

# 夹层 FGM 圆柱壳在扭转载荷作用下的弹性稳定性<sup>1)</sup>

李世荣<sup>\*,†,2)</sup> 王爽<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(扬州大学建筑科学与工程学院, 扬州 225127)

<sup>†</sup>(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

**摘要** 采用半解析方法研究了两端简支的功能梯度夹层圆柱壳在端部扭转载荷作用下的弹性稳定性. 考虑圆柱壳的里外层均为均匀材料, 中间层为材料性质沿厚度方向连续变化的功能梯度材料, 并且在界面处的材料性质保持连续. 基于 Flügge 薄壳理论, 建立了位移形式的结构静态屈曲控制方程. 根据边界条件将位移表示为三角级数形式, 获得包含柱壳端部扭转载荷参数的近似线性代数特征值问题, 并通过数值方法求得了表征结构失稳特征的临界载荷. 数值结果表明, 临界载荷随着半径与厚度比的增加而减小, 随着功能梯度中间层的弹性模量的平均值的增加而增加.

**关键词** 功能梯度材料, 夹层圆柱壳, 弹性稳定性, 临界载荷, 扭转屈曲

中图分类号: O343.9 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)06-1172-08

## 引言

柱壳结构(构件)在建筑、船舶、石油化工、核能、航空航天等工程具有广泛的应用背景. 圆柱壳结构的弹性稳定性则是结构稳定性研究的经典内容之一. 薄壁圆柱壳体在端部扭转载荷作用下的稳定性问题是理论研究和工程应用关注的问题之一<sup>[1-3]</sup>. 已有不少文献采用解析和数值方法研究了此类问题. Shen 等<sup>[4-5]</sup>采用奇异摄动法分别研究了扭转载荷作用下各向异性层合圆柱壳的屈曲和后屈曲行为, 并分析了屈曲过程中产生的边界层效应. 文献[6]对在轴压和扭转载荷共同作用下的加筋圆柱壳的后屈曲行为进行了理论分析和破坏实验研究, 给出了具有工程参考价值的实验数据结果. Tafreshi 和 Bailey<sup>[7]</sup>采用有限元方法对有缺陷的组合圆柱壳在多种载荷作用下的稳定性进行了分析, 结果表明, 在组合载荷作用下几何缺陷对复合材料圆柱壳的临界载荷具有明显影响. Diaconu 等<sup>[8]</sup>采用 Flügge 理论<sup>[2]</sup>研究了在轴向和扭转载荷共同作用下层合圆柱壳的静态屈曲响应, 研究发现在周向和扭转载荷联合作用下优化的结构材料层合构型是非对称的. 为了分析地震作用下薄壁结构的动态稳定性, Michel 等<sup>[9]</sup>分别采用实验和有限

元方法, 研究了静态和动态剪切载荷作用下圆柱壳的弹性稳定性问题. 研究表明, 当载荷达到临界载荷值的 70% 并且激振力频率接近第一固有频率时, 屈曲模态和振动模态发生耦合. Athiannan 和 Palaninathan<sup>[10]</sup>分别采用实验方法和 ABAQUS 有限元程序研究了横向剪切载荷作用下圆柱壳的屈曲特性, 比较后发现数值计算所得的屈曲载荷要高于实验结果. Sofyev<sup>[11]</sup>对正交各向异性层合圆柱壳在动态扭转载荷作用下的扭转屈曲进行了分析, 采用 Ritz 变分方法得到了临界载荷参数的解析表达式. Renjie 和 Lu<sup>[12]</sup>对厚壁圆柱壳在扭转载荷作用下的弹塑性屈曲进行了深入的研究, 并分析了面内边界条件对扭转屈曲载荷的影响. 然而, 上述研究工作中, 圆柱壳的材料构成并没有涉及材料性质非均匀变化的功能梯度材料. Li 和 Batra<sup>[13]</sup>基于 Flügge 圆柱壳理论<sup>[2]</sup>研究了具有功能梯度中间层的夹层圆柱壳在轴向压力作用下的弹性稳定性问题, 给出了不同材料性质梯度变化参数和几何参数下的临界载荷数值解.

本文在文献[13]的基础上, 采用半解析方法研究了两端简支功能梯度夹层圆柱壳在端部扭转载荷作用下的弹性稳定性. 考虑圆柱壳的里外层都是均匀材料, 而中间层为材料性质沿厚度方向连续变

2009-07-10 收到第 1 稿, 2009-11-06 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10872083, 10602021)和教育部博士点基金(200807310002)资助项目.

2) E-mail: srli@yzu.edu.cn

化的功能梯度材料, 并且在界面处的材料性质保持连续. 首先, 基于 Flügge 薄壳理论, 建立结构位移形式的静态屈曲控制方程. 根据端部边界条件将位移表示为三角级数形式, 并将三角级数解带入平衡方程将问题转化为线性代数方程组特征值问题. 最后, 通过数值方法获得表征结构失稳特征临界载荷, 分析结构几何参数、材料参数对屈曲载荷的影响.

## 1 数学模型

### 1.1 几何方程

考虑一个轴向长度为  $l$ , 中曲面半径为  $R$ , 厚度为  $h$  的三层圆柱壳. 假设内外两层是由均匀的各向同性材料组成, 中间层是由各向同性的功能梯度材料构成, 并设其弹性模量在厚度方向连续分布<sup>[13]</sup>, 内层和外层的厚度均为  $t_1$ , 中间层的厚度为  $t_2$ , 于是有  $h = 2t_1 + t_2$ .

采用柱坐标  $(x, \theta, z)$ , 其中  $x, \theta$  和  $z$  分别表示沿母线方向、周向和厚度方向的坐标, 并且  $x, \theta$  置于几何中面内. 壳的两端受扭转载荷作用, 该扭矩由端部横截面内均匀分布的周向剪力  $T$  (周边单位长度上的力) 对  $x$  轴的力矩合成. 根据经典的圆壳柱理论<sup>[1-3]</sup> 得到下列位移分布

$$U = u - \frac{zw'}{R}, \quad V = \frac{(R+z)v}{R} - \frac{zw'}{R}, \quad W = w \quad (1)$$

其中  $u(x, \theta), v(x, \theta), w(x, \theta)$  分别表示中曲面上一点沿母线方向、周向和厚度方向的位移,  $U, V, W$  为横截面任意一点  $(x, \theta, z)$  在上述三个方向的位移, 微分符号的定义分别为  $(\quad)' = R\partial(\quad)/\partial x, (\quad)\dot{\quad} = \partial(\quad)/\partial \theta$ .

根据 Flügge<sup>[2]</sup> 理论得到应变分量

$$\varepsilon_x = \frac{U'}{R}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{V' + W}{R+z}, \quad \gamma_{x\theta} = \frac{V'}{R} + \frac{U\dot{\quad}}{R+z} \quad (2)$$

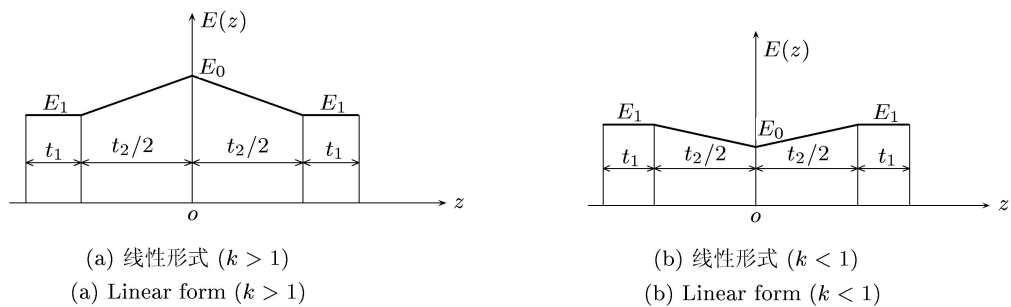


图 1 弹性模量沿厚度方向坐标的变化形式

Fig.1 Profiles of the distribution of the elastic modulus  $E$  in the thickness direction

将式 (1) 代入式 (2) 得到用中面位移表示的应变分量

$$\varepsilon_x = \frac{u'}{R} - \frac{z}{R^2} w'' \quad (3a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{v'}{R} - \frac{z}{R} \frac{w\dot{\quad}}{R+z} + \frac{w}{R+z} \quad (3b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{u'}{R+z} + \frac{R+z}{R^2} v' - \left( \frac{z}{R} + \frac{z}{R+z} \right) \frac{w'}{R} \quad (3c)$$

### 1.2 本构方程

考虑柱壳的材料在厚度方向非均匀, 但是为各向同性的, 其本构关系为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x),$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\theta} \quad (4)$$

其中  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比. 假设圆柱壳内外两层都是同一种均匀材料, 弹性模量为  $E_1$ 、泊松比为  $\nu_1$ . 中间层为功能梯度材料, 弹性模量是坐标  $z$  的函数. 由于材料泊松比一般变化不大, 这里假设中间层的泊松比为常量.

考虑中间层的弹性模量为下列两种变化形式 (见图 1):

(1) 线性变化形式

$$E_2(z) = E_1[k + 2(1-k)|z|/t_2]$$

$$(-t_2/2 < z < t_2/2) \quad (5)$$

(2) 抛物线变化形式

$$E_2(z) = E_1[k + 4(1-k)(z/t_2)^2]$$

$$(-t_2/2 < z < t_2/2) \quad (6)$$

其中  $k = E_0/E_1, E_0 = E_2(0)$ .  $k > 1$  表示中间层的刚度单调增加;  $k < 1$  表示单调减小.

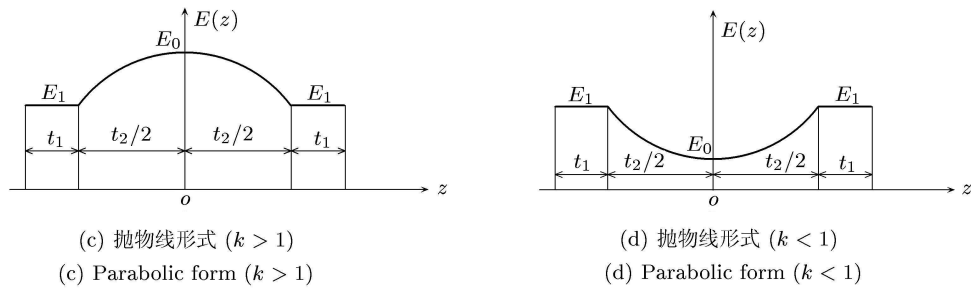


图 1 弹性模量沿厚度方向坐标的变化形式 (续)

Fig.1 Profiles of the distribution of the elastic modulus  $E$  in the thickness direction (continued)

1.3 平衡方程和边界条件

圆柱壳中曲面上一点的内力与应力的关系为

$$(N_x, N_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \tau_{x\theta}) (1 + z/R) dz \quad (7a)$$

$$(M_x, M_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z\sigma_x, z\tau_{x\theta}) (1 + z/R) dz \quad (7b)$$

$$(N_\theta, N_{\theta x}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\theta, \tau_{\theta x}) dz \quad (7c)$$

$$(M_\theta, M_{\theta x}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z\sigma_\theta, z\tau_{\theta x}) dz \quad (7d)$$

将式 (3) 和式 (4) 代入式 (7) 得到位移与内力的关系

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_m \\ d_t \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{N} = \{N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}\}$  为薄膜力向量,  $\mathbf{M} = \{M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}\}$  为力矩向量,  $\mathbf{d}_m = \{u', v', w', v'\}$  为面内位移向量,  $\mathbf{d}_t = \{w'', w''', w', w\}$  为出面位移向量.  $\mathbf{A}$  为拉伸刚度矩阵,  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别为拉-弯和弯-拉耦合刚度矩阵,  $\mathbf{D}$  为弯曲刚度矩阵. 这些刚度矩阵的元素与圆柱壳的截面几何尺寸和材料物理参数有关. 在弹性模量由式 (5) 和式 (6) 给出后, 可以积分求得解析表达式 [13].

根据 Flügge<sup>[2]</sup> 理论得到在端部扭转载荷  $T$  作用下圆柱壳的平衡方程

$$RN'_x + RN_{\theta x} - 2Tu' = 0 \quad (9)$$

$$RN_\theta + RN'_{x\theta} + M_\theta + M'_{x\theta} - 2T(v' + w') = 0 \quad (10)$$

$$M_\theta + M'_{x\theta} + M'_{\theta x} + M'_x - RN_\theta + 2T(v' - w') = 0 \quad (11)$$

将式 (8) 代入式 (9)~(11) 可得用位移分量表示的控制方程

$$\begin{aligned} A_{11}u'' + A_{43}u'' + A_{12}^*v' + B_{11}w''' + \\ B_{12}^*w'' + B_{14}w' - 2Tu' / R = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_{34}^*v'' + A_{22}^*v'' + A_{21}^*u' + B_{22}^*w'' + \\ B_{21}^*w'' + B_{24}^*w' - 2T(v' + w') / R = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D_{11}w'' + D_{12}^*w'' + D_{22}w'' + D_{14}^*w'' + \\ D_{24}^*w' - RB_{24}w + C_{11}u'' + C_{21}^*u' + C_{12}^*v'' + \\ C_{22}v'' - RA_{21}u' - RA_{22}v' + 2T(v' - w') = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

方程中带“\*”号的系数表达式见文献 [13].

考虑两端简支边界条件

$$w = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0, \quad x = 0, l \quad (15)$$

利用式 (8), 可将式 (15) 中的力的边界条件转化为位移形式

$$A_{11}u' + A_{12}v' + B_{11}w'' + B_{12}w'' = 0, \quad x = 0, l \quad (16)$$

$$C_{11}u' + C_{12}v' + D_{11}w'' + D_{12}w'' = 0, \quad x = 0, l \quad (17)$$

2 问题的位移解

根据边界条件, 将位移表示为傅立叶级数 [2]

$$\begin{aligned} u = \cos m\theta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_{1n} \cos \frac{n\pi x}{l} + \\ \sin m\theta \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} u_{2n} \cos \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} v = \sin m\theta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} v_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l} - \\ \cos m\theta \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} v_{2n} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (18b)$$

$$w = \cos m\theta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} w_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \sin m\theta \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} w_{2n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (18c)$$

其中  $u_{1n}, u_{2n}, v_{1n}, v_{2n}, w_{1n}$  和  $w_{2n}$  为待定系数. 将式 (18) 代入平衡方程 (12)~(14), 并分别令每个方程中关于  $\sin m\theta$  和  $\cos m\theta$  的系数等于零, 可得 6 个关于上述待定系数的代数方程组. 但是其中还包含函数  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  和  $\cos \frac{n\pi x}{l}$  的因子. 然后, 采用傅立叶展开式

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{4}{\pi} \sum_j \frac{j}{j^2 - n^2} \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (19a)$$

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4n}{\pi} \sum_j \frac{1}{n^2 - j^2} \cos \frac{j\pi x}{l}, n \text{ 为偶数} \quad (19b)$$

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{2}{n\pi} + \frac{4n}{\pi} \sum_j \frac{1}{n^2 - j^2} \cos \frac{j\pi x}{l}, n \text{ 为奇数} \quad (19c)$$

并将式 (19) 代入上述的 6 个代数方程组, 可使每个方程要么只含  $\sin \frac{j\pi x}{l}$  项, 要么只含  $\cos \frac{j\pi x}{l}$  项, 然后再分别令方程中三角函数项的系数为零, 即可得到关于方程 (18) 中的待定系数的齐次代数方程组. 利用方程组的特点, 可以将系数  $u_{1n}, u_{2n}, v_{1n}, v_{2n}$  表示为关于  $w_{1n}$  和  $w_{2n}$  的形式. 从式 (18) 可知, 当  $n$  是偶数时  $u_{1n} = v_{1n} = w_{1n} = 0$ , 而当  $n$  为奇数时  $u_{2n} = v_{2n} = w_{2n} = 0$ , 因此可将各系数统一记为  $u_n, v_n, w_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ .

引入无量纲载荷  $q = T/C$ , 其中  $C = E_1 h / (1 - \nu_1^2)$  为刚度参数, 并进一步令  $X = 8Rq/l$ , 最终得到  $n$  个关于  $w_j (j = 1, 2, \dots, n)$  的线性代数方程组

$$X^{-1} G_{0n} w_n + (-1)^n \sum_j H_{nj} w_j = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

其中系数  $G_{0n}, H_{nj}$  与圆柱壳的材料性质、几何性质以及波数  $m$  和  $n$  有关, 具体表达式见附录 A. 考虑里外两层的厚度相同, 即  $t_1 = t_3$ , 得到相关系数见附录 B.

式 (20) 是一个关于未知量  $w_n$  的包含特征参数  $X$  的齐次线性代数方程组, 由系数行列式等于零即可求得载荷特征值. 这里采用幂法数值求解该代数特征值问题获得最小特征值, 从而获得圆柱壳扭转屈曲临界载荷数值解.

### 3 数值结果与讨论

用幂法求解方程组 (20) 的最小特征值  $X$ , 并可进一步求得无量纲临界载荷  $q$ . 显然, 临界载荷值不但与壳的几何参数、材料参数有关, 而且与壳的周向屈曲半波数  $m$  以及级数的项数  $n$  有关. 计算表明, 在取  $n = 4$  时已能给出比较满意的结果 [2], 为了得到更精确的结果, 在实际计算中取  $n = 16$ .

为了检验本文理论和数值方法的可靠性, 首先考虑圆柱壳由均匀材料构成, 即  $k = 1$  或  $\beta = t_2/h = 0$  的特殊情况. 文献 [1-3] 中给出了无量纲临界屈曲剪切应力的解析解

$$q_{cr} = \frac{0.272}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \delta^{-3/2} \quad (21)$$

这一结果是在  $l/R$  为无穷大,  $m = 2$  的条件下获得的, 它是一个与几何参数  $\delta = h/R$  有关的值.

本文没有采用圆柱壳为无限长的假设. 因此, 临界载荷与比值  $l/R$  有关. 在表 1 中列出了根据方程组 (20) 计算所得的无量纲临界载荷  $q_{cr}$  与参数  $m, \delta$  和  $l/R$  的依赖关系, 并与式 (21) 的结果进行了比较. 由此可见, 在每行数据中, 都可以找到一个与方程 (21) 所得结果非常接近的值, 而且这一值在  $l/R > 65$  后, 临界载荷对应的屈曲模态的周向波数  $m \equiv 2$ .

表 1 不同  $\delta$  和  $l/R$  值时均匀材料圆柱壳的临界载荷  $q_{cr} \times 10^4 (\nu = 0.3)$

Table 1 Critical buckling load of homogenous cylindrical shell,  $q_{cr} \times 10^4$ , for different values of  $\delta$  and  $l/R (\nu = 0.3)$

$\delta$	$l/R$							Eq.(21)
	25	45	65	85	105	125	145	
200	1.748 5(3)	1.291 3(2)	1.030 3(2)	0.951 2(2)	0.906 1(2)	0.880 4(2)	0.864 4(2)	1.032 2
400	0.768 2(3)	0.563 7(3)	0.450 2(2)	0.372 5(2)	0.350 6(2)	0.332 8(2)	0.321 7(2)	0.365 0
600	0.450 5(4)	0.331 1(3)	0.293 0(2)	0.234 0(2)	0.207 4(2)	0.192 8(2)	0.183 8(2)	0.198 6
800	0.313 8(4)	0.231 1(3)	0.197 9(3)	0.169 6(2)	0.145 6(2)	0.132 8(2)	0.125 0(2)	0.129 0
1000	0.240 0(4)	0.177 0(3)	0.147 1(3)	0.134 5(2)	0.112 2(2)	0.100 5(2)	0.092 5(2)	0.092 3

注: 括号中的整数为周向屈曲波数, 后面的表中表示相同

Note: Numbers in brackets are the circumferential wave numbers of the buckling modes; the same notation is used in the following tables.

考虑中间层材料为功能梯度材料的圆柱壳, 给定  $\delta = R/h = 500$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , 中间层材料的弹性模量为线性变化时, 表 2 中列出了无量纲临界载荷随参数  $l/R$  和  $k$  变化的规律. 由此可见, 无量纲临界载荷随  $k$  值的增大而增大, 随  $l/R$  值的增加而减小, 周向屈曲波数也随  $l/R$  的值的增大而减小.

给定参数  $\beta = 0.6$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $l/R = 50$ , 图 2 为不同弹性模量参数  $k$  对应的无量纲临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  与厚径比  $\delta$  的关系曲线. 结果表明, 对给定的  $\delta$  值, 无量纲临界载荷随  $k$  值的增大而增大. 对于同一个  $k$  值, 当  $k > 1$  时, 中间层的功能材料性质为线性分布的临界载荷要比抛物线分布的大,

这是因为线性分布的情况下中间层对弯曲刚度的贡献要比抛物线分布时大, 而在  $k < 1$  的情况下则相反 (见图 1). 在  $\beta = 1$  ( $h = t_2$ ) 时, 圆柱壳完全由功能梯度材料构成. 图 3 中给出了两种材料性质分布的功能梯度圆柱壳的临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  随  $\delta$  的变化曲线. 分析变化规律, 可得与图 2 中相同的结论.

在给定  $\beta = 0.8$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $l/R = 20$  时, 选择中间层材料的弹性模量为线性变化, 表 3 中列出了对应于不同的  $\delta$  和  $k$  值的无量纲临界载荷. 可见, 周向屈曲波数  $m$  随径厚比  $\delta$  的增加而增大. 显然对于确定的  $\delta$  值, 周向屈曲波数  $m$  几乎不依赖于  $k$  值的变化而变化.

表 2 不同  $k$  和  $l/R$  值时圆柱壳的临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )  
Table 2 Critical buckling load,  $q_{cr} \times 10^4$ , for different values of  $k$  and  $l/R$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

$k$	$l/R$					
	10	20	30	40	50	60
0.2	0.6528(5)	0.4528(4)	0.3691(3)	0.3178(3)	0.2944(3)	0.2646(2)
0.4	0.7175(6)	0.4981(4)	0.4077(3)	0.3490(3)	0.3224(3)	0.2940(2)
0.6	0.7800(6)	0.5427(4)	0.4458(3)	0.3798(3)	0.3499(3)	0.3231(2)
0.8	0.8418(6)	0.5868(4)	0.4836(3)	0.4103(3)	0.3711(3)	0.3520(2)
1.0	0.9031(6)	0.6305(4)	0.5211(3)	0.4404(3)	0.4041(3)	0.3806(2)
1.2	0.9640(6)	0.6740(4)	0.5583(3)	0.4704(3)	0.4309(3)	0.4091(2)
1.4	1.0246(6)	0.7172(4)	0.5954(3)	0.5002(3)	0.4575(3)	0.4375(2)
1.6	1.0848(6)	0.7602(4)	0.6323(3)	0.5299(3)	0.4840(3)	0.4658(2)
1.8	1.1449(6)	0.8031(4)	0.6691(3)	0.5595(3)	0.5104(3)	0.4940(2)
2.0	1.2048(6)	0.8459(4)	0.7058(3)	0.5890(3)	0.5367(3)	0.5222(2)

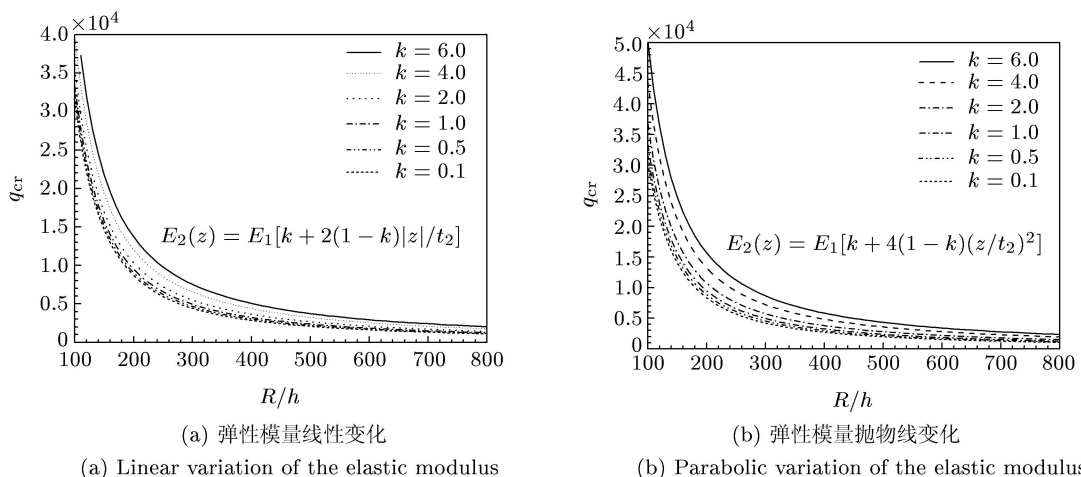


图 2 不同  $k$  值时无量纲临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  随  $\delta$  的变化曲线 ( $l/R = 50$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )  
Fig.2 Curves of critical buckling load,  $q_{cr} \times 10^4$ , versus  $\delta$  for different values of  $k$  ( $l/R = 50$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

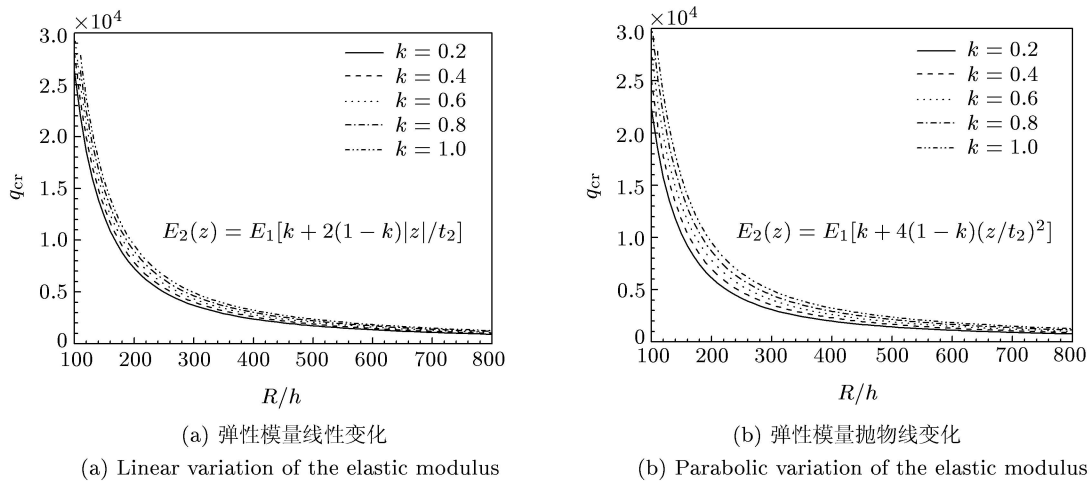


图 3 功能梯度材料圆柱壳的临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  随  $\delta$  变化的曲线 ( $l/R = 50, \beta = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )  
 Fig.3 Curves of critical buckling load of the FGMs cylindrical shell,  $q_{cr} \times 10^4$ , versus  $\delta$ . ( $l/R = 50, \beta = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

表 3 不同  $k$  和  $\delta$  值的临界载荷  $q_{cr} \times 10^4$  ( $l/R = 20, \beta = 0.8, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )  
 Table 3 Critical buckling load  $q_{cr} \times 10^4$  for different values of  $k$  and  $\delta$  ( $l/R = 20, \beta = 0.8, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

$\delta$	$k$					
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
30	15.638(2)	16.143(2)	17.137(2)	18.113(2)	19.074(2)	20.023(2)
50	8.559 7(2)	8.866 6(2)	9.477 2(2)	10.068(2)	10.657(2)	11.239(2)
100	3.746 5(3)	3.858 9(3)	4.079 5(3)	4.295 6(3)	4.507 9(3)	4.717 1(3)
200	1.537 0(3)	1.588 0(3)	1.688 4(3)	1.787 1(3)	1.884 3(3)	1.980 3(3)
300	0.961 9(3)	0.996 6(3)	1.055 9(4)	1.111 5(4)	1.166 2(4)	1.220 0(4)
400	0.661 2(4)	0.681 5(4)	0.721 5(4)	0.760 7(4)	0.799 1(4)	0.837 1(4)
500	0.495 4(4)	0.511 1(4)	0.542 0(4)	0.587 3(4)	0.602 2(4)	0.631 6(4)
600	0.394 2(4)	0.407 0(4)	0.432 4(4)	0.457 3(4)	0.481 7(4)	0.505 9(4)
700	0.326 9(4)	0.337 9(4)	0.359 5(4)	0.380 7(4)	0.401 6(4)	0.422 2(4)
800	0.279 6(4)	0.289 1(4)	0.308 0(4)	0.326 4(5)	0.342 4(5)	0.358 3(5)
900	0.243 0(5)	0.250 4(5)	0.265 0(5)	0.279 2(5)	0.293 2(5)	0.307 0(5)
1 000	0.211 9(5)	0.218 4(5)	0.231 1(5)	0.243 6(5)	0.255 9(5)	0.267 9(5)

### 4 结 论

基于 Flügge 理论, 采用半解析方法研究了中间层为功能梯度材料的夹层圆柱壳在两端简支, 并受到端部扭转载荷作用下的弹性稳定性. 圆柱壳的内外两层由均匀的各向同性材料组成, 中间层由各向同性功能梯度材料构成, 并分别考虑且其材料弹性模量在厚度方向上呈线性型和抛物型分布的特殊情况. 根据边界条件, 将位移表示为傅立叶级数的形式, 代入 Flügge 理论意义下的平衡方程, 得到了圆柱壳在两端扭转载荷作用下的静态屈曲问题的特征方程. 采用幂法求解所得代数特征值问题, 得到了不同材料分布规律下该圆柱壳的临界载荷数值解. 讨论了长径比 ( $l/R$ )、径厚比 ( $\delta$ ) 以及材料刚度参数 ( $k$ ) 对临界载荷的影响. 结果表明: 临

界载荷随着长径比和径厚比的增加而减小, 随着材料刚度参数的增加而增加; 屈曲模态的周向波数随着径厚比的增加而增加, 随长径比的增加而减小.

### 参 考 文 献

- 1 Novozhilov VV. Thin Shell Theory. Groningen: P Noordhoff Ltd, 1964
- 2 Flügge W. Stresses in Shells, 2nd edn. New York: Springer-Verlag, 1973
- 3 Bush BO, Almroth BO. Buckling of Bars, Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1975
- 4 Shen HS. Boundary layer theory for the buckling and post-buckling of an anisotropic laminated cylindrical shell, Part III: prediction under torsion. *Composite Structures*, 2008, 82(3): 371-381
- 5 Shen HS, Xiang Y. Buckling and postbuckling of anisotropic laminated cylindrical shells under combined axial compression and torsion. *Composite Structures*, 2008, 84(4): 375-386
- 6 Chiara Bisagni, Potito Cordisco. Post-buckling and collapse

- experiments of stiffened composite cylindrical shells subjected to axial loading and torque. *Composite Structures*, 2006, 73(2): 138–149
- 7 Tafreshi Azam, Bailey Colin G. Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading. *Composite Structures*, 2007, 80(1): 49–64
- 8 Diaconu Cezar G, Sato Masaki, Sekine Hideki. Buckling characteristics and layup optimization of long laminated composite cylindrical shells subjected to combined loads using lamination parameters. *Composite Structures*, 2002, 58(4): 423–433
- 9 Michel G, Limam A, Jullien J F. Buckling of cylindrical shells under static and dynamic shear loading. *Engineering Structures*, 2000, 22(5): 535–543
- 10 Athiannan K, Palaninathan R. Buckling of cylindrical shells under transverse shear. *Thin-Walled Structures*, 2004, 42(9): 1307–1328
- 11 Sofiyev AH. Torsional buckling of cross-ply laminated orthotropic composite cylindrical shells subject to dynamic loading. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, 2003, 22(6): 943–951
- 12 Mao Renjie, Lu G. A study of elastic-plastic buckling of cylindrical shells under torsion. *Thin-Walled Structures*, 2002, 40(12): 1051–1071
- 13 Li SR, Batra RC. Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44(10): 1039–1047

(责任编辑: 周冬冬)

## 附录 A

$$G_{0n} = \begin{vmatrix} f_{11,n} & f_{12,n} & f_{13,n} \\ f_{21,n} & f_{22,n} & f_{23,n} \\ f_{31,n} & f_{32,n} & f_{33,n} \end{vmatrix}, G_{2n} = \begin{vmatrix} f_{11,n} & f_{13,n} \\ f_{21,n} & f_{23,n} \end{vmatrix}, G_{3n} = \begin{vmatrix} f_{11,n} & f_{12,n} \\ f_{12,n} & f_{22,n} \end{vmatrix}$$

$$G_{1j} = \begin{vmatrix} f_{12,j} & f_{13,j} \\ f_{22,j} & f_{23,j} \end{vmatrix}, G_{2j} = \begin{vmatrix} f_{11,j} & f_{13,j} \\ f_{21,j} & f_{23,j} \end{vmatrix}, G_{3j} = \begin{vmatrix} f_{11,j} & f_{12,j} \\ f_{12,j} & f_{22,j} \end{vmatrix}$$

$$H_{nj} = G_{1n}m \frac{j^2}{n^2 - j^2} \frac{G_{1j}}{G_{3j}} + G_{2n}m \frac{nj}{n^2 - j^2} \frac{G_{2j}}{G_{3j}} + G_{3n}m \frac{nj}{n^2 - j^2} - G_{2n} \frac{nj}{n^2 - j^2} - G_{3n} \frac{nj}{n^2 - j^2} \frac{G_{2j}}{G_{3j}}$$

## 附录 B

$$f_{11,n} = -\lambda_n^2 \xi_0^* - m^2 \delta \mu_2^*, \quad f_{12,n} = m \lambda_n (\eta_0^* + \zeta_0^*)$$

$$f_{13,n} = \frac{\lambda_n^3}{12\delta^2} \xi_2^* + m^2 \lambda_n \zeta_0^* - m^2 \delta \lambda_n \mu_2^* + \lambda_n \eta_0^*, \quad f_{22,n} = -\lambda_n^2 \zeta_0^* - m^2 \xi_0^* - \frac{1}{4\delta^2} \lambda_n^2 \zeta_2^*$$

$$f_{23,n} = -\frac{m \lambda_n^2}{12\delta^2} (\eta_2^* + 3\zeta_2^*) - m \xi_0^*$$

$$f_{33,n} = -\frac{\lambda_n^4}{12\delta^2} \xi_2^* - \frac{m^2 \lambda_n^2}{12\delta^2} (2\eta_2^* + 3\zeta_2^*) - m^2 \lambda_n^2 \zeta_0^* - m^2 \lambda_n^2 \delta \mu_2^* + m^2 (m^2 - 2) (\xi_0^* - \delta \mu_1^*) - \delta \mu_1^*$$

其中  $\delta = R/h$ ,  $\lambda_n = n\pi R/l$ .

## ELASTIC STABILITY OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH FGMS LAYERS UNDER END TORSION FORCE<sup>1)</sup>

Li Shirong<sup>\*,†,2)</sup> Wang Shuang<sup>†</sup>

(*School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China*)

(*School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)

**Abstract** By using semi-analytical method, elastic stability of a simply supported FGM sandwich circular cylindrical shell under torsion loading was studied. The inner and outer layers of the shell are comprised of the same homogeneous and isotropic material, and the middle layer is made of an isotropic functionally graded material whose properties varies continuously in the thickness direction from the inner layer to the outer layer, and keeps continuation in the material properties of the interface. Firstly, based on the Flügge thin shell theory, the governing equations for static buckling of the structure in terms of displacements were formulated. Secondly, by introducing the displacements in terms of trigonometric functions that identically satisfy the boundary conditions, an eigenvalue problem for linear algebraic equations including the torsion force parameter is obtained. Finally, critical buckling load characterizing the features of instability of the structure were obtained by numerical method. The numerical results show that the buckling load decreases with an increases in the radius to thickness ratio, and increases with an increase in the average value of Young's modulus of the FGM middle layer.

**Key words** functionally graded materials, sandwich circular cylindrical shells, elastic stability, critical buckling load, torsion buckling

---

Received 10 July 2009, revised 6 November 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872083, 10602021) and the Doctorate Project of the State Education Ministry(200807310002).

2) E-mail: srli@yzu.edu.cn