

# 利用时滞反馈控制自参数振动系统的振动<sup>1)</sup>

赵 艳 影<sup>\*,2)</sup>, 徐 鉴<sup>+</sup>

\* (南昌航空大学飞行器工程学院, 南昌 330063) + (同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要:** 文章主要研究采用时滞状态反馈控制自参数动力吸振器减振系统中主系统的振动问题. 系统在简谐激励作用下, 采用多尺度方法得到了自参数动力吸振器减振系统中饱和控制的范围. 当系统处于饱和控制时, 引入时滞状态反馈控制主系统的振动. 主要分析了反馈增益系数和时滞两控制参数对主系统振动的影响. 结果表明, 存在反馈增益系数和时滞的调节区域能够减小主系统的振动. 对某一反馈增益系数, 可以在某段区间内调节时滞以减小主系统的振动. 在时滞的调节区间内存在一个时滞的“最大减振点”, 能够在该反馈增益系数下最大程度的减小主系统的振动. 研究还表明, 随着反馈增益系数的不断增大, 时滞在“最大减振点”时系统的减振能力也不断提高. 通过合理的选择反馈增益系数和时滞两参数, 主系统的振动几乎可以完全消除.

**关键词:** 时滞反馈; 饱和控制; 自参数动力吸振器; 减振

**中图分类号:** O328 TB123 **文献标识码:** A **文章编号:**

## 引 言

自参数振动是一种特殊的非线性振动. 自参数振动一般由两个部分组成, 主振动系统在外激励、参变激励或者是自激作用下振动. 次系统不直接受到激励的作用, 一般不随着主系统振动. 主系统实际上就充当了次系统的参变激励. 自参数共振使得次系统吸收主系统的振动, 从而抑制主系统的振动. 饱和现象是非线性自参数系统一种重要的现象. 当主系统受到外共振类型的外激励时, 主系统的振幅随着外激励振幅的增大而增大, 当外激励的振幅超过某一阈值时, 主系统的振幅达到饱和而不再增大, 这时能量就传递到次系统, 这种现象称为非线性自参数振动系统的饱和现象. 利用非线性自参数振动系统的饱和性质能够实现对主系统振动的宽频带控制.

在弱非线性振动系统中, 当一个两自由度系统的两个固有频率比为 1:2, 并且高阶模态受到主共振类型的外激励时, 系统就出现了饱和现象. Nayfeh 等<sup>[1]</sup>在研究船体的俯仰和横摇耦合运动时首先发现了饱和现象. 后来 Haddow 等<sup>[2]</sup>在实验中也证实了饱和现象的存在, 并提出可以利用非线性系统的饱和现象制造减振器. Haxton 等<sup>[3]</sup>对一个自参数减振器模型进行了研究, 发现当主共振和 1:2 内共振同时发生时系统出现饱和现象. Banerjee 等<sup>[4]</sup>和 Bajaj 等<sup>[5]</sup>研究了带有参数激励摆的两自由度振动系统, 发现了混沌等复杂运动, 研究还发现由于模型当中高阶非线性项的出现而阻止了饱和现象的出现. Rifai 等<sup>[6]</sup>学者研究了带有参数激励摆的四自由度系统, 发现了混沌等复杂运动. Vyas 等<sup>[7]</sup>学者研究了带有多个参数激

— — 收到第 1 稿, — — 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10802035)和国家自然科学基金重点(11032009)资助项目

2) E-mail: yanyingzhao@163.com

励摆的多自由度系统的动力学行为,研究发现使用多摆拓宽了减振频带的宽度.Nayfeh 等<sup>[8]</sup>研究了两个耦合梁的自参数振动问题,发现了由于内共振而产生的饱和现象,以及产生的准周期等复杂运动.Pai 等<sup>[9]</sup>学者利用内共振和自参数系统的饱和现象来控制悬臂梁的瞬态和稳态响应,取得了很好的控制效果.Sayam 等<sup>[10]</sup>利用自参数振动系统的饱和性质,采用压电作动器来主动控制悬臂梁的振动,研究了振动模态耦合对悬臂梁振动的影响.Li 等<sup>[11]</sup>利用饱和性质采用非线性吸振器主动控制非线性机械设备的振动.Song 等<sup>[12]</sup>采用谐波平衡法研究了带有参数激励摆的两自由度质量弹簧系统的动力学响应特性和稳定性.作者对文献[12]的研究发现在某些内共振解谐参数范围内系统也存在饱和现象,在某些情况下可以利用饱和现象控制主系统的振动,达到控制要求.然而进一步的研究又发现饱和控制时主系统的振幅较大,对于一些精密仪器设备减振效果并不理想.作者近期的研究<sup>[13,14]</sup>发现采用时滞反馈控制可以抑制主系统的振动以及控制饱和控制的减振频带.作者出于抑制饱和控制时主系统振动的研究动机,考虑采用时滞反馈来抑制主系统的振动.

时滞减振是一种新兴的减振技术,美国学者 Olgac<sup>[15]</sup>首先提出在耦合的线性强迫振动系统中耦合进时滞,可以通过时滞的在线调节完全消除主系统的振动.该课题组的成员经过大量的理论和实验研究<sup>[16-18]</sup>取得了线性系统时滞动力吸振器减振技术的理论依据和实验结果.尽管研究表明该减振器对主系统的振动有很好的减振效果,然而该方法存在本质的缺陷.原因在于时滞量是一个确定的数值,如果在工程实践中时滞漂移,系统的振动将更加剧烈.

因此,作者考虑采用时滞和非线性联合耦合的方法使非线性系统时滞动力吸振器具有更宽的共振频带,加上时滞本身又有移相作用,非线性和时滞的联合耦合作用就使得时滞的可调节范围大大的拓宽了.本文在文献[12]的非线性动力吸振器系统中引进一个带有时滞的状态反馈,采用时滞反馈控制来抑制主系统的振动.相比阻尼减振器和非线性动力吸振器的振动控制系统,时滞反馈控制是两参数控制问题,反馈增益系数和时滞是两个可以独立调节的物理参数,有广阔的设计和调节空间.

## 1 时滞动力系统的微分方程

文献[12]研究了一个带有参数激励摆的质量弹簧系统.在控制系统中,通常时滞被看成是系统的不利因素,时滞是要求被减小或者是控制的量,因为即使很小的时滞也可能引起系统复杂的动力学行为.在本文中,作者给振动系统引进一个带有时滞的状态反馈,用来控制该系统中主系统的振动,图 1 是减振系统的结构示意图.

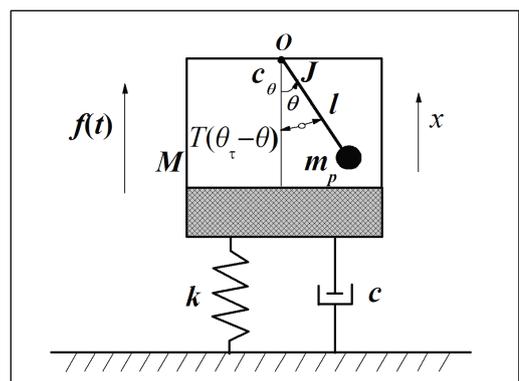


图 1 自参数振动系统的时滞反馈控制模型

Fig. 1 A model describing the auto-parametric dynamical vibration absorber with delayed feedback

以垂直方向的位移和单摆的角度位移为广义

坐标,建立系统的运动微分方程

$$(M+m_p)\ddot{x}+c\dot{x}+kx+m_p l(\ddot{\theta}+\theta\dot{\theta}^2)\cos\theta=f(t) \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta}+c_\theta\dot{\theta}+m_p l\sin\theta(g+T(\theta_\tau-\theta))=0 \quad (2)$$

其中,  $M$  是主系统物块的质量,  $k$  是线性弹簧的刚度系数,  $c$  是阻尼器的阻尼系数. 物块  $M$  受到谐波外激励  $f(t) = P_0 \cos(\omega t)$  的作用. 次系统也就是减振器系统, 由附加到主系统的单摆构成,  $m_p$  是摆的质量,  $l$  是摆杆的长度,  $c_\theta$  和  $J$  分别表示单摆的阻尼系数及惯性矩.  $T(\theta_\tau - \theta)$  是耦合进的反馈控制项,  $T$  是反馈增益系数,  $\tau$  是时滞, 且  $\theta_\tau = \theta(t - \tau)$ . 当  $\tau = 0$  时, 时滞反馈控制项消失, 该系统就退化为文献[12]中所研究的自参数动力吸振器减振系统. 因此, 很容易观察到  $\tau \neq 0$  时时滞反馈控制对主振动系统的减振效果.

## 2 摄动分析

为了便于分析, 引入下列无量纲量

$$t^* = \frac{\omega}{\Omega} t, \tau^* = \frac{\omega}{\Omega} \tau, \eta = \frac{x}{l}, F = \frac{P_0}{kl}, R = \frac{m_p}{M}, \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \beta_2 = \frac{\omega_4}{\omega_1}, \mu = \frac{m_p l^2}{J}, \xi_1 = \frac{c}{2M\omega_3(1+R)}$$

$$\xi_2 = \frac{c_\theta}{2J\omega_3}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m_p}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{M}},$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{T}{J}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_3}. \text{ 为了书写方便, 将方程中“*”号去掉, 则系统无量纲化的运动微分方程为}$$

$$\begin{aligned} \eta'' + 2\xi_1\eta' + \alpha^2\eta + \frac{R}{1+R}(\theta''\sin\theta + \theta'^2\cos\theta) \\ = \alpha^2 F \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta'' + 2\xi_2\theta' + \mu(\alpha^2\beta_1^2 + \eta'')\sin\theta$$

$$+ \alpha^2\beta_2^2(\theta_\tau - \theta) = 0 \quad (4)$$

其中,  $\Omega$  是无量纲频率,  $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dt^*}$ .

由于  $x$  和  $\theta$  均为小量, 计算中可以近似取  $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$ ,  $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ . 对变量进行重新标度, 取  $\eta = \varepsilon\hat{\eta}$ ,  $\theta = \varepsilon\hat{\theta}$ ,  $F = \varepsilon^2\hat{F}$ ,  $\xi_1 = \varepsilon\hat{\xi}_1$ ,  $\xi_2 = \varepsilon\hat{\xi}_2$ ,  $\beta_2^2 = \varepsilon\hat{\beta}_2^2$ ,  $\theta_\tau = \varepsilon\hat{\theta}_\tau$ . 同时为了书写方便, 将“^”去掉, 得到新的无量纲化的系统的运动微分方程

$$\begin{aligned} \eta'' + \Omega_1^2\eta = \varepsilon[-G\eta' - \frac{R}{1+R}(\theta''\theta + \theta'^2) \\ + E\cos(\Omega t)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \theta'' + \Omega_2^2\theta = \varepsilon[-H\theta' - \mu\theta\eta'' - D(\theta_\tau - \theta)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\Omega_1^2 = \alpha^2$ ,  $\Omega_2^2 = \mu\alpha^2\beta_1^2$ ,  $D = \alpha^2\beta_2^2$ ,  $E = F\alpha^2$ ,  $G = 2\xi_1$ ,  $H = 2\xi_2$ .

下面采用多尺度方法来寻找方程的二阶近似解, 其解可以表示为

$$\eta(t, \varepsilon) = \eta_0(T_0, T_1) + \varepsilon\eta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (7)$$

$$\theta(t, \varepsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \varepsilon\theta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (8)$$

$$\theta_\tau(t, \varepsilon) = \theta_{0\tau}(T_0, T_1) + \varepsilon\theta_{1\tau}(T_0, T_1) + \dots \quad (9)$$

的形式. 其中  $T_n = \varepsilon^n t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  是引进的一些新的自变量, 因此关于  $t$  的导数变成关于  $T_n$  的偏导数, 可以表示为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (11)$$

其中,  $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}$ ,  $k = 0, 1$ .

将方程(7)-(11)代入方程(5)-(6), 并使  $\varepsilon$  同次幂的系数相等, 得到

$\varepsilon^1$ :

$$D_0^2\eta_0 + \Omega_1^2\eta_0 = 0 \quad (12)$$

$$D_0^2\theta_0 + \Omega_2^2\theta_0 = 0 \quad (13)$$

$\varepsilon^2$ :

$$\eta_1 + \Omega_1^2 \eta_1 = -2D_0 D_1 \eta_0 - G D_0 \eta_0 - \frac{R}{1+R} [\theta_0 D_0^2 \theta_0 + (D_0 \theta_0)^2] + E \cos(\Omega t) \quad (14)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \Omega_2^2 \theta_1 = -2D_0 D_1 \theta_0 - H D_0 \theta_0 - \mu \theta_0 D_0^2 \eta_0 - D(\theta_{0\tau} - \theta_0) \quad (15)$$

方程(12)和(13)的通解可以表示为

$$\eta_0 = A_1(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + cc \quad (16)$$

$$\theta_0 = A_2(T_1) e^{i\Omega_2 T_0} + cc \quad (17)$$

其中,  $A_1(T_1)$  和  $A_2(T_1)$  是未确定的函数,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $cc$  代表前面各项的共轭复数.

外激励项和时滞项可以表示为如下的形式

$$E \cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2} E e^{i\Omega T_0} + cc \quad (18)$$

$$\theta_{0\tau} = A_{2\tau}(T_1) e^{i\Omega_2(T_0 - \tau)} + cc \quad (19)$$

假设  $\tau$  和  $\varepsilon$  都很小的前提下,  $A_{2\tau}$  可以按照泰勒级数展开<sup>[19]</sup>成下面的形式

$$A_{2\tau} = A_2(T_1 - \varepsilon\tau) = A_2(T_1) - \varepsilon\tau A_2'(T_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tau^2 A_2''(T_1) + \dots \quad (20)$$

将方程(16)-(20)代入方程(14)-(15)得到

$$D_0^2 \eta_1 + \Omega_1^2 \eta_1 = -i\Omega_1(2A_1' + GA_1) e^{i\Omega_1 T_0} + \frac{1}{2} E e^{i\Omega T_0} + 2 \frac{R}{1+R} \Omega_2^2 A_2^2 e^{i2\Omega_2 T_0} + cc \quad (21)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \Omega_2^2 \theta_1 = -i\Omega_2(2A_2' + HA_2) e^{i\Omega_2 T_0} + \mu \Omega_1^2 A_1 A_2 e^{i(\Omega_1 + \Omega_2) T_0} + \mu \Omega_1^2 A_1 \bar{A}_2 e^{i(\Omega_1 - \Omega_2) T_0} - D A_2 e^{i\Omega_2(T_0 - \tau)} + D A_2 e^{i\Omega_2 T_0} + cc \quad (22)$$

其中,  $()' \equiv \partial() / \partial T_1 = \partial() / \partial(\varepsilon t)$ .

考虑主共振和 1:2 内共振同时发生时减振系统的动力学行为, 引进解谐参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  表示偏差值. 其中  $\sigma_1$  表示外共振解谐, 与系统的减振频带有关;  $\sigma_2$  表示内共振解谐, 与制造和控制等技术有关.

$$\Omega_1 = \Omega - \varepsilon\sigma_1 \quad (23)$$

$$\Omega_2 = 2\Omega_2 - \varepsilon\sigma_2 \quad (24)$$

考虑(23)和(24)得到方程(21)和(22)的可解性条

件

$$-i\Omega_1(2A_1' + GA_1) + \frac{1}{2} E e^{i\sigma_1 T_1} + 2 \frac{R}{1+R} \Omega_2^2 A_2^2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0 \quad (25)$$

$$-i\Omega_2(2A_2' + HA_2) + \mu \Omega_1^2 A_1 \bar{A}_2 e^{-i\sigma_2 T_1} - D A_2 e^{-i\Omega_2 \tau} + D A_2 = 0 \quad (26)$$

方程(25)和(26)的解可以写成如下的形式

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1(T_1) e^{i\theta_1(T_1)} \quad (27)$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2(T_1) e^{i\theta_2(T_1)} \quad (28)$$

将方程(27)和(28)代入方程(25)和(26), 并将得到的结果实部和虚部分开, 得到

$$a_1' = \frac{1}{2\Omega_1} E \sin \phi_1 - \frac{1}{2} G a_1 - \frac{1}{2\Omega_1} \frac{R}{1+R} \Omega_2^2 a_2^2 \sin \phi_2 \quad (29)$$

$$a_1 \phi_1' = a_1 \sigma_1 + \frac{1}{2\Omega_1} E \cos \phi_1 + \frac{1}{2\Omega_1} \frac{R}{1+R} \Omega_2^2 a_2^2 \cos \phi_2 \quad (30)$$

$$a_2' = -\frac{1}{2} H a_2 + \frac{1}{4\Omega_2} \mu \Omega_1^2 a_1 a_2 \sin \phi_2 + \frac{1}{2\Omega_2} D a_2 \sin(\Omega_2 \tau) \quad (31)$$

$$a_2 \frac{\phi_1' + \phi_2'}{2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) a_2 + \frac{1}{4\Omega_2} \mu \Omega_1^2 a_1 a_2 \cos \phi_2 - \frac{1}{2\Omega_2} D a_2 \cos(\Omega_2 \tau) + \frac{1}{2\Omega_2} D a_2 \quad (32)$$

其中,  $\phi_1 = \sigma_1 T_1 - \theta_1$ ,  $\phi_2 = \theta_1 - 2\theta_2 - \sigma_2 T_1$ .

### 3 平衡解及其稳定性分析

主系统和次系统的振幅  $a_1$  和  $a_2$  都假设是正数, 则方程组(29)-(32)可能存在两类平衡解

(1) 耦合模态解

$$a_1 = \frac{4\Omega_2}{\mu \Omega_1^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} H - \frac{1}{2\Omega_2} D \sin(\Omega_2 \tau) \right]^2 \right.$$

$$+[\frac{1}{2\Omega_2} D\cos(\Omega_2\tau) + \frac{1}{2\Omega_2} D + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$a_2 = \sqrt{-b \pm \sqrt{b^2 - c}} \quad (34)$$

(2)单模态解

$$a_1 = \frac{E}{\Omega_1 \sqrt{G^2 + 4\sigma_1^2}} \quad (35)$$

$$a_2 = 0 \quad (36)$$

其中,

$$b = \frac{1}{\mu \frac{R}{1+R} \Omega_1 \Omega_2} \{4G[\frac{1}{2}H - \frac{1}{2\Omega_2} D\sin(\Omega_2\tau)] - 8\sigma_1[\frac{1}{2\Omega_2} D\cos(\Omega_2\tau) + \frac{1}{2\Omega_2} D + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]\} \quad (37)$$

$$c = \{[\frac{1}{2}H - \frac{1}{2\Omega_2} D\sin(\Omega_2\tau)]^2 + [\frac{1}{2\Omega_2} D\cos(\Omega_2\tau) + \frac{1}{2\Omega_2} D + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]^2\} \frac{16(G^2 + 4\sigma_1^2)}{\mu^2(\frac{R}{1+R})^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2} - \frac{E^2}{(\frac{R}{1+R})^2 \Omega_2^4} \quad (38)$$

为了确定平衡解的稳定性,将方程组(29)-(32)转化到直角坐标系下

$$p_1' = \frac{1}{\Omega_1} [-\frac{1}{2}Gp_1\Omega_1 - \sigma_1\Omega_1q_1 - \frac{R}{1+R}\Omega_2^2 p_2 q_2] \quad (39)$$

$$q_1' = \frac{1}{\Omega_1} [\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\Omega_1 Gq_1 + \sigma_1\Omega_1 p_1 + \frac{1}{2}\frac{R}{1+R}\Omega_2^2 (p_2^2 - q_2^2)] \quad (40)$$

$$p_2' = \frac{1}{\Omega_2} [-\frac{1}{2}H\Omega_2 p_2 - \frac{1}{2}\Omega_2(\sigma_1 - \sigma_2)q_2 + \frac{1}{4}\mu\Omega_1^2 (p_1 q_2 - q_1 p_2) - \frac{1}{2}Dq_2 + \frac{1}{2}D\sin(\Omega_2\tau)p_2 + \frac{1}{2}D\cos(\Omega_2\tau)q_2] \quad (41)$$

$$q_2' = \frac{1}{\Omega_2} [-\frac{1}{2}H\Omega_2 q_2 + \frac{1}{2}\Omega_2(\sigma_1 - \sigma_2)p_2 + \frac{1}{4}\mu\Omega_1^2 (p_1 p_2 + q_1 q_2) + \frac{1}{2}Dp_2 + \frac{1}{2}D\sin(\Omega_2\tau)q_2 - \frac{1}{2}D\cos(\Omega_2\tau)p_2] \quad (42)$$

其中,  $p_1 = a_1 \cos \phi_1$ ,  $q_1 = a_1 \sin \phi_1$ ,  $p_2 = a_2 \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ ,  $q_2 = a_2 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ .

为了分析平衡解的稳定性,对方程组(39)-(42)进行摄动分析,摄动方程为

$$\{\Delta p_1', \Delta q_1', \Delta p_2', \Delta q_2'\}^T = [\mathbf{J}]\{\Delta p_1, \Delta q_1, \Delta p_2, \Delta q_2\}^T \quad (43)$$

其中,  $T$ 代表转置矩阵,  $[\mathbf{J}]$ 是雅可比 (C. G. J. Jacobi) 矩阵.对应平衡解的特征方程可以表示为

$$\lambda^4 + \delta_1 \lambda^3 + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda + \delta_4 = 0 \quad (44)$$

式中  $\lambda$  代表矩阵  $[\mathbf{J}]$  的特征值,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  和  $\delta_4$  代表特征方程的系数.

用罗斯-霍尔维兹准则去判断方程的稳定性,得到系统稳定的充分和必要条件

$$\delta_1 > 0, \delta_1 \delta_2 - \delta_3 > 0,$$

$$\delta_3(\delta_1 \delta_2 - \delta_3) - \delta_1^2 \delta_4 > 0, \delta_4 > 0 \quad (45)$$

目前主要的分岔理论都是针对自治系统的分岔问题,本文研究的微分方程(3)和(4)是非自治系统,为了研究该系统的分岔及系统的动力学行为,文章采用多尺度的方法得到新的自治系统的方程(39)-(42),研究其平衡解的稳定性及分岔问题.因此,非自治系统的微分方程(3)和(4)的平衡解的稳定性归结为研究特征方程(44)的所有特征根性质来决定.

## 4 饱和控制范围及其分析

通过对平衡解的分析可以断定,系统可能存在单模态和耦合模态两种运动状态.图2和图3分别给出了内共振解谐参数  $\sigma_2 = -0.30$  和  $\sigma_2 = 0.10$  时原始的无时滞系统的幅频响应曲线,图中  $SN_{\text{g}}$  代表鞍结分岔点,  $PF_{\text{g}}$  代表叉形分岔点,  $HB_{\text{g}}$  代表 Hopf 分岔

点.空心点线代表稳定解,实线代表不稳定的焦点,星号线代表除不稳定焦点以外的其它类型不稳定的解.图 2 中无量纲参数选择为:  $\Omega_1 = 0.90$ ,  $H = 0.10$ ,  $\mu = 1.00$ ,  $D = 0$ ,  $G = 0.10$ ,  $E = 0.10$ ,  $R = 0.10$ .

令微分方程组(39)-(42)右端为零,采用摄动法可得到平衡解如图 2 和图 3 所示。在微分方程组(29)-(32)中  $\{a_1, \phi_1, a_2, \phi_2\}^T$  为状态变量, 为了进一步研究平衡解的类型和稳定性, 令  $\{p_1, q_1, p_2, q_2\}^T$  为变换后的状态变量, 外共振解谐参数  $\sigma_1$  为分岔参数. 变量  $\{a_1, \phi_1, a_2, \phi_2\}^T$  的雅可比矩阵与转换后的变量  $\{p_1, q_1, p_2, q_2\}^T$  的雅可比矩阵 **[J]** 具有相同的特征根. 对每一个  $\sigma_1$  值都可以得到矩阵 **[J]** 有四个特征根, 根据特征根的性质可以判断平衡解的类型以及稳定性. 如果四个特征根都具有严格的负实部, 则平衡解就是稳定的, 反之就是不稳定的. 在得到了平衡解的个数, 分析了平衡解的类型, 判断了平衡解的稳定性随着分岔参数  $\sigma_1$  的变化之后, 需要进一步识别分岔的类型.

首先, 找到特征根为零的点. 在复平面内, 随着分岔参数  $\sigma_1$  的变化, 如果有一个特征根沿着实轴从左半平面穿越到右半平面, 而其余三个特征根仍然在左半平面, 则可能发生鞍结分岔或叉形分岔. 如果在分岔点平衡解个数为 1, 分岔点两侧分别为 0 和 2, 平衡解的两个分支分别为不稳定的鞍点和稳定的结点, 则可以判定该分岔点为鞍结分岔. 如果一个稳定(不稳定)的平衡解经分岔点后分支出另外一支不稳定(稳定)的平衡解, 则可判定该分岔点为叉形分岔.

其次, 找到特征根实部为零的一对纯虚根的点. 在复平面内, 随着分岔参数  $\sigma_1$  的变化, 如果有一对非零的共轭特征根横穿虚轴, 而其余两个特征根仍然在左半平面, 则可能发生 Hopf 分岔. 如果在分岔点两侧, 平衡解的两个分支分别为稳定的焦点和不稳定的焦点, 则可判定该分岔点为 Hopf 分岔.

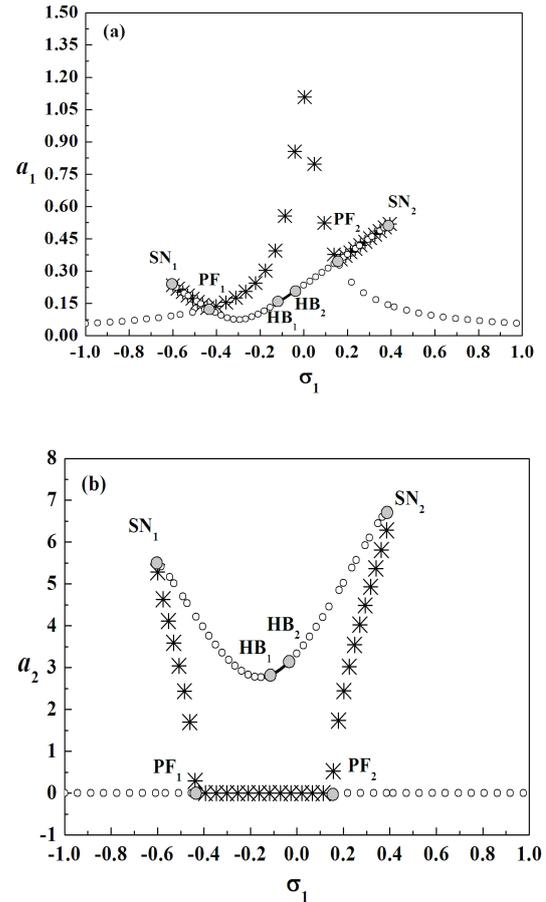


图 2  $\sigma_2 = -0.30$  时的幅频响应曲线 (a)主系统, (b)次系统

Fig. 2 The amplitude – frequency response curves when  $\sigma_2 = -0.30$ , where (a) primary system, (b) second system

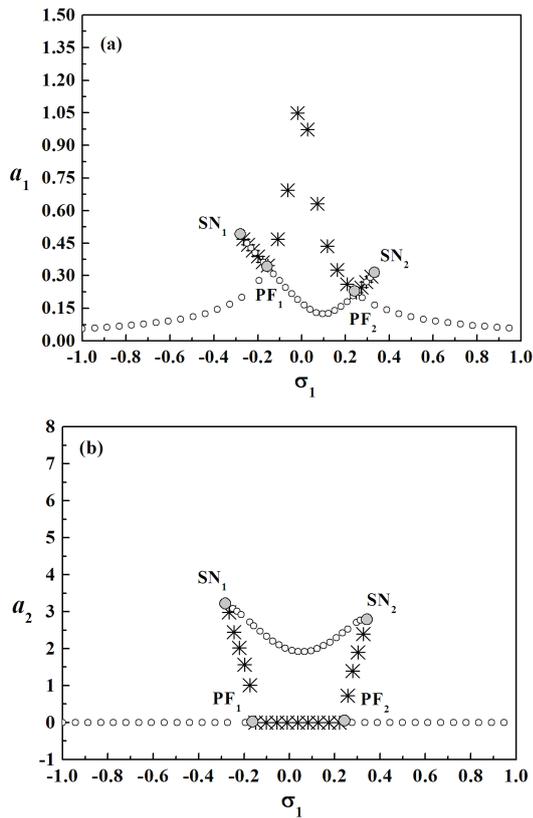


图3  $\sigma_2 = 0.10$  时的幅频响应曲线 (a)主系统, (b)次系统

Fig. 3 The amplitude – frequency response curves when  $\sigma_2 = 0.10$ , where (a) primary system, (b) second system

根据系统的运动状态不同在图2中外共振解谐参数 $\sigma_1$ 将横轴分为4个区间.首先,当外共振解谐参数 $\sigma_1$ 在 $[-1, SN_1]$ 或 $[SN_2, 1]$ 的区间变化时,系统是稳定的单模态运动.其次,当 $\sigma_1$ 在 $[SN_1, PF_1]$ 或 $[PF_2, SN_2]$ 区间变化时,如果初始条件比较小,系统是稳定的单模态运动;如果初始条件较大,系统则是稳定的耦合模态运动.再次,当 $\sigma_1$ 在 $[PF_1, HB_1]$ 或 $[HB_2, PF_2]$ 区间变化时,系统是稳定的耦合模态运动,对应系统的饱和控制状态.最后,当 $\sigma_1$ 在 $[HB_1, HB_2]$ 区间变化时,由于周期解通过Hopf分岔失去稳定性,

系统可能产生准周期或者是混沌等复杂的运动,这一结果在文献[4,7]中也得到了证实,因此在工程实际中要避免动力吸振器在该区域操作.

图3是 $\sigma_2 = 0.10$ 时原始的无时滞系统的幅频响应曲线,而且在图3中没有Hopf分岔出现.通过对比图2和图3能够发现,随着内共振解谐参数绝对值的不断增大幅频响应曲线出现了Hopf分岔点,使得系统出现了复杂的动力学现象.因此,控制内共振解谐参数显得非常重要.下面以 $\sigma_2 = 0.10$ 为例,在方程(3)和(4)的基础上进行数值模拟,分析饱和控制对主系统振动的抑制作用.图4是没有动力吸振器时当外共振解谐参数为 $\sigma_1 = 0.10$ 时主系统的时间历程响应曲线.图5则给出了有动力吸振器时外共振解谐参数 $\sigma_1 = 0.10$ ,内共振解谐参数 $\sigma_2 = 0.10$ 时主系统的时间历程响应曲线,其中初始条件为 $\eta(0) = \theta(0) = \eta'(0) = \theta'(0) = 10^{-4}$ .

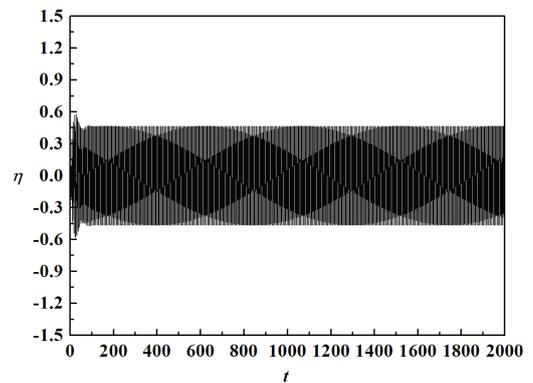


图4 无动力吸振器时主系统的时间历程响应曲线,其中 $\sigma_1 = 0.10$

Fig. 4 Time history response curves of the primary system without dynamical vibration absorber, where  $\sigma_1 = 0.10$

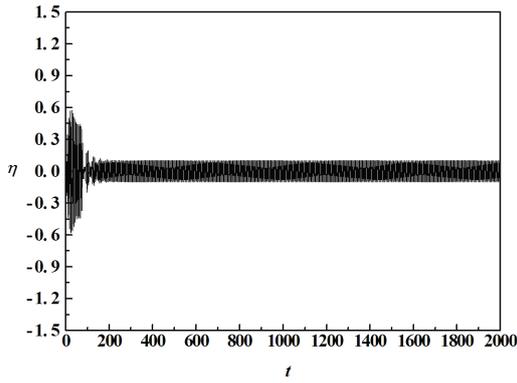


图5 有动力吸振器时主系统的时间历程响应曲线,其中  $\sigma_1 = 0.10, \sigma_2 = 0.10$

Fig. 5 Time history response curves of the primary system with dynamical vibration absorber, where  $\sigma_1 = 0.10, \sigma_2 = 0.10$

由图4可以看出当没有动力吸振器时,在主共振点附近( $\sigma_1 = 0.10$ )主系统的振幅为 0.46.当采用动力吸振器之后,在存在内共振解谐参数( $\sigma_2 = 0.10$ )时主系统的振幅被抑制到 0.10,此时系统处于饱和控制状态.由此可以看出,饱和控制对主系统的振动有比较好的抑制作用.

以  $\{a_1, \phi_1, a_2, \phi_2\}^T$  为状态变量,  $\sigma_1$  为分岔参数,图2和图3分别给出了  $\sigma_2 = -0.30$  和  $\sigma_2 = 0.10$  两个特定数值时系统的幅频响应曲线.为了研究内共振解谐参数  $\sigma_2$  对系统幅频响应曲线的影响.计算出了不同  $\sigma_2$  数值时系统的幅频响应曲线,找出所有的分岔点,然后将其投影到  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面上,从而得到了图6所示的  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面上的分岔曲线图.图中状态变量  $a_1, a_2$  关于分岔参数  $\sigma_1$  在这些分岔曲线上会发生相应的分岔.

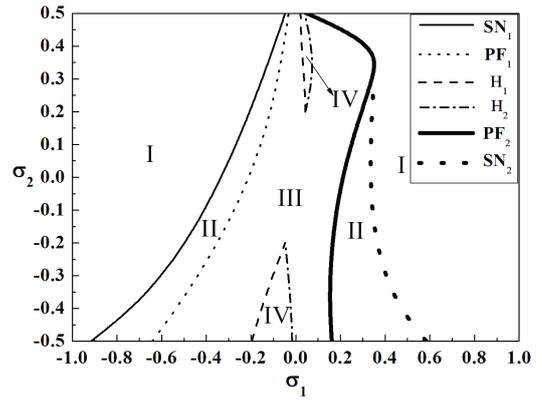


图6  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面上的分岔曲线

Fig. 6 The bifurcation curves on the plane of  $\sigma_1 - \sigma_2$

在图6中根据系统运动状态不同,分岔曲线将  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面分成了4个区域,分别标识为I,II,III和IV.当参数选择在区域I时,系统是稳定的单模态运动.当参数选择在II区域时,系统可能是稳定的单模态运动或处于饱和控制状态.当参数选择在III区域内时,系统处于饱和控制状态.当参数选择在IV区域时,系统会出现复杂运动.

以上的分析表明,当系统处于单模态运动状态时,单摆没有振动,因此没有对主系统的振动起到抑制作用.实际上,自参数动力吸振器就是利用系统处于耦合模态运动来控制主系统的振动.对应本文中的自参数动力吸振器,其饱和控制的有效工作范围是区域III,即  $\sigma_1 \in [PF_1, PF_2]$ ,这与文献[20]定义的控制器的有效减振频带是一致的.

考虑到工程中由于制造和控制等技术原因不可避免的会产生内共振解谐参数,但是内共振解谐参数一般也不会太大,文章主要考虑内共振解谐参数  $\sigma_2 \in [-0.30, 0.30]$  区间变化时对系统饱和控制的影响,因为超出该范围的研究没有实际的物理意义.由图6可以看出,内共振解谐参数  $\sigma_2 \in [-0.30, -0.20]$  或  $\sigma_2 \in [0.20, 0.30]$  区间变化时,饱和控制的减振频带具

有一定的宽度,但在该区域内系统会出现复杂运动,减振频带的分布不合理.因此,当内共振解谐参数在此区间变化时主要应该考虑采用时滞反馈控制来消除 Hopf 分岔,这项工作在另外一篇文章中已经进行了研究.当内共振解谐参数  $\sigma_2 \in [-0.20, 0.20]$  范围内变化时,饱和控制的减振频带分布在主共振点  $\sigma_1 = 0$  附近,而且具有一定的宽度,表明饱和控制的减振频带分布比较合理.但是结合图 2 和图 3 的幅频响应曲线就会发现,内共振解谐参数在此区间变化时饱和控制时主振动系统的振幅相对单模态运动时还是比较大.对于一些精密仪器设备,主系统的振动有必要进一步加以抑制.下面研究采用时滞反馈来控制系统饱和控制时主振动系统的振幅问题.

### 5 时滞反馈控制主振动系统的振动

以图 2 中内共振解谐参数  $\sigma_2 = 0.10$ ,主共振点附近外共振解谐参数  $\sigma_1 = 0.10$  为例,研究采用时滞反馈控制来抑制饱和控制时主系统的振动问题.文中控制参数选择为反馈增益系数  $D$  和时滞  $\tau$ ,其它物理参数选择与原来相同,分别为:  $\Omega_1 = 0.90$ ,  $\Omega_2 = 0.50$ ,  $H = 0.10$ ,  $\mu = 1.00$ ,  $G = 0.10$ ,  $E = 0.10$ ,  $R = 0.10$ .图 7-图 10 给出了不同反馈增益系数下系统的振幅-时滞响应曲线.图中  $HB$  代表 Hopf 分岔点,空心点线代表稳定解,实线代表不稳定的焦点,星号线代表除不稳定焦点以外的其它类型不稳定的解.

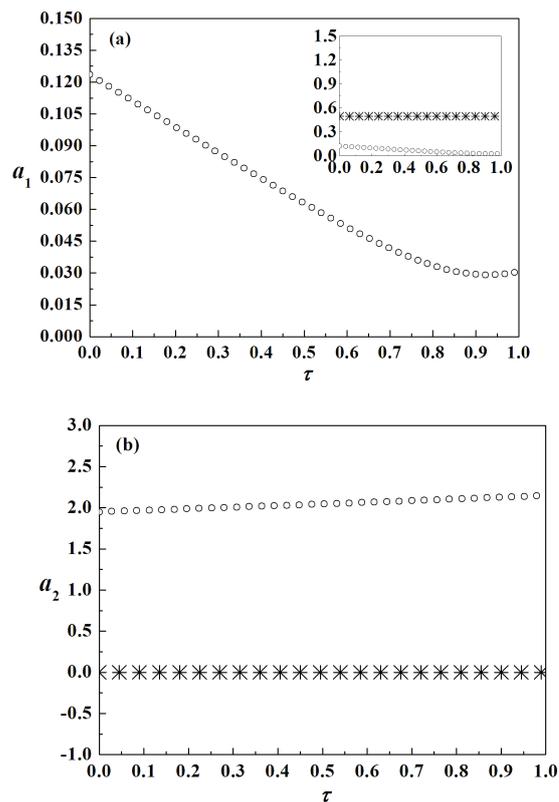
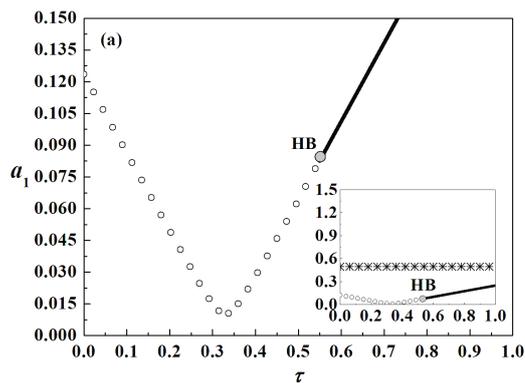


图 7 振幅-时滞响应曲线,其中  $D = 0.10$  (a)主系统, (b)次系统

Fig. 7 Amplitude-delay response curves when  $D = 0.10$ , where (a) primary system, (b) second system



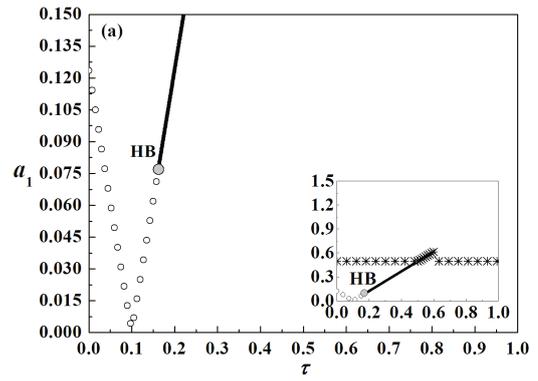
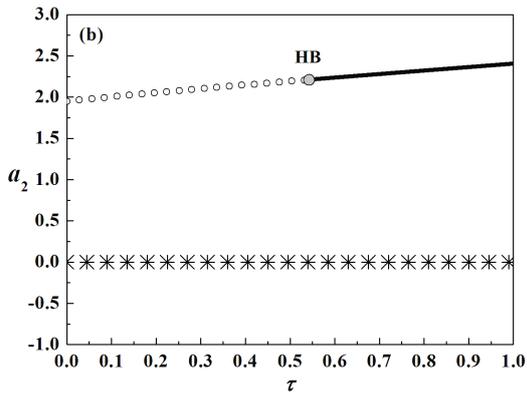


图 8 振幅-时滞响应曲线,其中  $D=0.30$  (a)主系统, (b)次系统

Fig. 8 Amplitude-delay response curves when  $D=0.30$ , where (a) primary system, (b) second system

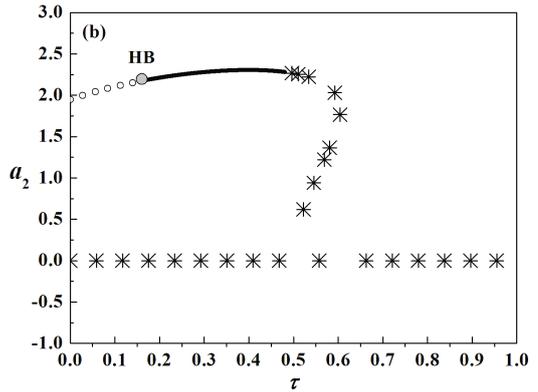
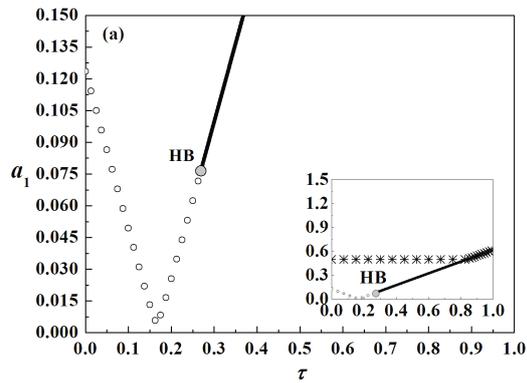


图 10 振幅-时滞响应曲线,其中  $D=1.00$  (a)主系统, (b)次系统

Fig. 10 Amplitude-delay response curves when  $D=1.00$ , where (a) primary system, (b) second system

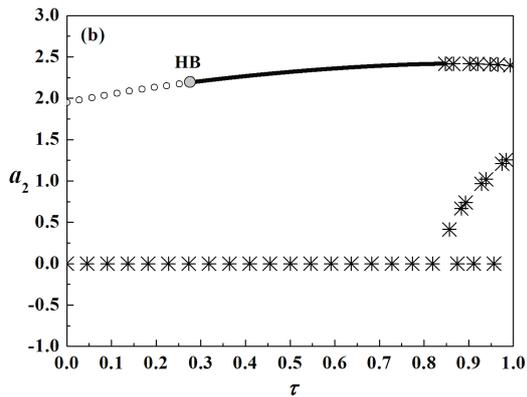


图 9 振幅-时滞响应曲线,其中  $D=0.60$  (a)主系统, (b)次系统

Fig. 9 Amplitude-delay response curves when  $D=0.60$ , where (a) primary system, (b) second system

从图 7 中观察到,当时滞在  $\tau \in (0, 1.00]$  的范围内进行调解时都能够达到减小主系统振动的目的. 并且,在  $\tau = 0.90$  附近主系统的振幅达到最小值,  $\tau = 0.90$  称为  $D = 0.10$  时时滞的“最大减振点”.

观察图 8,随着反馈增益系数的增大,在  $\tau = 0.56$  附近振幅-时滞响应曲线出现了 Hopf 分岔点  $HB$ . 系统的周期振动通过 Hopf 分岔产生复杂的运动状态.  $\tau = 0.33$  是  $D = 0.30$  时时滞轴上的一个最大减振点. 图 9 和图 10 中振幅-时滞响应曲线的拓扑结构与图 8 是一致的. 对应  $D = 0.60$  和  $D = 1.00$  时,时滞的最大减振点分别是  $\tau = 0.16$  和  $\tau = 0.10$ .

综合分析图 7-图 10 可以发现,随着反馈增益系数的不断增大系统的时滞可调节区间变小了,在时滞轴上“最大减振点”的出现提前了.并且,随着反馈增益系数的不断增大,对应到“最大减振点”时系统的减振能力也在不断的提高.当反馈增益系数达到最大值  $D=1.00$  时,对应到时滞轴上的最大减振点  $\tau = 0.10$  时主系统的振动基本能够完全消除.

为了定量的验证本文结果的准确性,进而定性的判断时滞反馈控制减振的正确性,文章以  $D=0.10$  为例,在方程(3)和(4)的基础上进行数值模拟,图 11 给出了系统的振幅-时滞响应曲线的数值模拟图.图中五角星代表数值模拟的结果.其中初始条件为  $\eta(0) = \theta(0) = \eta'(0) = \theta'(0) = 10^{-4}$ ,  $t \in [-\tau, 0)$  时  $\eta(t) = \theta(t) = \eta'(t) = \theta'(t) = 0$ .

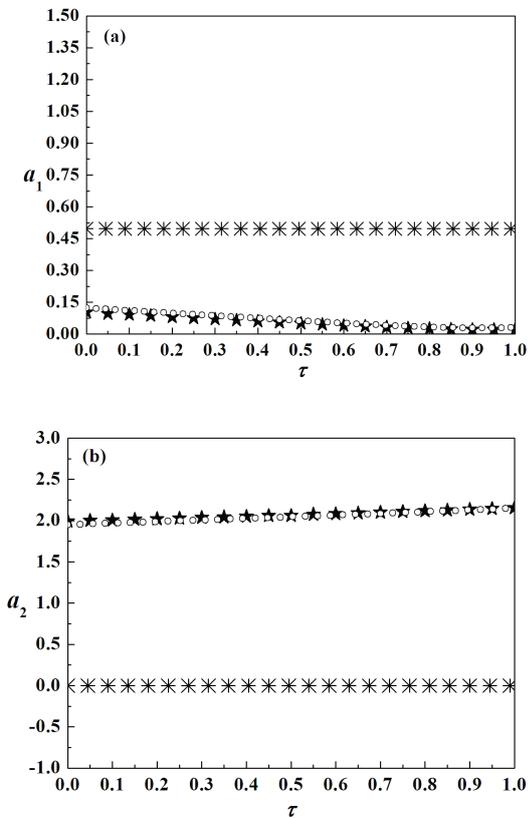
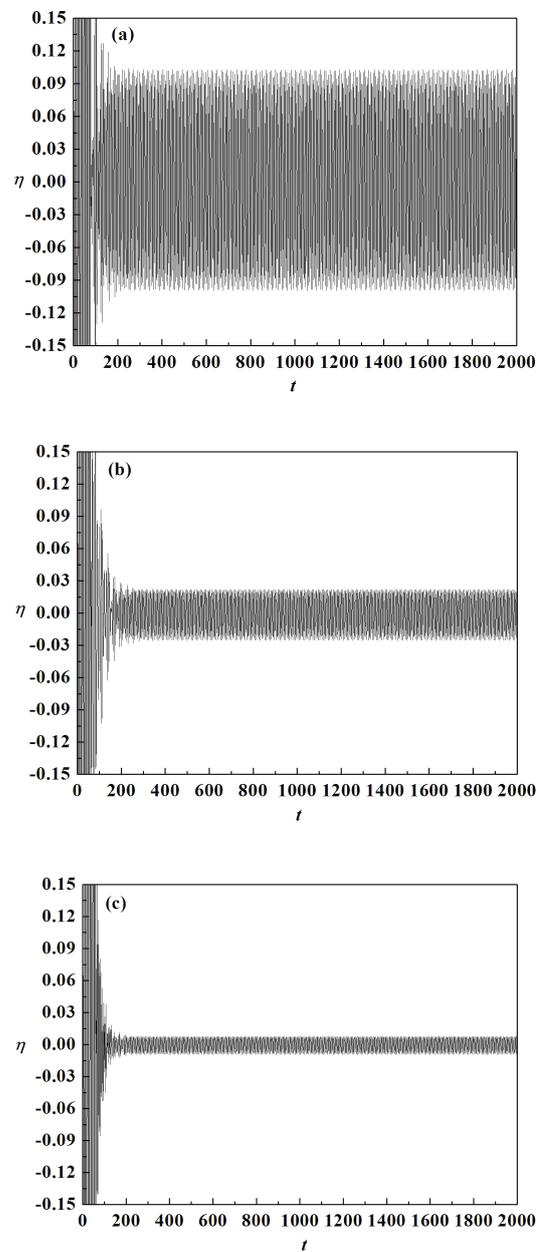


图 11 振幅-时滞响应曲线数值模拟图,其中  $D=0.10$  (a)主系统, (b)次系统

Fig. 11 Numerical simulation of amplitude-delay response curves when  $D=0.10$ , where (a) primary system, (b) second system

从图 11 中可以看出,数值模拟的结果与解析结果吻合的比较好,这也说明在此基础上进行计算得到的结果是可靠的.

图 12 给出了不同反馈增益系数下主系统的时间历程的数值模拟图.



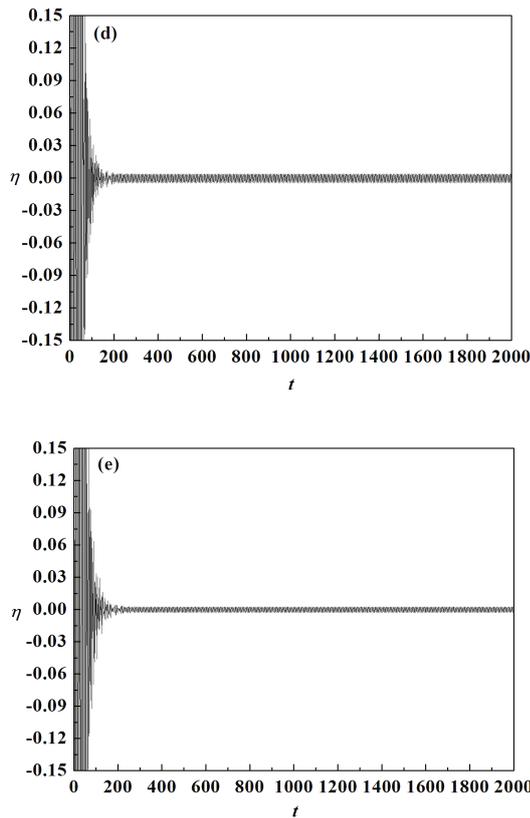


图 12 主系统的时间历程响应曲线 (a)  $D=0, \tau=0$ , (b)  $D=0.10, \tau=0.90$ , (c)  $D=0.30, \tau=0.33$ , (d)  $D=0.60, \tau=0.16$ , (e)  $D=1.00, \tau=0.10$ .

Fig. 12 Time history response curves of the primary system, where (a)  $D=0, \tau=0$ , (b)  $D=0.10, \tau=0.90$ , (c)  $D=0.30, \tau=0.33$ , (d)  $D=0.60, \tau=0.16$ , (e)  $D=1.00, \tau=0.10$ .

图 12(a)是不存在时滞反馈时主系统的时间历程响应曲线,图 12(b)-12(e)分别是反馈增益系数取  $D=0.10, D=0.30, D=0.60$  和  $D=1.00$  时系统处于时滞的“最大减振点”时主系统的时间历程响应曲线.从图中可以看出无时滞控制时主系统振动的振幅是 0.10.当反馈增益系数取  $D=0.10$ ,时滞为最大减振点时,主系统的振幅降低为 0.020;当反馈增益系数取  $D=0.30$ ,时滞为最大减振点时,主系统的振幅降低

为 0.008;当反馈增益系数取  $D=0.60$ ,时滞为最大减振点时,主系统的振幅降低为 0.004;当反馈增益系数取  $D=1.00$ ,时滞为最大减振点时,主系统的振幅降低为 0.002.

## 6 结论

文章研究了采用时滞状态反馈控制自参数动力吸振器减振系统中主系统的振动问题.主要研究了反馈增益系数和时滞两参数对主系统振动的控制效果,得到以下几条结论:

- 1) 可以利用自参数动力系统的饱和性质来控制主系统的振动,取得比较好的减振效果,在某些情况下可以满足振动系统的减振要求.依据  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面上的分岔图,通过控制解谐参数可以发挥自参数动力吸振器的减振作用.
- 2) 有些振动系统对减振要求比较高,当系统处于饱和和控制时,主系统振动的振幅还是比较大,不能满足减振要求.可以采用时滞反馈进一步来控制主系统的振动.
- 3) 对时滞反馈控制减振系统,可以通过调节反馈增益系数和时滞两参数来控制主系统的振动.对某一反馈增益系数,存在时滞的一段区间可以减小主系统的振动.并且在时滞的这段区间里,存在一个“最大减振点”,可以最大程度的减小主系统的振动.
- 4) 对不同的反馈增益系数,“最大减振点”所对应的时滞量以及主系统的振幅也不相同.随着反馈增益系数的不断增大,“最大减振点”所对应的时滞量不断减小,“最大减振点”所对应的主系统的振幅也不断降低,这表明时滞减振系统的减振能力在不断提高.

5) 对本文研究的带时滞反馈控制的自参数动力吸振器减振系统,可以通过调节反馈增益系数和时滞两参数,使得对应“最大减振点”时主系统的振动几乎可以完全消除.

### 参考文献

- 1 Nayfeh A, Mook D, Marshall L. Nonlinear coupling of pitch and roll in ship motion. *Journal of Hydronautics*, 1973, 7(4):145~152
- 2 Haddow A, Barr A, Mook D. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 97(3):451~473
- 3 Haxton R S, Barr A D S. The autoparametric vibration absorber. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, 1972, 94:119~125.
- 4 Banerjee B, Bajaj A K, Davies P. Resonant dynamics of an autoparametric system: a study using higher-order averaging. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1996, 31:21~39
- 5 Bajaj A K, Chang S I, Johnson J M. Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree of freedom system. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5:433~457
- 6 Rifai K E, Haller G, Bajaj A K. Global dynamics of an autoparametric spring-mass-pendulum system. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 49:105~116
- 7 Vyas A, Bajaj A K. Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246(1):115~135
- 8 Nayfeh T, Nayfeh T, Mook D. A theoretical and experimental investigation of a three-degree-of-freedom structure. *Nonlinear Dynamics*, 1994,6:353~374
- 9 Pai P, Wen B, Naser A, Schultz M. Structure vibration control using PZT patches and non-linear phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 1998,215:273~296
- 10 Sayam S, Donald LK, Hanafy M O. Numerical simulations of cantilever beam response with saturation control and full modal coupling. *Computers and Structures*,2003,81:1499~1510
- 11 Li J, Hua H X, Shen R Y. Saturation-based active absorber for a non-linear plant to a principal external excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21:1489~1498
- 12 Song Y, Sato H, Iwata Y, Komatsuzaki T. The response of a dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(4):747~759
- 13 Zhao YY, Xu J. Effects of delayed feedback control on nonlinear vibration absorber system. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 308:212~230
- 14 赵艳影,徐鉴.时滞非线性动力吸振器的减振机理.力学学报,2008,40(1):98~106 (Zhao Yanying, Xu Jian. Mechanism analysis of delayed nonlinear vibration absorber. *Acta Mechanica Sinica*, 2008,40(1):98~106 (in Chinese))
- 15 Olgac N, Holm-Hansen BT. A novel active vibration absorption technique: delayed resonator. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 176(1):93~104
- 16 Olgac N, Jalili N. Modal analysis of flexible beams with delayed resonator vibration absorber: theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 218(2):307~331
- 17 Jalili N, Olgac N. Multiple delayed resonator vibration absorbers for mul-degree-of-freedom mechanical structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 223(4): 567~585
- 18 Filipovic D, Olgac N. Delayed resonator with speed feedback-design and performance analysis. *Mechatronics*, 2002, 12: 393~413
- 19 12 Wirkus S, Rand R. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 30:205~221
- 20 Pai P, Schulz M. A refined nonlinear vibration absorber. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000,42:537~560

## USING THE DELAYED FEEDBACK TO CONTROL THE VIBRATION OF THE AUTO-PARAMETRIC DYNAMICAL SYSTEM<sup>1)</sup>

Zhao Yan-ying<sup>\*,2)</sup>, Xu Jian<sup>+</sup>

*\*( School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Jiangxi 330063, China )*

*+ (School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China )*

**Abstract:** The delayed feedback control is applied to suppress the vibration of the primary system in an auto-parametric dynamical system. The multiple scale method is employed to obtain the range of the saturation control when the system is excited by the harmonic vibration. The delayed feedback control is used to control the vibration of the primary system when the system is in saturation control. The effects of the gain and delay on the vibration suppression of the primary system are analyzed. The results show that the vibration of the primary system can be suppressed at some values of the gain and delay. As the delay varies for a fixed gain, it is seen that the vibration of the primary system can be suppressed at some values of the delay. There is a “maximum vibration suppression point” at these values of delay, where the amplitude of the primary system can be suppressed to a minimum value. As the gain increases, the performance of the vibration suppression is improved at the “maximum vibration suppression point”. It implies that if the suitable delay and gain are achieved the vibration of the primary system almost could be suppressed to zero.

**Key words:** delayed feedback; saturation control; auto-parametric dynamical vibration absorber; vibration suppression

**Received** , Revised

1) The project supported by the NNSF of China under Grant No.( 10802035) and the Key Project of National Nature and Science Foundation of China under Grant No. ( 11032009).

2) E-mail: yanyingzhao@163.com