

文章编号: 1000-4750(2014)03-0027-05

基于偶应力理论薄膜-基体界面剪应力尺寸效应的研究

聂志峰¹, 肖林京¹, 韩汝军², 王 凯³, 李星龙¹, 吴恒恒¹

(1. 山东科技大学机械电子工程学院, 青岛 266590; 2. 山东科技大学科研处, 青岛 266590; 3. 济南工程职业技术学院, 济南 250200)

摘 要: 将 C^1 自然单元法应用于偶应力理论, 建立了偶应力理论无网格法。考虑到薄膜厚度在微米量级, 与其材料的特征长度相当, 因此基于构建的偶应力理论无网格法, 研究了薄膜-基体复合结构界面剪应力的尺寸效应现象。计算结果表明: 随着薄膜厚度的减小, 无量纲界面剪应力(定义为偶应力理论下的剪应力与经典理论下的剪应力之比值)逐渐变小, 尺寸效应逐渐增强。对于给定的粘合强度, 偶应力理论下的剪应力要小于经典理论下的剪应力, 这意味着偶应力理论下薄膜更不容易发生脱胶失效现象。

关键词: 偶应力理论; C^1 自然单元法; 薄膜-基体; 界面剪应力; 尺寸效应

中图分类号: O341 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.10.0778

STUDY ON SIZE EFFECT OF INTERFACIAL SHEAR STRESS BETWEEN FILM AND SUBSTRATE BASED ON COUPLE-STRESS THEORIES

NIE Zhi-feng¹, XIAO Lin-jing¹, HAN Ru-jun², WANG Kai³, LI Xing-long¹, WU Heng-heng¹

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. Department of Scientific Research, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

3. Jinan Vocational and Technology College in Engineering, Jinan 250200, China)

Abstract: C^1 natural element method for couple-stress (CS) theories was constructed when C^1 natural element method was applied to CS theories. Considering the fact that the thickness of film is on the micron scale, which is close to the material characteristic length scales, the size effect of interfacial shear stress between film and substrate was studied. Numerical results illustrated that with decrease in the film thickness, normalized interfacial shear stress (defined as the ratio of the shear stress in the CS theories to that in the classical theories) decreased gradually, while the size effect became stronger gradually. For a given bonding strength, the shear stress in the CS theories was less than that in the classical theories, which implied that it is hard to debond in the CS theories.

Key words: CS theories; C^1 natural element method; film-substrate; interfacial shear stress; size effect

为了提高材料的耐磨性和耐腐蚀性等性能, 在基体表面镀膜能有效增强材料的表面性能^[1]。当薄膜-基体材料的界面剪应力超过膜-基粘合强度时,

薄膜会从基体上剥落下来, 这是膜-基复合材料的主要失效形式。因此, 对膜-基复合材料界面剪应力的计算和膜-基粘合强度的确定就显得非常重要。戴耀

收稿日期: 2012-10-19; 修改日期: 2013-02-21

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2012M511533); 山东省博士后创新项目专项资金项目(201103098); 青岛市科技计划项目(12-1-4-6-(2)-jch)

通讯作者: 聂志峰(1970-), 男, 山东日照人, 讲师, 博士, 从事力学数值方法的研究(E-mail: sdjnnzf@163.com)。

作者简介: 肖林京(1966-), 男, 山东沂水人, 教授, 博士, 博导, 从事机电工程的研究(E-mail: xiaolinjing@163.com);

韩汝军(1970-), 男, 山东莱芜人, 高工, 博士, 从事矿山机械研究(E-mail: hrj@sdust.edu.cn);

王 凯(1976-), 男, 山东济南人, 副教授, 博士, 从事力学数值方法的研究(E-mail: wwwkai@163.com);

李星龙(1989-), 男, 山东平邑人, 硕士生, 从事力学数值方法的研究(E-mail: li_xinglong@163.com);

吴恒恒(1989-), 男, 山东汶上人, 硕士生, 从事力学数值方法的研究(E-mail: 601822660@qq)。

等^[2]采用线法和任意线法对膜-基界面剪应力进行了分析。薛孟君等^[3]采用影响系数法,对膜-基复合材料界面剪应力进行了三维半解析计算。Ting等^[4-5]利用复合板模型对薄膜-基体结构进行了一维弹性分析,给出了界面剪应力的解析公式,并采用半定量法测量了薄膜-基体的粘合强度。当薄膜厚度在微纳米尺度时,薄膜-基体结构在界面处的力学性能可能会与传统力学理论预测的结果有所不同。Wei Yueguang等^[6-7]基于应变梯度塑性理论,采用两种断裂过程区模型,研究了金属-陶瓷非线性脱胶现象。自然单元法^[8]和高阶连续自然单元法^[9]是研究弹性力学边值问题的重要数值方法。聂志峰等^[10-11]应用高阶连续自然单元法研究了微夹持器和微试件的尺寸效应现象。Wang K等^[12]应用梯度光滑技术将自然邻近迦辽金法应用于偶应力弹性理论问题的分析。将 C^1 自然单元法应用于偶应力弹性理论,构建了偶应力弹性理论无网格法^[13]。基于构建的偶应力弹性理论无网格法,本论文研究了薄膜-基体复合结构界面剪应力的尺寸效应现象。对于给定界面粘合强度,如果偶应力理论下的剪应力小于经典理论下的剪应力,那么薄膜不容易发生脱胶失效现象;反之,如果偶应力理论下的剪应力大于经典理论下的剪应力,那么薄膜容易发生脱胶失效现象。

1 偶应力理论 C^1 自然单元法

本文依据的偶应力理论^[14]是 Cosserat 介质理论^[15]或微极理论^[16]的一种特殊形式,该理论的显著特点是偶应力的静水压力部分与 Cauchy 应力的反对称部分是不确定的^[14]。

在偶应力理论中,除了通常的 Cauchy 应力 t_{ij} 之外,还存在偶应力 μ_{ij} 。偶应力的存在使得 Cauchy 应力不再是对称张量,可将其分解为对称部分 σ_{ij} 和反对称部分 τ_{ij} , 即:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{t_{ij} + t_{ji}}{2} \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \frac{t_{ij} - t_{ji}}{2} \quad (3)$$

偶应力理论的控制方程为:

$$\sigma_{ij,j} - \frac{1}{2}e_{kji}\mu_{mk,mj} + f_i - \frac{1}{2}e_{kji}c_{k,j} = 0 \quad (4)$$

式中: f_i 是单位体积力; c_i 是单位体积力偶; e_{ijk} 是三阶置换张量。

边界条件为:

$$u_i = \underline{u}_i, \quad \omega_i = \underline{\omega}_i, \quad \text{在 } S_u \text{ 上}; \quad (5)$$

$$t_i = t_{ij}n_j = \underline{t}_i, \quad \mu_i = \mu_{ij}n_j = \underline{\mu}_i, \quad \text{在 } S_t \text{ 上}。 \quad (6)$$

式中: n_j 表示边界外法线矢量; \underline{u}_i 和 $\underline{\omega}_i$ 分别表示边界上的已知位移和转角; \underline{t}_i 和 $\underline{\mu}_i$ 分别表示作用在边界上的已知面力和面力偶。

对于线弹性各向同性材料,应变能密度函数定义为^[14]:

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + 2\mu l^2\chi_{ij}\chi_{ij} \quad (7)$$

式中: λ 和 μ 是拉梅常数; l 是材料的特征长度参数; ε_{ij} 和 χ_{ij} 是应变张量和旋转梯度张量。分别定义为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (8)$$

$$\chi_{ij} = \omega_{j,i} = \frac{1}{2}e_{jpk}u_{k,pi} \quad (9)$$

本构方程可以表示为:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (10)$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \chi_{ij}} = 4\mu l^2\chi_{ij} \quad (11)$$

由于 C^1 自然单元法的形函数对结点函数值和梯度值具有插值特性^[9],所以本质边界条件式(5)可以直接施加。控制方程式(4)和自然边界条件式(6)的等效积分形式为:

$$\int_V \delta u_i \left(\sigma_{ij,j} - \frac{1}{2}e_{kji}\mu_{mk,mj} + f_i - \frac{1}{2}e_{kji}c_{k,j} \right) dV - \int_S \delta u_i (t_i - \underline{t}_i) dS - \int_S \delta \omega_i (\mu_i - \underline{\mu}_i) dS = 0 \quad (12)$$

对式(12)体积积分的前两项利用 Green-Gauss 定理,并考虑到位移和转角边界上的变分为 0,式(12)的等效积分“弱形式”表示为:

$$\int_V (\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + \delta\chi_{ij}\mu_{ij}) dV - \int_V (\delta u_i f_i + \delta \omega_i c_i) dV - \int_S (\delta u_i t_i + \delta \omega_i \underline{\mu}_i) dS = 0 \quad (13)$$

对于平面应变问题,非零位移量是 u_x 、 u_y 和 ω_z ,非零应变张量为 ε_{xx} 、 ε_{yy} 和 ε_{xy} ,非零旋转梯度张量为 χ_{xz} 和 χ_{yz} 。

定义应变-旋转梯度向量 A 为:

$$A = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad \chi_{xz} \quad \chi_{yz}]^T \quad (14)$$

根据式(8)和式(9),向量 A 亦可表示为:

$$A = D_1 u \quad (15)$$

式中： \mathbf{D}_1 是微分算子向量； \mathbf{u} 是位移向量。分别定义为：

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y]^T \quad (17)$$

对应的应力-偶应力向量 \mathbf{S} 为：

$$\mathbf{S} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy} \ \mu_{xz} \ \mu_{yz}]^T \quad (18)$$

定义面力-面偶向量 \mathbf{t} ，体力-体偶向量 \mathbf{b} 为：

$$\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ \underline{\mu}_z]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{b} = [f_x \ f_y \ c_z]^T \quad (20)$$

定义非零广义虚位移向量为：

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = [\delta u_x \ \delta u_y \ \delta \omega_z]^T \quad (21)$$

根据式(9)，广义虚位移向量的位移表达形式为：

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_2 \delta \mathbf{u} \quad (22)$$

式中， \mathbf{D}_2 是微分算子向量，定义为：

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

将式(14)、式(18)~式(21)代入式(13)，得到：

$$\int_V (\delta \mathbf{A})^T \mathbf{S} dV = \int_V (\delta \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{b} dV + \int_S (\delta \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{t} dS \quad (24)$$

采用高阶自然邻近插值函数^[9]，位移向量的插值形式为：

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^n \psi_I \hat{\mathbf{u}}_I \quad (25)$$

式中：

$$\psi_I = \begin{bmatrix} \psi_{3I-2} & \psi_{3I-1} & \psi_{3I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{3I-2} & \psi_{3I-1} & \psi_{3I} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_I = [u_{Ix} \ u_{Ix,x} \ u_{Ix,y} \ u_{Iy} \ u_{Iy,x} \ u_{Iy,y}] \quad (27)$$

n 是高斯积分点的自然邻子个数。

将离散式(25)代入式(13)，不考虑体力-体偶向量 \mathbf{b} ，得到：

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (28)$$

式中：

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_V \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J dV \quad (29)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \int_S \mathbf{E}_I^T \mathbf{t} dS \quad (30)$$

式(29)和式(30)中的 \mathbf{B}_I 、 \mathbf{E}_I 是由形函数 ψ 及其导数表示的矩阵，具体形式为：

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{D}_1 \psi_I = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & \psi_{2,x} & \psi_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{1,y} & \psi_{2,y} & \psi_{3,y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{2,y} & \psi_{3,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,x} & \psi_{3,x} \\ -\frac{\psi_{1,xy}}{2} & -\frac{\psi_{2,xy}}{2} & -\frac{\psi_{3,xy}}{2} & \frac{\psi_{1,xx}}{2} & \frac{\psi_{2,xx}}{2} & \frac{\psi_{3,xx}}{2} \\ -\frac{\psi_{1,yy}}{2} & -\frac{\psi_{2,yy}}{2} & -\frac{\psi_{3,yy}}{2} & \frac{\psi_{1,xy}}{2} & \frac{\psi_{2,xy}}{2} & \frac{\psi_{3,xy}}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中：

$$\psi_1 = \psi_{3I-2}, \quad \psi_2 = \psi_{3I-1}, \quad \psi_3 = \psi_{3I}.$$

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{D}_2 \psi_I = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\frac{\psi_{1,y}}{2} & -\frac{\psi_{2,y}}{2} & -\frac{\psi_{3,y}}{2} & \frac{\psi_{1,x}}{2} & \frac{\psi_{2,x}}{2} & \frac{\psi_{3,x}}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

对于各向同性线弹性材料，本构矩阵 \mathbf{D} 为：

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 4I^2 & 0 \\ \text{symmetry} & & & & 4I^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

式中， G 和 ν 是剪切模量和泊松比。

2 薄膜-基体计算模型

表面涂膜的基体可视为一复合结构，基体两端受到拉伸作用，如图1所示。如果薄膜基体之间没

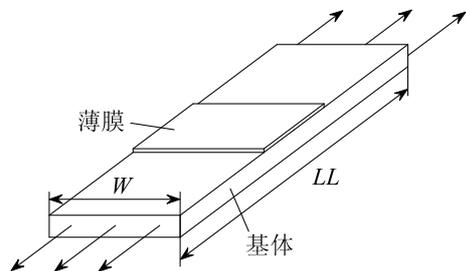


图1 拉伸作用下的薄膜-基体复合结构

Fig.1 Geometry of film-to-substrate under tensile loading

有粘合作用, 薄膜不会受到张紧作用, 在膜-基界面上二者会产生位移差。相反, 如果薄膜基体之间粘合良好, 膜-基界面上二者位移一定相等, 并且由于材料弹性常数的不同会在界面上产生剪应力。

Ting 等^[4]给出了薄膜-半无限大基体的界面剪应力的计算公式, 即:

$$\tau_f(x) = \tau_m(x, 0) = -e \sqrt{\frac{E_f h G_m}{d}} \left\{ \frac{\sinh \beta(L/2 - x)}{\cosh(\beta L/2)} \right\} F(\xi_1) \quad (34)$$

式中: 下标 f 、 m 分别代表薄膜和基体; e 是基体长度方向给定的应变; 结构参数 h 、 d 、 L 分别表示薄膜厚度、基体厚度和薄膜长度; 参数 β 定义为:

$$\beta = F(\xi_1) \sqrt{\frac{G_m}{dhE_f}} \quad (35)$$

式中:

$$F(\xi_1) = \left[\frac{C-2}{2} \xi_1^{\frac{2(C-1)}{C-2}} - \frac{C}{2} \xi_1^2 + \xi_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

其中:

$$C = E_m d / E_f h \quad (37)$$

ξ_1 是多项式的根, 多项式定义为:

$$(C-1)\xi^{\frac{C}{C-2}} - C\xi + 1 = 0 \quad (38)$$

式中无量纲厚度 ξ 定义为:

$$\xi = y/d \quad (39)$$

对于式(34)和式(35), 当参数 C 在 40~90000 变化时, $F(\xi_1)$ 由 3.08 缓慢增大至 3.13, 根据文献[4]的做法, 本文直接取平均值 3.1, 所以式(34)和式(35)可以分别表示为:

$$\beta = 3.1 \sqrt{\frac{G_m}{dhE_f}} \quad (40)$$

$$\tau_f(x) = \tau_m(x, 0) = -3.1e \sqrt{\frac{E_f h G_m}{d}} \left\{ \frac{\sinh \beta(L/2 - x)}{\cosh(\beta L/2)} \right\} \quad (41)$$

由于基体宽度 W 远大于薄膜和基体厚度 h 和 d , 可以把该问题处理成平面应变问题, 如图 2 所示。复合结构结点离散模型如图 3 所示, 由于薄膜和基体厚度差别较大, 界面端部附近作局部加密处理。

3 数值计算

假定薄膜材料为镍, 材料参数为^[17]: $E =$

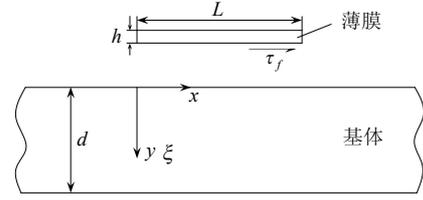


图 2 薄膜-基体结构尺寸及坐标

Fig.2 Sizes of film-to-substrate and the coordinates

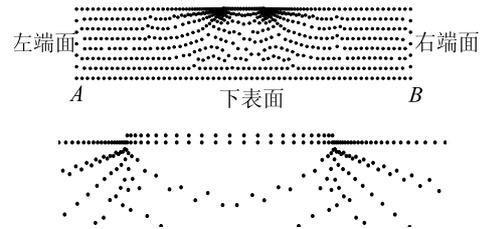


图 3 薄膜-基体结点离散模型及其局部放大图

Fig.3 Nodal discretization of the film-to-substrate and its local enlarged diagram

207GPa, $\nu = 0.312$, $l = 5.2\mu\text{m}$; 基体材料为多晶铜, 材料参数为^[18]: $E = 119\text{GPa}$, $\nu = 0.326$, $l = 3.7\mu\text{m}$ 。计算时, 参数 d 、 L 和 LL 分别取 $400\mu\text{m}$ 、 $500\mu\text{m}$ 和 4mm , 薄膜厚度 h 分别取 $4\mu\text{m}$ 、 $2\mu\text{m}$ 和 $0.4\mu\text{m}$ 。根据文献[4]的式(14)可知参数 C 值分别为 57.5、115 和 575, 落在 40~90000 的范围内, $F(\xi_1)$ 近似取 3.1 是允许的。对于图 3, 边界条件的处理如下:

- 1) 左端面结点: $\underline{u}_x = -20\mu\text{m}$ ($e = 0.01$), $\underline{\omega}_z = 0$;
- 2) 右端面结点: $\underline{u}_x = 20\mu\text{m}$ ($e = 0.01$), $\underline{\omega}_z = 0$;
- 3) 下表面结点: $\underline{u}_y = \underline{\omega}_z = 0$;
- 4) 左下角结点 A 和右下角结点 B : 全约束。

沿涂层长度方向界面剪应力的分布如图 4 所示。需要指出的是, 经典理论下的计算值是令偶应力理论下的 $l = 0$ 得到的。由图 4 可以看出, 计算值与解析解有较好的吻合; 但是, 随着薄膜厚度的变小, 薄膜和基体在厚度方向的尺寸差别变大, 在有限离散结点(计算中采用的最大结点数为 751)的情况下, 计算值与解析值之间的误差逐渐变大, 如表 1 所示。另外, 由图 4 也可以看出, 薄膜厚度越大, 界面端部最大剪应力越大, 薄膜-基体剥离的可能性就越大。

当薄膜厚度 $h = 4\mu\text{m}$, 沿长度方向界面剪应力在经典理论下和偶应力理论下的对比见图 5。可以看出, 沿整个长度方向偶应力理论下的界面剪应力

要小于经典理论下的界面剪应力。以薄膜两端为例，偶应力理论下的界面剪应力为 216MPa，小于经典理论下的界面剪应力 300MPa，界面剪应力存在尺寸效应现象。

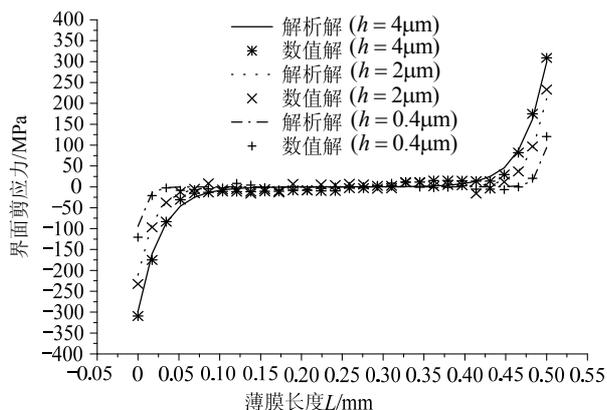


图 4 不同薄膜厚度下界面剪应力沿长度方向的分布

Fig.4 The distribution of interfacial shear stresses along longitudinal direction with various film thicknesses

表 1 薄膜端部 ($x=0$ 或者 $x=L$) 界面剪应力

Table 1 Interfacial shear stresses at $x=0$ or $x=L$

$h/\mu\text{m}$	解析解/MPa	数值解/MPa	误差/(%)
4	298.66	309.16	3.5
2	211.15	232.37	10
0.4	94.37	120.62	27.8

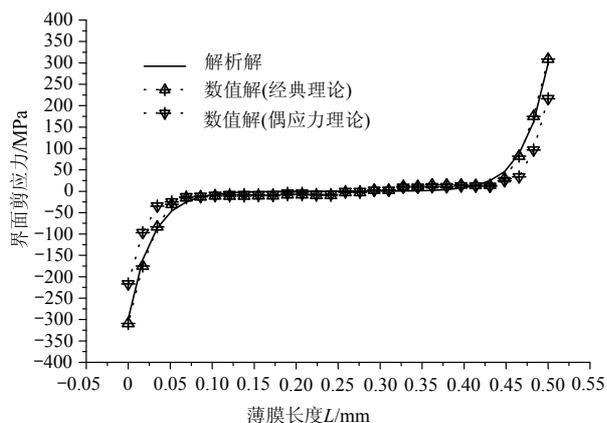


图 5 两种理论下沿长度方向界面剪应力的对比

Fig.5 Comparison of interfacial shear stresses along longitudinal direction under the two theories

图 6 描述了无量纲界面剪应力(定义为偶应力理论下的界面剪应力/经典理论下的界面剪应力)随薄膜厚度的变化规律。随着薄膜厚度的减小，无量纲界面剪应力逐渐变小，界面剪应力的尺寸效应逐渐增强。

4 结论

将 C^1 自然单元法应用于偶应力弹性理论,建立

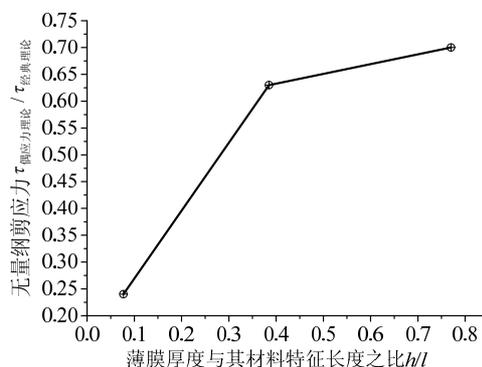


图 6 无量纲剪应力随 h/l 的变化曲线图

Fig.6 The normalized shear stress versus h/l

了偶应力弹性理论无网格法,研究了薄膜-基体界面剪应力尺寸效应现象。考虑偶应力效应的影响时,偶应力理论下的界面剪应力小于经典理论下的界面剪应力;并且,随着薄膜厚度的减小,无量纲界面剪应力逐渐减小,尺寸效应逐渐增强。对于给定的界面粘合强度,薄膜在偶应力理论下较在经典理论下更不容易发生脱胶失效现象。

参考文献:

- [1] Mizutani R, Oono Y, Matsuoka J, Nasu H, Kamiya K. Coating of polymethylmethacrylate with transparent SiO₂ thin films by a sol-gel method [J]. Journal Materials Science, 1994, 29(21): 5773—5778.
- [2] 戴耀, 黄尽才, 徐滨士, 何家文. 拉伸法的线性分析 [J]. 中国表面工程, 1998, 11(2): 33—36.
Dai Yao, Huang Jincai, Xu Binshi, He Jiawen. MOL analysis of the tensile test [J]. China Surface Engineering, 1998, 11(2): 33—36. (in Chinese)
- [3] 薛孟君, 刘跃进, 杨班权. 膜-基复合材料界面剪应力的三维半解析计算 [J]. 力学与实践, 2002, 24(5): 50—53.
Xue Mengjun, Liu Yuejin, Yang Banquan. Three-dimensional-analytic calculation for the interfacial shear stresses of film-substrate [J]. Mechanics in Engineering, 2002, 24(5): 50—53. (in Chinese)
- [4] Ting B Y, Winer W O, Ramalingam S. A semi-quantitative method for thin film adhesion measurement [J]. Journal of Tribology, 1985, 107: 472—477.
- [5] Ting B Y, Ramalingam S, Winer W O. An experimental investigation of the film-to-substrate bond strength of sputtered thin film using a semi-quantitative test method [J]. Journal of Tribology, 1985, 107: 478—482.
- [6] Wei Yueguang. Microscale mechanics for metal thin film delamination along ceramic substrates [J]. Science in China, 2000, 43(5): 509—516.
- [7] Wei Y G, Hutchinson J W. Nonlinear delamination mechanics for thin films [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45(7): 1137—1159.

(参考文献[8]—[18]转第 44 页)

- 的试验研究[J]. 水利学报, 1992(6): 60—66.
- Yang Muqiu, Lin Hong. Test study on stress-strain curve of concrete under uniaxial compressing and tensile [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1992(6): 60—66. (in Chinese)
- [15] Ollivier J P, Maso J C, Bourdette B. Interfacial transition zone in concrete [J]. Advanced Cement Based Materials, 1995, 2: 30—38.
- [16] Liao K, Chang P, Peng Y, et al. A study on characteristics of interfacial transition zone in concrete [J]. Cement and Concrete Research, 2004, 34(6): 977—989.
- [17] 李伟政. 二轴拉压应力全组合下砼的强度及变形试验研究[D]. 北京: 清华大学, 1989.
- Li Weizheng. Experimental investigation of strength and deformation of concrete under biaxial tension-compression tests [D]. Beijing: Tsinghua University, 1989. (in Chinese)

(上接第 31 页)

- [8] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43: 839—887.
- [9] Sukumar N, Moran B. C^1 natural neighbor interpolant for partial differential equations [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1999, 15(4): 417—447.
- [10] 聂志峰, 周慎杰, 韩汝军, 肖林京, 王凯. 应变梯度弹性理论下微构件尺寸效应的数值研究[J]. 工程力学, 2012, 29(6): 38—46.
- Nie Zhifeng, Zhou Shenjie, Han Rujun, Xiao Linjing, Wang Kai. Numerical study on size effects of the microstructures based on strain gradient elasticity [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(6): 38—46. (in Chinese)
- [11] Nie Zhifeng, Zhou Shenjie, Han Rujun, Xiao Linjing, Wang Kai. C^1 natural element method for strain gradient linear elasticity and its application to microstructures [J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(1): 91—103.
- [12] Wang K, Zhou S J, Nie Z F. Application of the gradient smoothing technique to the natural neighbour Galerkin method for the couple-stress elasticity [J]. CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2011, 73(1): 77—102.
- [13] 聂志峰. 应变梯度弹性理论 C^1 自然单元法及其应用研究[D]. 济南: 山东大学, 2010.
- Nie Zhifeng. Research on C^1 natural element method for strain gradient elasticity and its application [D]. Jinan: Shandong University, 2010. (in Chinese)
- [14] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple stresses in linear elasticity [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, 11(5): 415—448.
- [15] Cosserat E, Cosserat F. Theorie des Corps Deformables [M]. Paris: A. Hermann & Fils, 1909.
- [16] Eringen A C. Linear theory micropolar elasticity [J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1966, 15: 909—923.
- [17] Stölken J S, Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale [J]. Acta Materialia, 1998, 46(14): 5109—5115.
- [18] Fleck N A, Hutchinson J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1993, 41(12): 1825—1857.