen Jianbing, eds. New Advances in Random Vibration and Applications, Shanghai: Tongji University Press, 2009. 119-132 (in Chinese))
- 4 Bendat JS, Piersol AG. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. 3rd edn. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000
- 5 Huang SP, Quek ST, Phoon KK. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(9): 1029-1043
- 6 Grigoriu M. Evaluation of Karhunen-Loève, spectral, and sampling representations for stochastic processes. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006, 132(2): 179-189
- 7 Shinozuka M, Deodatis G. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Applied Mechanics Review*, 1991, 44(4): 191-204
- 8 Grigoriu M. Stochastic Calculus. Birkhäuser, 2002
- 9 Goto H, Toki K. Structural response to nonstationary random excitation. In: Proc. World Conf. Earthquake Eng., 4th, Santiago, Chile, 1969. 130-144
- 10 Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, 49(1): 357-368
- 11 Mignolet MP, Harish MV. Comparison of some simulation algorithms on basis of distribution. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122(2): 172-176
- 12 Zhao YG, Ono T. Moment methods for structural reliability. *Structural Safety*, 2001, 23: 47-75
- 13 汪胡楨主编. 现代工程数学手册 (第 I 卷). 武汉: 华中工学院出版社, 1985 (Wang Huzhen ed. Handbook of Modern Engineering Mathematics (Vol. 1). Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 1985 (in Chinese))
- 14 克莱因 M 著. 古今数学思想 (第二册). 朱学贤, 申又彬, 叶其孝等译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002 (Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Vol.2). Zhu Xuexian, Shen Youchang, Ye Qixiao, et al. transl. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 2002 (in Chinese))
- 15 Papoulis A, Pillai SU. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. 4th edn. New York: McGraw-Hill, 2002
- 16 Li J, Chen JB. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters. *Computational Mechanics*, 2004, 34: 400-409
- 17 陈建兵, 彭勇波, 李杰. 关于虚拟激励法的一个注记. 计算力学学报, 2011, 28(2): 163-167 (Chen Jianbin, Peng Yongbo, Li Jie. A note on the pseudo-excitation method. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, 28(2): 163-167 (in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

STOCHASTIC HARMONIC FUNCTION AND SPECTRAL REPRESENTATIONS ¹⁾

Chen Jianbing²⁾ Li Jie

(*State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering & School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

Abstract Stochastic harmonic functions and their properties are studied. In the paper, it is firstly proved that as the distributions of the random frequencies are consistent with the target power spectral density function, the power spectral density of the stochastic harmonic process is identical to the target power spectral density. Further, it is proved that the stochastic harmonic process is asymptotically Gaussian. The rate of approaching Gaussian distribution is discussed by adopting Pearson distribution to describe the one-dimensional distribution of the stochastic harmonic process. Compared to existing representations of stochastic process, very few stochastic harmonic components can capture the exact target power spectral density. This greatly reduces the number of the random variables and thus eases the difficulty of stochastic dynamics. Finally, linear and nonlinear responses of a multi-degree-of-freedom system subjected to random ground motions are carried out to exemplify the effectiveness and advantages of the stochastic harmonic representations.

Key words stochastic harmonic function, power spectral density function, covariance function, stationary process, nonlinearity

Received 2 June 2010, revised 19 January 2011.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872148, 90715033), the National High Technology Research and Development Program of China (2008AA05Z413) and the New Century Talents Plan.

2) E-mail: Chenjb@tongji.edu.cn