

文章编号: 1000-4750(2014)02-0203-07

基于截面组合法和截面弹簧刚度考虑跨内塑性铰的钢框架高等分析

胡淑军¹, 王 湛^{1,2}, 潘建荣^{1,2}

(1. 华南理工大学土木工程系, 广东, 广州 510640; 2. 华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室, 广东, 广州 510640)

摘 要: 采用截面组合法推导工字形或 H 形截面的屈服方程, 并在端部和跨内分别假想有一个零长度的弹簧考虑截面的刚度, 提出了有分布荷载作用的杆件仅使用一个单元就能准确模拟跨内塑性铰的钢框架高等分析方法。通过对引入的非节点自由度进行凝聚, 使得所提出的单元与常规单元具有相同的节点自由度。该方法还利用稳定函数考虑单元的剪切变形和几何非线性、初始屈服方程中考虑残余应力、折减弹性模量法考虑初始缺陷。算例结果表明, 采用所提出的方法可得到高效率和高精度的结果。

关键词: 钢框架; 跨内塑性铰; 截面组合法; 截面弹簧刚度; 分布荷载

中图分类号: TU973 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11.0853

ADVANCED ANALYSIS OF STEEL FRAMES USING ELEMENT WITH INTERNAL PLASTIC HINGE BASED ON SECTION ASSEMBLAGE CONCEPT AND SECTION SPRING STIFFNESS

HU Shu-jun¹, WANG Zhan^{1,2}, PAN Jian-rong^{1,2}

(1. Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China;

2. State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: The yield function of an I or H section is derived by using the section assemblage concept, and an advanced analysis method of steel frames is proposed by assuming a spring with zero-length at the end and inner part of an element to consider the cross-sectional stiffness. It is demonstrated that the plastic hinge at the inner part of the element can be well predicted, based on the proposed method, by only using one element for the members subjected to distributed loads. The proposed element has the same nodal degree of freedom as a conventional element by condensing the non-nodal degree of freedom introduced in the derivation. In the proposed method, the stability function is used to consider the shear deformation and geometric nonlinearity, and the residual stress is considered in the initial yield function. Also, the reduced tangent modulus method is used to consider the influence of initial imperfections. Numerical analysis shows that the proposed method has a high accuracy and efficiency.

Key words: steel frame; internal plastic hinge; section assemblage concept; section spring stiffness; distributed load

在钢框架的高等分析中, 通常会假定一个方程来控制截面的屈服。目前常用的屈服方程有

AISC-LRFD^[1]、Orbison^[2]等所提出的。这些方程大多是基于一些假定并根据半理论半经验的方法推

收稿日期: 2012-11-12; 修改日期: 2012-12-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(50978104, 51008129, 51178192); 亚热带建筑科学国家重点实验室基金项目(2012ZA05); 华南理工大学中央高校基本科研业务费项目(2012ZZ0099)

通讯作者: 王 湛(1958—), 男, 吉林人, 教授, 博士, 博导, 主要从事钢结构、组合结构和结构优化等方面的研究(E-mail: wangzhan@scut.edu.cn).

作者简介: 胡淑军(1985—), 男, 江西人, 博士生, 主要从事钢结构方面研究(E-mail: husj.1229@163.com);

潘建荣(1980—), 女, 河北人, 副研究员, 博士, 硕导, 主要从事钢结构与组合结构方面研究(E-mail: ctjrpan@scut.edu.cn).

导所得，在非弹性分析时不能准确地反映出杆件的实际屈服，且对于有些截面不够经济。Chan^[3]等提出了基于截面组合法考虑截面的屈服。截面组合法是一种以工字形或H形截面为基础，通过对截面各个矩形板的组合研究得到截面在轴力和弯矩作用下的屈服方程，并在截面的初始屈服方程中考虑残余应力的影响。已有研究表明，由截面组合法所推导的屈服方程，在弹性和非弹性分析时，能更连贯、准确和合理地评估截面的承载能力。

目前对钢框架高等分析方法主要是采用塑性铰法，例如 Liew^[4]、Kim^[5]等，这些方法通常假设塑性铰仅发生在杆件的两端。当有分布荷载作用在杆件上时，跨内最大弯矩处也可能会出现塑性铰。传统方法中会将原杆件划分为多个单元来考虑跨内屈服的影响，这样不仅会增加结构总的节点和单元数，而且杆件跨内最大弯矩的位置可能是变化的，增加单元数也不能反应出杆件的实际受力。

本文在研究杆件上作用有分布荷载时，预先确定跨内弯矩最大的位置，再通过假想的零长度弹簧刚度模拟两端和跨内最大弯矩处的截面刚度和逐渐屈服。对所引入的非节点自由度进行静力凝聚，使新的单元与普通单元具有相同的节点自由度。提出了仅用一个单元/杆件就能考虑跨内塑性铰的分析方法，并验证了该方法的效率和精度。

1 考虑两端塑性铰的钢框架高等分析

1.1 单元的基本力-位移方程

普通的梁柱单元，在弯矩、轴力和剪力共同作用下的变形如图1所示^[6]。

在小应变假设下，利用单元的边界条件并考虑剪切变形的影响后，单元的基本力-位移方程为：

$$\begin{cases} M_1 = \frac{EI}{L}(S_1\theta_1 + S_2\theta_2) \\ M_2 = \frac{EI}{L}(S_2\theta_1 + S_1\theta_2) \end{cases} \quad (1)$$

式中： M_1 、 M_2 是单元两端的弯矩； E 、 I 和 L 分别是弹性模量、截面惯性矩和长度； θ_1 和 θ_2 是单元两端的转角变形； S_1 和 S_2 是稳定函数。

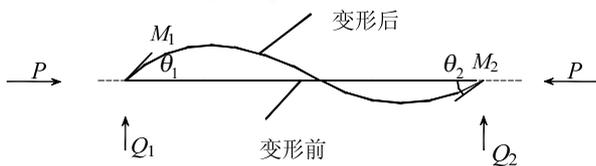


图1 梁柱单元

Fig.1 Beam-column element

考虑剪切变形和不同轴力的影响时，稳定函数 S_1 和 S_2 可表达如下：

$$S_1 = \begin{cases} \frac{\alpha \sin \alpha - \eta \alpha^2 \cos \alpha}{2 - 2 \cos \alpha - \eta \alpha \sin \alpha} ; & P < 0 \\ \frac{4 + \beta}{1 + \beta} ; & P = 0 \\ \frac{\eta \alpha^2 \cosh \alpha - \alpha \sinh \alpha}{2 - 2 \cosh \alpha + \eta \alpha \sinh \alpha} ; & P > 0 \end{cases} \quad (2a)$$

$$S_2 = \begin{cases} \frac{\eta \alpha^2 - \alpha \sin \alpha}{2 - 2 \cos \alpha - \eta \alpha \sin \alpha} ; & P < 0 \\ \frac{2 - \beta}{1 + \beta} ; & P = 0 \\ \frac{\alpha \sinh \alpha - \eta \alpha^2}{2 - 2 \cosh \alpha + \eta \alpha \sinh \alpha} ; & P > 0 \end{cases} \quad (2b)$$

式中： $\eta = 1 + \frac{\mu P}{GA}$ ； $\beta = \frac{12\mu EI}{GA L^2}$ ； $\alpha = L\sqrt{|P|/(\eta EI)}$ 。

μ 是考虑剪切变形不均匀影响的截面系数， P 是单元轴力(拉力为正，压力为负)， G 是剪切模量；

1.2 截面的屈服方程

截面组合法^[7]是基于截面各板组合的概念，主要适用于工字形和H形截面。假定轴力由腹板或腹板和部分翼缘共同承担，其余截面承担弯矩。将截面理想成几个矩形板拼接而成，腹板高度、腹板厚度、翼缘宽度和翼缘厚度等都需要用于截面承载力的计算。

初始屈服面。当截面的受力超过该屈服面时，截面刚度将逐渐减小。考虑截面在轴力和残余应力的作用下，初始屈服方程可写成：

$$M_{er} = (f_y - f_r - P/A)W_{ey} \quad (3)$$

式中： M_{er} 是截面的初始屈服弯矩； W_{ey} 是截面的弹性模量； f_r 是截面最大的残余应力。

残余应力 f_r 是基于 ECCS^[8]中所推荐的，其最大值由截面的高宽比决定，分布如图2。

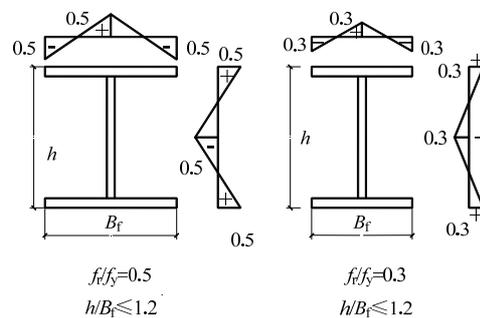


图2 ECCS 中工字形钢的残余应力

Fig.2 ECCS residual stress distribution for I-section

全截面屈服面。当截面的受力超过该屈服面时，即认为截面刚度为零，此时不考虑残余应力的影响。

在轴力作用下，截面的塑性区半高度为：

$$\begin{cases} \lambda = \frac{P}{2f_y t_w}, & \text{当 } \lambda \leq \frac{h_w}{2} \\ \lambda = \frac{P - f_y t_w h_w}{2f_y B_f} + \frac{h_w}{2}, & \text{当 } \frac{h_w}{2} \leq \lambda \leq \frac{h_w}{2} + h_f \end{cases} \quad (4)$$

考虑轴力引起截面的屈服后，截面的塑性弯矩 M_{pc} 由未屈服区承担，可表示为：

$$\begin{cases} M_{pc} = [W_{py} - \lambda^2 t_w] f_y & \text{当 } \lambda \leq \frac{h_w}{2} \\ M_{pc} = \left[\frac{h^2}{4} - \lambda^2 \right] B_f f_y & \text{当 } \frac{h_w}{2} \leq \lambda \leq \frac{h_w}{2} + h_f \end{cases} \quad (5)$$

式中： M_{pc} 是考虑轴力作用时的截面塑性弯矩承载力； W_{py} 是截面塑性模量； f_y 是截面的屈服应力； h_w 、 t_w 分别是腹板的高度和厚度； B_f 、 h_f 分别是翼缘宽度和厚度； h 是截面的高度。

由式(3)和式(5)可得单元的初始屈服曲线和全截面屈服曲线，如图3。

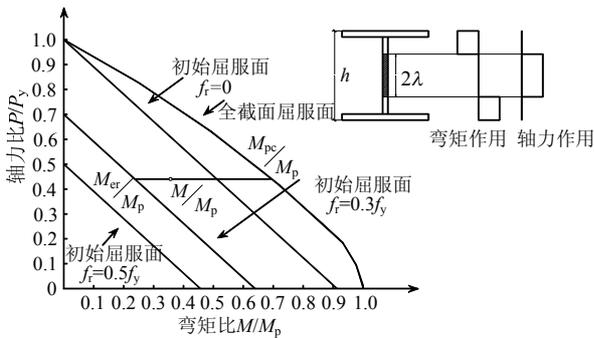


图3 截面的初始屈服面和全截面屈服面

Fig.3 First yield and full yield surfaces of section

从图3可以看出，当残余应力和轴力一定，可计算出对应的初始屈服弯矩 M_{er} 和全截面屈服弯矩 M_{pc} ，此时截面弹簧刚度 S_c ^[7] 可有如下表示：

$$\begin{cases} S_c = \infty, & \text{当 } M < M_{er} \\ S_c = \frac{6EI}{L} \frac{|M_{pc} - M|}{|M - M_{er}|}, & \text{当 } M_{er} \leq M < M_{pc} \\ S_c = 0, & \text{当 } M \geq M_{pc} \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中截面弹簧刚度的大小由初始屈服弯矩和全截面屈服弯矩决定。

1.3 单元考虑两端塑性铰的力-位移方程

假设单元的塑性铰仅在两端形成时，在单元可

能出现塑性铰的位置假想有一个零长度的弹簧^[7,9]。根据截面弹簧刚度概念，考虑截面出现部分屈服或全截面屈服时，弹簧的转动刚度变小、内部转角 θ_i 和外部转角 θ_e 也不相等，如图4所示。

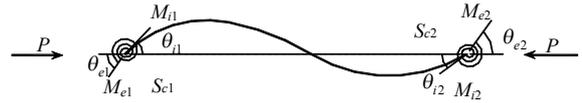


图4 单元端部假想弹簧的受力

Fig.4 Internal forces of an element with end-section pseudo-spring

考虑假想弹簧两端的平衡条件，可得到弯矩-转角的增量方程为：

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_e \\ \Delta M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_e \\ \Delta \theta_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中： ΔM_e 、 $\Delta \theta_e$ 分别是假想弹簧与外部节点之间的弯矩、转角增量； ΔM_i 、 $\Delta \theta_i$ 分别是假想弹簧与单元内部节点之间的弯矩、转角增量。

结合单元端部的截面弹簧刚度和稳定函数，可得到考虑单元屈服的弯矩-转角方程：

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{e1} \\ \Delta M_{i1} \\ \Delta M_{i2} \\ \Delta M_{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} & -S_{c1} & 0 & 0 \\ -S_{c1} & S_{c1} + K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & S_{c2} + K_{22} & -S_{c2} \\ 0 & 0 & -S_{c2} & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{e1} \\ \Delta \theta_{i1} \\ \Delta \theta_{i2} \\ \Delta \theta_{e2} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中： $K_{11}=K_{22}=S_1 EI/L$ ， $K_{12}=K_{21}=S_2 EI/L$ ，其中 S_1 、 S_2 是单元考虑剪切变形的稳定函数。

非节点自由度的凝聚。对式(8)中杆端内部自由度 θ_{i1} 和 θ_{i2} 凝聚，可得到单元的弯矩-转角方程：

$$(\mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ei}^T) \Delta \theta_{ee} = \Delta \mathbf{M}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \Delta \mathbf{M}_{ii} \quad (9)$$

式中： $\Delta \mathbf{M}_{ee}$ 是单元两端外力矢量； $\Delta \mathbf{M}_{ii}$ 是单元两端内部力矢量； $\Delta \theta_{ee}$ 是单元两端外部位移矢量； $\Delta \theta_{ii}$ 是单元两端内部位移矢量。

$$\Delta \mathbf{M}_{ee} = [\Delta M_{e1}, \Delta M_{e2}]^T, \quad \Delta \mathbf{M}_{ii} = [\Delta M_{i1}, \Delta M_{i2}]^T,$$

$$\Delta \theta_{ee} = [\Delta \theta_{e1}, \Delta \theta_{e2}]^T, \quad \Delta \theta_{ii} = [\Delta \theta_{i1}, \Delta \theta_{i2}]^T,$$

$$\mathbf{K}_{ee} = \begin{bmatrix} S_{c1} & 0 \\ 0 & S_{c2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ei} = \begin{bmatrix} -S_{c1} & 0 \\ 0 & -S_{c2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} S_{c1} + K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & S_{c2} + K_{22} \end{bmatrix}.$$

当荷载仅施加在节点上时， $\Delta \mathbf{M}_{ii} = \mathbf{0}$ ，式(9)的增量弯矩-转角方程可写成：

$$\Delta \mathbf{M}_{ee} = (\mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ei}^T) \Delta \theta_{ee} \quad (10)$$

由式(8)~式(10)可得到考虑截面弹簧刚度时，单

元的弯矩-转角方程:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{e1} \\ \Delta M_{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} - \frac{S_{c1}^2(S_{c2} + K_{22})}{\beta} & \frac{S_{c1}S_{c2}K_{12}}{\beta} \\ \frac{S_{c1}S_{c2}K_{21}}{\beta} & S_{c2} - \frac{S_{c2}^2(S_{c1} + K_{11})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{e1} \\ \Delta \theta_{e2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中, $\beta = (S_{c1} + K_{11})(S_{c2} + K_{22}) - K_{12}K_{21}$ 。

考虑单元两端形成塑性铰时, 单元的力-位移方程主要分为以下几种情况:

a) 仅 1 端出现塑性铰。

当 $M_1 \geq M_{pc}$ 且 $M_2 < M_{pc}$ 时, $S_{c1} = 0$, $0 < S_{c2} < \infty$ 。

此时式(11)可写成:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{e1} \\ \Delta M_{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mn \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_{e1} \\ \Delta \theta_{e2} \end{Bmatrix} \quad (12a)$$

式中, $m = 1/[1 + n/S_{c2}]$, $n = K_{22} - K_{12}K_{21}/K_{11}$ 。

b) 仅 2 端出现塑性铰。

当 $M_1 < M_{pc}$ 且 $M_2 \geq M_{pc}$ 时, $0 < S_{c1} < \infty$, $S_{c2} = 0$ 。

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{e1} \\ \Delta M_{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & mn & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_{e1} \\ \Delta \theta_{e2} \end{Bmatrix} \quad (12b)$$

式中, $m = 1/[1 + n/S_{c1}]$, $n = K_{11} - K_{12}K_{21}/K_{22}$ 。

c) a、b 端均出现塑性铰。

当 $M_1 \geq M_{pc}$ 且 $M_2 \geq M_{pc}$ 时, $S_{c1} = 0$, $S_{c2} = 0$ 。

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{e1} \\ \Delta M_{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_{e1} \\ \Delta \theta_{e2} \end{Bmatrix} \quad (12c)$$

1.4 初始缺陷

在结构分析时通常将构件理想化, 不考虑构件的初始缺陷, 而在钢结构的制作和施工过程中都容易产生偏差, 显然这与实际工程不相符。

钢框架高等分析方法中, 常用于考虑单元初始缺陷的方法有 3 种^[10]: 1) 直接模型法; 2) 等效名义荷载法; 3) 进一步切线模量法。通过分析和对比表明, 进一步折减切线模量法, 不仅计算简单, 而且可以达到理想的结果。

文献[10]中还提到, 折减系数取 0.85 时所得结果比较理想。该方程可表示为:

$$E = 0.85E_t \quad (13)$$

本文采用折减切线模量法考虑单元初始缺陷。

2 考虑跨内塑性铰的钢框架高等分析

分布荷载是指杆件上作用有集中荷载或均布荷载。当有分布荷载作用时, 单元除两端以外, 跨内弯矩最大处也可能产生塑性铰, 增加了单元的不确定性, 同时也增加了单元的非自由度。考虑跨内塑性铰和对非节点自由度进行凝聚可有效地解决这些问题。

当轴力一定时, 单元内部塑性铰的位置位于弯矩最大处, 因此在分析前, 需要确定每个迭代步中单元跨内的最大弯矩值和所对应位置。

在单元内部可能出现塑性铰的位置, 施加一个假想弹簧, 用来模拟单元跨内可能产生的屈服和塑性铰。如图 5 所示, 单元包含有跨内及两端塑性铰, 跨内塑性铰把单元分成 L_1 和 L_2 两部分。

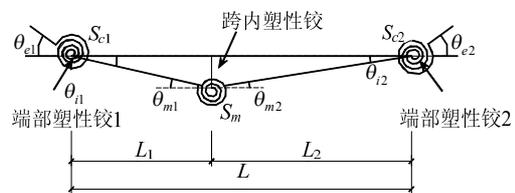


图 5 包含有两端及跨内塑性铰的单元

Fig.5 Element with two end and internal plastic hinge

2.1 跨内截面部分屈服时的力-位移方程

当跨内截面部分屈服时, 基于稳定函数理论并考虑跨内屈服处的剪力和位移, 可得到左亚元和右亚元的标准力-位移方程分别为:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{i1} \\ \Delta F \\ \Delta M_{m1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_1} \begin{bmatrix} S_1 & -S_{12}/L_1 & S_2 \\ -S_{12}/L_1 & 2S_{12}/L_1^2 & -S_{12}/L_1 \\ S_2 & -S_{12}/L_1 & S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{i1} \\ \Delta v \\ \Delta \theta_{m1} \end{Bmatrix} \quad (14a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta F \\ \Delta M_{m2} \\ \Delta M_{i2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_2} \begin{bmatrix} 2S_{12}/L_2^2 & S_{12}/L_2 & S_{12}/L_2 \\ S_{12}/L_2 & S_1 & S_2 \\ S_{12}/L_2 & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v \\ \Delta \theta_{m2} \\ \Delta \theta_{i2} \end{Bmatrix} \quad (14b)$$

式中: $S_{12} = S_1 + S_2$; ΔM_{m1} 、 ΔM_{m2} 是跨内塑性铰两端弯矩增量; $\Delta \theta_{m1}$ 、 $\Delta \theta_{m2}$ 是跨内塑性铰两端转角增量; ΔF 、 Δv 是跨内塑性铰处的剪力和位移增量。

根据跨内假想弹簧两端的弯矩平衡, 可得弯矩-转角增量方程:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{m1} \\ \Delta M_{m2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_m & -S_m \\ -S_m & S_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{m1} \\ \Delta \theta_{m2} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中, S_m 为跨内最大弯矩处的截面弹簧刚度, 由式(6)计算得到。

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{i1} \\ \Delta M_{m1} \\ \Delta F \\ \Delta M_{m2} \\ \Delta M_{i2} \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} S_1/L_1 & S_2/L_1 & -S_{12}/L_1^2 \\ S_2/L_1 & S_1/L_1 & -S_{12}/L_1^2 \\ -S_{12}/L_1^2 & -S_{12}/L_1^2 & 2S_{12}(1/L_1^3+1/L_2^3) \\ 0 & -S_m & S_{12}/L_2^2 \\ 0 & 0 & S_{12}/L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{i1} \\ \Delta \theta_{m1} \\ \Delta v \\ \Delta \theta_{m2} \\ \Delta \theta_{i2} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

根据式(8)~式(10)的方法并对单元内部非节点自由度凝聚, 可将式(16)改为:

$$\begin{cases} \Delta M_{ii} = (\mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{im} \mathbf{K}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{im}^T) \Delta \theta_{ii} + \Delta M_{im} \\ \Delta M_{im} = \mathbf{K}_{im} \mathbf{K}_{mm}^{-1} \Delta M_{mm} \end{cases} \quad (17)$$

式中: ΔM_{im} 是跨内塑性铰对杆单元内部产生的弯矩增量; ΔM_{ii} 是单元两端内部力矢量; ΔM_{mm} 是单元跨内力矢量; $\Delta \theta_{ii}$ 是单元两端内部位移矢量; $\Delta \theta_{mm}$ 是单元跨内位移矢量, 具体表示为:

$$\Delta M_{ii} = [\Delta M_{i1}, \Delta M_{i2}]^T, \quad \Delta M_{mm} = [\Delta M_{m1}, \Delta F, \Delta M_{m2}]^T,$$

$$\Delta \theta_{ii} = [\Delta \theta_{i1}, \Delta \theta_{i2}]^T, \quad \Delta \theta_{mm} = [\Delta \theta_{m1}, \Delta v, \Delta \theta_{m2}]^T,$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} S_1/L_1 & 0 \\ 0 & S_1/L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{im} = \begin{bmatrix} S_2/L_1 & -S_{12}/L_1^2 & 0 \\ 0 & S_{12}/L_2^2 & S_2/L_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{mm} = \begin{bmatrix} S_1/L_1 + S_m & -S_{12}/L_1^2 & -S_m \\ -S_{12}/L_1^2 & 2S_{12}/L_1^3 + 2S_{12}/L_2^3 & S_{12}/L_2^2 \\ -S_m & S_{12}/L_2^2 & S_1/L_2 + S_m \end{bmatrix}.$$

2.2 跨内形成塑性铰时的力-位移方程

当跨内已经形成塑性铰, $\Delta M_{m1} = \Delta M_{m2} = 0$, 左、右亚元的力-位移方程可分别改写成:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{i1} \\ \Delta F \end{Bmatrix} = EI \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1} \begin{bmatrix} 1/L_1 & -1/L_1^2 \\ -1/L_1^2 & 1/L_1^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{i1} \\ \Delta v \end{Bmatrix} \quad (18a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{i2} \\ \Delta F \end{Bmatrix} = EI \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1} \begin{bmatrix} 1/L_2 & 1/L_2^2 \\ 1/L_2^2 & 1/L_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{i2} \\ \Delta v \end{Bmatrix} \quad (18b)$$

由式(18)可得, 当跨内出现塑性铰并简化后:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{i1} \\ \Delta M_{i2} \end{Bmatrix} = EI \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1(L_1^3 + L_2^3)} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 \\ L_1 L_2 & L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{i1} \\ \Delta \theta_{i2} \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_1^3 + L_2^3} \begin{Bmatrix} -L_1 L_2^3 \cdot \Delta F \\ L_1^3 L_2 \cdot \Delta F \end{Bmatrix} \quad (19)$$

2.3 单元考虑跨内塑性铰的力-位移方程

考虑跨内截面在不同受力情况下, 可得到与单

元相对应的内部刚度 \mathbf{K} 和由分布荷载所引起的两端内部力增量 ΔM_{ii} 。

a) 跨内截面处于弹性时:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}; \quad \Delta M_{ii} = \mathbf{K} \Delta \theta_{ii} \quad (20a)$$

b) 跨内截面处于部分屈服时:

$$\begin{cases} \mathbf{K} = (\mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{im} \mathbf{K}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{im}^T) \\ \Delta M_{ii} = \mathbf{K} \Delta \theta_{ii} + \mathbf{K}_{im} \mathbf{K}_{mm}^{-1} \Delta M_{mm} \end{cases} \quad (20b)$$

c) 跨内截面出现塑性铰时:

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \frac{EI(S_1^2 - S_2^2)}{S_1(L_1^3 + L_2^3)} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 \\ L_1 L_2 & L_2^2 \end{bmatrix} \\ \Delta M_{ii} = \mathbf{K} \Delta \theta_{ii} + \frac{1}{L_1^3 + L_2^3} \begin{Bmatrix} -L_1 L_2^3 \cdot \Delta F \\ L_1^3 L_2 \cdot \Delta F \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (20c)$$

内部刚度 \mathbf{K} 是对式(1)中单元刚度的修正。

考虑跨内塑性铰的影响, 可得到单元的弯矩-转角增量方程:

$$\Delta M_{ee} = (\mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_{ei}^T) \Delta \theta_{ee} + \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}^{-1} \Delta M_{ii} \quad (21)$$

式中除刚度 \mathbf{K} 以外, 其余参数与式(9)相同。

3 算例

算例 1. 集中荷载作用。如图 6 中某 4 层钢框架。该框架的梁截面均为 W16×40(英制, 如下同), 底层柱截面为 W12×79, 其它柱截面均为 W10×60; 框架的几何尺寸及所受荷载如图所示; 所有截面的弹性模量 $E=205\text{kN/mm}^2$, 屈服应力是 235N/mm^2 。

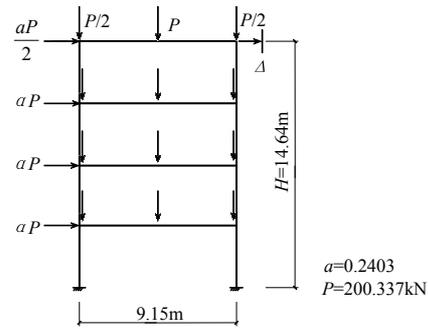


图 6 某 4 层钢框架图

Fig.6 Four-storey steel frame

该算例的分析中, 考虑了几何非线性、剪切变形、残余应力、单元的逐渐屈服和初始缺陷等, 并根据是否考虑跨内塑性铰做了 3 种分析: 1) 不考虑跨内塑性铰且每根杆件采用一个普通单元; 2) 考虑跨内塑性铰且对有分布荷载的杆件采用一个本文所提出的单元; 3) 不考虑跨内塑性铰但对有跨间荷载的杆件采用两个普通单元。将图 7 中的荷载-位移

曲线与文献[11]中的结果对比,方法 1 所得的侧向位移 Δ 与结构总高度之比为 1.32×10^{-2} ,方法 2 和方法 3 的比值分别为 1.76×10^{-2} 和 1.88×10^{-2} 。方法 2、方法 3 与 Kassimali 的值 1.72×10^{-2} 非常接近,但方法 3 增加了结构的单元数,而方法 1 所得结果的精度较差。

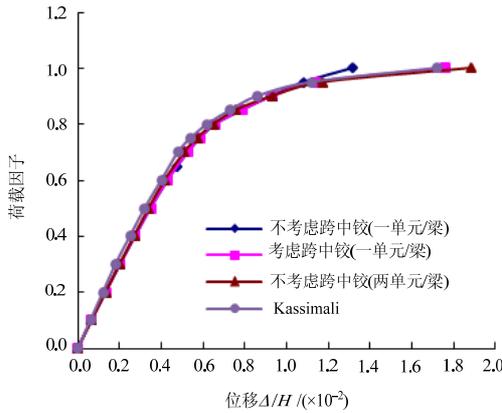


图 7 某 4 层钢框架的荷载-位移曲线图

Fig.7 Load-displacement curve of four-storey steel frame

通过分析和对比可得,采用本文所提出的考虑跨内塑性铰的方法,不仅减少了单元的数量,结果精确也较高。图 8 为考虑跨内塑性铰时结构中单元的塑性铰产生顺序。当梁上有集中荷载作用时,跨内容易屈服,若忽略跨内屈服而引起的单元刚度折减,对结果影响较大。

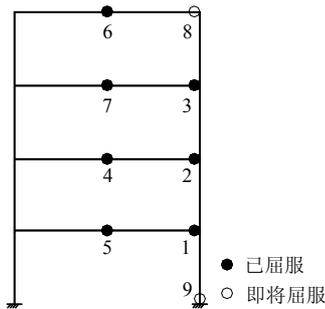


图 8 某 4 层钢框架单元的塑性铰出现顺序图

Fig.8 Sequence of plastic hinge formation of four-storey steel frame

算例 2. 均布荷载作用。如图 9 中的 Vogel 六层框架,截面梁、柱的尺寸如图所示,所有截面的弹性模量 $E=205\text{kN/mm}^2$,屈服应力是 235N/mm^2 。

该算例的分析中,同样考虑了几何非线性、剪切变形、残余应力、单元的逐渐屈服和初始缺陷等,并根据是否考虑单元跨内塑性铰也做了 3 种分析,与算例 1 中相同。3 种分析所得荷载因子和 A 点的荷载-位移曲线如图 10。方法 1 得到的荷载因子是

1.135, A 点位移是 221mm,方法 2 和方法 3 的荷载因子分别是 1.125 和 1.138, A 点位移分别 300mm 和 315mm。与 Vogel(1985)^[12]的结果对比,方法 1 结果精度较差,方法 2、方法 3 所得结果较为理想,但极限荷载和对应的位移均略微偏大,分析可能是由于屈服方程的不同而产生的。

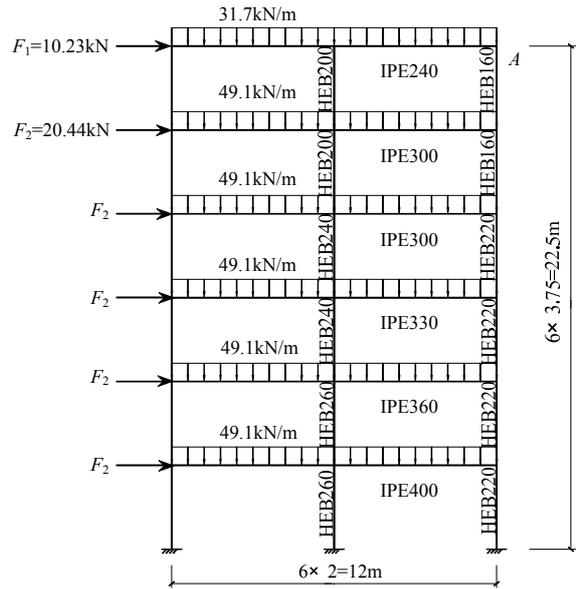


图 9 Vogel 六层框架

Fig.9 Vogel six-storey steel frame

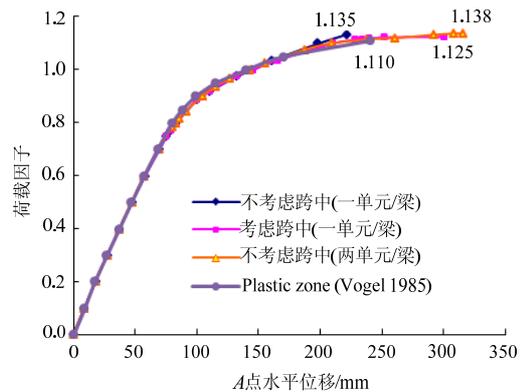


图 10 Vogel 六层框架荷载-位移图

Fig.10 Load-displacement curve of Vogel six-storey steel frame

当梁上作用有均布荷载时,根据本文所提出的方法先确定每个迭代步中跨内最大弯矩,并更新单元的刚度矩阵以代替多单元的模拟,能得到理想的结果和计算效率。图 11 给出了极限荷载下各杆件的内力、有均布荷载作用的梁跨内最大弯矩位置、塑性铰出现顺序及所对应的荷载因子,与文献[13]的结果相近,进一步说明了本文所提方法的准确性。

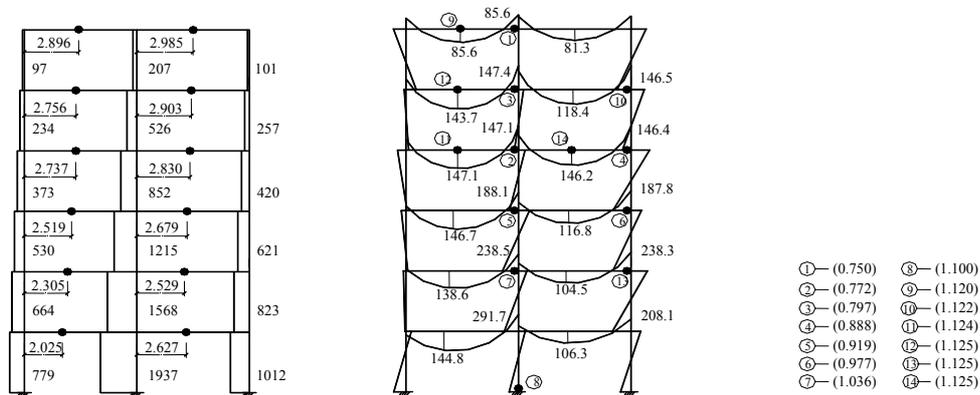


图 11 Vogel 六层框架内力及塑性铰出现顺序图 (a) 轴向力(kN)及跨内移动节点(m)位置图 (b) 弯矩(kN·m)及塑性铰出现顺序图 (c) 出现塑性铰时所对应的荷载因子

Fig.11 Internal force and the sequence of plastic hinge formation of Vogel six-storey steel frame

4 结论

当结构杆件上作用有分布荷载时，按传统的高等分析方法假设塑性铰仅在两端出现是不正确的。本文通过对作用有分布荷载的杆件考虑跨内塑性铰的研究，可得出以下几点结论：

(1) 通过截面组合法推导单元的屈服方程，能更连贯、准确和合理地评估单元在弹性和非弹性时的承载能力。

(2) 当杆件上有分布荷载作用时，不仅要考虑单元的几何非线性、剪切变形、残余应力和初始缺陷等，还需考虑跨内塑性铰的影响。

(3) 在可能出现塑性铰的两端和跨中受力最大处，分别假想有一个零长度的弹簧。该弹簧在不同受力下对应有不同的截面刚度，能准确地模拟单元的屈服。

(4) 考虑截面弹簧刚度时，会增加单元的非节点自由度，通过引入自由度凝聚的概念，可以有效地解决该问题。凝聚后新的单元与常规单元具有相同的节点自由度。

(5) 计算结果表明，本文所提出的方法可仅通过一个单元/杆件就能得到高效率和高精度的结果，并且能确定跨内塑性铰的位置和塑性铰的出现顺序，适用于有分布荷载作用时需考虑跨内塑性铰的钢框架高等分析中。

参考文献：

[1] American Institute of Steel Construction (AISC). Load and resistance factor design (LRFD): Specification for structural steel building [S]. Chicago, IL, 1986.
 [2] Orbison J G, Mcguire W, Abel J F. Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis [J].

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 33(1): 557—573.
 [3] Chan S L, Chui P P T. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept [J]. Engineering Structures, 1997, 19(8): 628—636.
 [4] Liew J Y R, White D W, Chen W F. Second-order refined plastic hinge analysis of frame design, part 1 [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1993, 119(11): 3196—3216.
 [5] Kim S E, Chen W F. Practical advanced analysis for braced steel frames design [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1996, 122(11): 1266—1274.
 [6] 陈惠发. 钢框架稳定设计[M]. 周绥平, 译. 上海: 世界图书出版社, 1999: 76—80.
 Chen W F. Stability design of steel frames [M]. Translated by Zhou Suiping. Shanghai: World Publishing Corporation, 1999: 76—80. (in Chinese)
 [7] Chan S L, Chui P P T. Non-linear static and cyclic analysis of semi-rigid steel frames [M]. Oxford: Elsevier Science, 2000.
 [8] European Convention for Constructional Steelwork (ECCS). Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints [S]. Brussel, 1984.
 [9] 陈惠发. 梁柱分析与设计(第1卷), 平面问题特性及设计[M]. 北京: 人民交通出版社, 1997: 456—460.
 Chen W F. Analysis and design of beam-column, volume (I), planar problem characteristic and design [M]. Beijing: China Communications Press, 1997: 456—460. (in Chinese)
 [10] Kim S E, Chen W F. Practical advanced analysis for unbraced steel frames design [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1996, 122(11): 1259—1265.
 [11] Kassimali A. Large deformation analysis of elastic-plastic frames [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1983, 109(8): 1869—1886.
 [12] Vogel U. Calibrating frames [J]. Stahlbau, 1985, 10(10): 1—7.
 [13] Liew J Y R. Advanced analysis for frame design [D]. West Lafayette, IL: School of Civil Engineering, Purdue University, 1992.