

文章编号: 1000-4750(2014)03-0045-07

基于厚板精化理论研究结构振动的模态控制方法

倪 博^{1,3}, 胡 超^{1,2}, 周传平¹

(1. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092; 2. 扬州大学建筑科学与工程学院, 扬州 225127; 3. 上海精密计量测试研究所, 上海 201109)

摘 要: 平板动力学与控制是工程结构设计中的重要研究课题。该文基于厚板弯曲振动的精确化方程, 采用 Hamilton 状态空间方法, 研究了平板结构的振动控制问题。通过满足平板两侧的自由边界条件以及两端的边界条件, 确定了悬臂厚板中的振动模态。而后, 采用独立模态控制方法, 对悬臂板条的振动控制策略进行了研究, 并把结果与基于 Mindlin 板理论计算得到的结果做了对比分析。最后, 对模态控制实施的数值结果做了进行了讨论。该文研究结果可望能在现代工程结构动力学分析和振动控制中得到应用。

关键词: 悬臂板结构; 平板振动精确化方程; 频散关系; 模态控制方法; 动力学与控制

中图分类号: TU391; TU392.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.10.0795

MODAL CONTROL OF PLATE VIBRATION BY REFINED THEORY OF THICK PLATES

NI Bo^{1,3}, HU Chao^{1,2}, ZHOU Chuan-ping¹

(1. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai, 200092, China;

2. College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou, 225127, China;

3. Shanghai Precision Metrology & Test Research Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: Dynamics of plates, as well as its vibration control, is an important research topic in the design of engineering structures. In this paper, based on Hamiltonian formulism using the refined dynamic equation of thick plates, the vibration control of plate structures is investigated. By satisfying the boundary conditions of plates, vibration modes of thick plates were obtained. The independent modal space control was applied to achieve the active vibration control of cantilever plates. The calculated results were compared with those based on Mindlin plate theory. The results were analyzed and discussed through a comparison with numerical simulations. The research results of this paper can be applied to the analysis of structural dynamics and vibration control in modern engineering.

Key words: cantilever plate; refined dynamic equation; dispersion relation; modal control; dynamics and control

经典薄板理论方程简单, 在工程结构分析中广泛应用^[1-4]。但是, 当研究厚板结构动力学时, 由于薄板理论的局限性会使分析计算结果有较大的误差。平板振动方程的精确性直接关系到结构响应和振动控制的计算结果和有效性^[5-8]。

20 世纪中期 Reissner^[9]运用广义余能变分原理推导了考虑剪切变形影响的板理论静力学方程, 即厚板理论。后来, Mindlin^[10]考虑了横向剪切变形和

转动惯量的影响, 给出了厚板振动的动力学方程^[11]。胡超等基于算子代数和算子谱以及规范场理论给出了厚板结构振动精确化动力学方程^[12]。

本文将基于厚板振动精确化方程, 采用 Hamilton 状态空间法, 对悬臂板振动控制问题进行研究。给出悬臂板结构振动控制的模态方法, 并对振动控制实施效果进行分析讨论。

收稿日期: 2012-10-26; 修改日期: 2013-01-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378451, 10572045); 航天创新科学研究基金项目(HTCX10)

通讯作者: 胡 超(1961—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 博士, 博导, 从事结构动力学与振动控制研究(E-mail: chaohu@tongji.edu.cn)。

作者简介: 倪 博(1986—), 男, 上海人, 博士生, 从事结构动力学、振动主动控制研究(E-mail: tongjinibo@yahoo.com.cn);

周传平(1985—), 男, 山东聊城人, 博士生, 从事弹性波散射与动应力集中研究(E-mail: zhouchuanping@126.com)。

1 平板弯曲振动的精确化方程

据文献[12]平板结构弯曲振动的动力学方程为:

$$D\nabla^2\nabla^2W - (2-\nu)DT_2^2\nabla^2W + CT_2^2W + \left(\frac{7}{8}-\nu\right)DT_2^4W = 0 \quad (1a)$$

$$\nabla^2f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} - T_2^2\right)f = 0 \quad (1b)$$

式中: C 、 D 分别为板的抗剪刚度和抗弯刚度,

$$C = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E、\nu \text{ 分别为弹性}$$

模量和 Poisson 比, h 为板厚; t 为时间; ∇^2 是

Laplace 算子, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $T_j^2 = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$,

($j=1,2$); c_1 、 c_2 分别为弹性纵波和横波波速,

$$c_1^2 = \frac{\lambda_M + 2\mu_M}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_M}{\rho}, \quad \rho \text{ 为密度; } \lambda_M、\mu_M$$

为材料的 Lamé 常数, $\lambda_M = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

$$\mu_M = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

不失一般性, 研究问题的稳态解, 设:

$$W = \tilde{W} e^{-i\omega t}, \quad F = \tilde{F} e^{-i\omega t}, \quad f = \tilde{f} e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

其中: ω 是板振动的圆频率; i 是虚数单位。为研究问题方便, 在以下分析中略去函数上的符号 \sim 。

由式(1a)可得频域内平板位移应满足的方程为:

$$\sigma_1 = \frac{\left[(\mu^2 + \lambda_1^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 (\mu^2 + \lambda_1^2) - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \cosh(\lambda_1 b)}{\left[(\mu^2 + \lambda_2^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 (\mu^2 + \lambda_2^2) - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \cosh(\lambda_2 b)},$$

则横向位移函数的表达式可描述为:

$$W = A_1 e^{\mu x} [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] \quad (8)$$

设平板宽度为 $2b$, 其两侧为自由边界条件:

$$M_y|_{y=b} = 0, \quad M_{xy}|_{y=b} = 0, \quad Q_y|_{y=b} = 0 \quad (9)$$

根据文献[10]中的广义内力表达式, 可得:

$$M_y = -D(1-\nu) \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] - \frac{1}{2} D\nu \times \left[(\nabla^2 + k_2^2)W + \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \nabla^2 W_j \right],$$

$$\prod_{j=1}^2 (\nabla^2 + \alpha_j^2)W = 0 \quad (3)$$

式中, α_j ($j=1,2$)是行波波数, 满足如下代数方程:

$$\alpha^4 - (2-\nu)k_2^2\alpha^2 - 6(1-\nu)k_2^4 \left(\frac{1}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{48} \frac{7-8\nu}{1-\nu} \right) = 0 \quad (4)$$

式中: $\kappa = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; $k_j^2 = \omega^2 / c_j^2$ ($j=1,2$), 此时相

应的广义位移势函数 $F(x, y)$ 可描述为:

$$F = \sum_{j=1}^2 F_j = \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1)W_j \quad (5)$$

其中: $(\nabla^2 + \alpha_j^2)W_j = 0$; δ_j ($j=1,2$)为位移势函数

$$\text{比例系数, } \delta_j = \frac{16 + 2(\alpha_j^2 - \kappa k_2^2)h^2}{8 + [(3-2\kappa)\alpha_j^2 - k_2^2]h^2}.$$

设平板中纵向振动的本征值为 μ , 而横向振动所对应弯曲模和剪切模的本征值分别为 λ 和 η 。此时结构内振动模式可描述为:

$$W = e^{\mu x} [A_1 \cosh(\lambda_1 y) + A_2 \cosh(\lambda_2 y)] \quad (6a)$$

$$f = A_3 e^{\mu x} \sinh(\eta y) \quad (6b)$$

式中, A_i ($i=1,2,3$)是振动模式系数。

将式(6a)代入到式(3)中, 可得如下代数方程式:

$$\sum_{j=1}^2 \left[(\mu^2 + \lambda_j^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 (\mu^2 + \lambda_j^2) - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] A_j \cosh(\lambda_j y) = 0 \quad (7)$$

引入组合参数:

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$Q_y = -C \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial W_j}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{1}{4} D \times \left\{ \nu (\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial W}{\partial y} + [(2-\nu)\nabla^2 + (1-\nu)k_2^2] \times \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial W_j}{\partial y} - (1-\nu)(\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \quad (10)$$

将式(10)代入到式(9)中,可得本征值的关系式:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

其中:

$$E_{1j} = \left[-D(1-\nu)(\delta_j - 1)\lambda_j^2 - \frac{1}{2}D\nu(\mu^2 + \lambda_j^2 + k_2^2) + (\delta_j - 1)(\mu^2 + \lambda_j^2) \right] \cosh(\lambda_j b), \quad j = 1, 2;$$

$$E_{13} = D(1-\nu)\eta^2 \sinh(\eta b);$$

$$E_{2j} = \left\{ C(2 - \delta_j) + \frac{1}{4}D\nu(\mu^2 + \lambda_j^2 + k_2^2) + \right.$$

$$\sigma_2 = \frac{\left[(\mu^2 + \lambda_1^2)^2 - \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 (\mu^2 + \lambda_1^2) - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \cos(\lambda_1 b)}{\left[(\mu^2 + \lambda_2^2)^2 - \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 (\mu^2 + \lambda_2^2) - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \cos(\lambda_2 b)}.$$

在相空间中广义位移与广义动量可分别取为 $\mathbf{q} = (W, \psi_x, \psi_y)^T$, $\mathbf{p} = (Q_x, -M_x, -M_{xy})^T$. 板两端分别给定广义位移和广义动量, 其变分式为:

$$\int_{-b}^b [(\delta \mathbf{p}^T)(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})]_{x=0} dy + \int_{-b}^b [(\delta \mathbf{q}^T)(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})]_{x=a} dy = 0 \quad (13)$$

由于广义动量和位移变分的任意性, 将状态向量 $\mathbf{v} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T]^T$ 代入到式(13)中, 可得代数方程:

$$B_1 + B_3 \alpha = 0 \quad (14a)$$

$$B_2 + B_4 \beta = 0 \quad (14b)$$

$$B_1 \sinh(\mu a) + B_2 \cosh(\mu a) + \gamma_1 [B_3 \sin(\mu a) - B_4 \cos(\mu a)] = 0 \quad (14c)$$

$$B_1 \cosh(\mu a) + B_2 \sinh(\mu a) - \gamma_2 [B_3 \cos(\mu a) + B_4 \sin(\mu a)] = 0 \quad (14d)$$

其中:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b) - \sigma_2 \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 b)}{\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \frac{1}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 b)},$$

$$\beta = \frac{(\delta_2 - 1)\mu \left[\frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b) - \frac{1}{\lambda_2} \sigma_2 \sin(\lambda_2 b) \right]}{(\delta_1 - 1)\mu \left[\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \frac{1}{\lambda_2} \sigma_1 \sinh(\lambda_2 b) \right]},$$

$$\gamma_1 = L_2 / L_1, \quad \gamma_2 = L_4 / L_3,$$

$$\frac{1}{4}D(\delta_j - 1)[(2-\nu)(\mu^2 + \lambda_j^2) + (1-\nu)k_2^2] \times$$

$$\lambda_j \sinh(\lambda_j b), \quad j = 1, 2;$$

$$E_{23} = \left[C - \frac{1}{4}D(1-\nu)(\mu^2 + \eta^2 + k_2^2) \right] \mu \sinh(\eta b);$$

$$E_{3j} = D(1-\nu)(\delta_j - 1)\mu \lambda_j \sinh(\lambda_j b), \quad j = 1, 2;$$

$$E_{33} = -\frac{1}{2}D(1-\nu)(\mu^2 - \eta^2) \sinh(\eta b).$$

平板结构弯曲振动的位移分量可写为:

$$W = [B_1 \cosh(\mu x) + B_2 \sinh(\mu x)][\cosh(\lambda_1 y) + \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] + [B_3 \cos(\mu x) + B_4 \sin(\mu x)] \cdot [\cos(\lambda_1 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_2 y)] \quad (12)$$

式中, $B_n (n=1, 2, 3, 4)$ 是模式系数;

$$L_1 = \mu \left\{ C(2 - \delta_1) + \frac{1}{4}D\{(\nu\mu^2 + k_2^2) + (\delta_1 - 1) \times [(2-\nu)\mu^2 + (1-\nu)k_2^2]\} \right\} \left[\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \frac{1}{\lambda_2} \sigma_1 \sinh(\lambda_2 b) \right] + \frac{1}{4} \mu D [\nu + (\delta_1 - 1)(2-\nu)] \times [\lambda_1 \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 b)],$$

$$L_2 = \mu \left\{ C(2 - \delta_2) + \frac{1}{4} \mu D \{(\nu\mu^2 - k_2^2) + (\delta_2 - 1) \times [(2-\nu)\mu^2 - (1-\nu)k_2^2]\} \right\} \left[\frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b) - \frac{1}{\lambda_2} \sigma_2 \sin(\lambda_2 b) \right] + \frac{1}{4} \mu D [\nu + (\delta_2 - 1)(2-\nu)] \times [\lambda_1 \sin(\lambda_1 b) - \sigma_2 \lambda_2 \sin(\lambda_2 b)],$$

$$L_3 = \left[\mu(1-\nu)(\delta_1 - 1) + \frac{1}{2} \nu (k_2^2 + \delta_1 \mu^2) \right] \times \left[\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \frac{1}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 b) \right] + \frac{1}{2} \nu \delta_1 [\lambda_1 \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 b)],$$

$$L_4 = \left[\mu(1-\nu)(\delta_2 - 1) + \frac{1}{2} \nu (k_2^2 + \delta_2 \mu^2) \right] \times \left[\frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b) - \sigma_1 \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 b) \right] +$$

$$\frac{1}{2}v\delta_2[\lambda_1 \sin(\lambda_1 b) - \sigma_2 \lambda_2 \sin(\lambda_2 b)]。$$

根据式(14), 整理可得如下关系式:

$$\alpha\beta + \gamma\delta + (\alpha\beta + \gamma\delta)\sinh(\mu a)\sin(\mu a) + (\alpha\gamma - \beta\delta)\cosh(\mu a)\cos(\mu a) = 0 \quad (15)$$

将式(3)、式(11)和式(15)联立, 可得振动的固有频率。平板弯曲振动的位移分量可描述为:

$$W = B\{\sigma_3\{\alpha \cosh(\mu x)[\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - \cos(\mu x)[\cos(\lambda_1 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_2 y)]\} + \beta \sinh(\mu x)[\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - \sin(\mu x)[\cos(\lambda_1 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_2 y)]\} \quad (16)$$

其中, $\sigma_3 = \frac{B_3}{B_4} = -\frac{\beta \cosh(\mu a) - \gamma \cos(\mu a)}{\alpha \sinh(\mu a) + \gamma \sin(\mu a)}$, B 是模

式系数。

这样, 平板结构的振动解可描述为:

$$W = Aq(t)\{[\sigma_3\alpha \cosh(\mu x) + \beta \sinh(\mu x)] \cdot [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - [\sigma_3 \cos(\mu x) + \sin(\mu x)][\cos(\lambda_1 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_2 y)]\} \quad (17)$$

式中, A 是平板振动的振幅。

2 悬臂板的模态坐标方程

将振动模态截断, 平板振动的位移可描述为:

$$W(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (18)$$

式中, W_{ij} 、 q_{ij} 分别为模态函数和模态坐标。

将式(18)代入到式(3), 可得如下方程:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \nabla^2 \nabla^2 W_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_2^2} \left[\frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} \nabla^2 + \frac{3}{4(1-\kappa)} \left(\frac{4}{h^2} - \frac{1}{6} \kappa k_2^2 - \frac{1}{2} k_2^2 \right) \right] W_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{ij} = 0 \quad (19)$$

其中, $W_{ij}(x, y)$ 应满足如下方程:

$$W_{ij} - \frac{1}{c_2^2} \left[\frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} \nabla^2 + \frac{3}{4(1-\kappa)} \left(\frac{4}{h^2} - \frac{1}{6} \kappa k_2^2 - \frac{1}{2} k_2^2 \right) \right] \omega_{ij}^2 W_{ij} = \bar{q}(x, y, t) \quad (20)$$

式中, ω_{ij} 为平板振动的固有频率。

根据结构振动振型的正交性, 振型函数应满足:

$$\iint_{\Omega} W_{r,s}^T W_{i,j} dx dy = \delta_{i,r} \delta_{j,s}, \quad i, j, r, s = 1, 2, \dots \quad (21)$$

最终平板的模态坐标方程为:

$$\frac{\partial^2 q_{i,j}(t)}{\partial t^2} + \omega_{i,j}^2 q_{i,j}(t) = f_{r,s}(t), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (22)$$

式中, $f_{r,s}(t)$ 为外扰力:

$$f_{r,s}(t) = \frac{1}{\delta_{i,r} \delta_{j,s}} \iint_{\Omega} W_{r,s}^T \bar{q}(x, y, t) dx dy$$

3 平板振动的独立模态控制

平板结构振动的状态空间描述为:

$$\ddot{q}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 q_{ij}(t) = f_{ij}(t) + u_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

其中, $u_{ij}(t)$ 为模态控制力:

$$u_{ij}(t) = \frac{1}{\delta_{i,r} \delta_{j,s}} \iint_{\Omega} U(x, y, t) W_{ij}(x, y) dx dy。$$

现在我们考虑对平板前 r 阶振动模态进行控制, 引入状态向量 $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{X}_C(t); \mathbf{X}_R(t)]$, 其中:

$$\dot{\mathbf{X}}_C(t) = \mathbf{A}_C \mathbf{X}_C(t) + \mathbf{B}_C \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_C \mathbf{f}_C(t) \quad (24)$$

其中:

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\omega}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2r \times 2r}; \quad \mathbf{B}_C = \mathbf{D}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{2r \times r}; \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \text{diag}[\omega_{ij}^2]_{r \times r} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{0}$ 和 \mathbf{I} 分别为零阵和单位阵, $\mathbf{u}(t)$ 和 $\mathbf{f}_C(t)$ 分别表示模态控制力和模态扰动力。可控性矩阵 $\text{rank}([\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B}]) = 2r$, 根据线性系统理论可知系统状态完全可控, 可以实现极点的任意配置。引入状态反馈, 取模态控制力 $\mathbf{u}(t)$ 为:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{X}_C(t) = -[\mathbf{g} \ \mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中, \mathbf{g} 、 \mathbf{h} 分别为模态控制的广义位移增益和广义速度增益。调节反馈增益 \mathbf{G} 可改变原振动系统的特征结构, 有效地提高系统的模态阻尼和刚度。

闭环系统受控部分的状态方程可写为:

$$\dot{\mathbf{X}}_C(t) = \tilde{\mathbf{A}}_C \mathbf{X}_C(t) + \mathbf{D}_C \mathbf{f}_C(t) \quad (27)$$

其中:

$$\tilde{\mathbf{A}}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\boldsymbol{\omega}^2 + \mathbf{g}) & -\mathbf{h} \end{bmatrix}_{2r \times 2r}; \quad \mathbf{D}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{2r \times r} \quad (28)$$

而对非受控模态部分, 其状态方程应为:

$$\dot{\mathbf{X}}_R(t) = \tilde{\mathbf{A}}_R \mathbf{X}_R(t) + \mathbf{D}_R \mathbf{f}(t) \quad (29)$$

式中:

$$\tilde{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\omega}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2(N-r) \times 2(N-r)}; \quad \mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{2(N-r) \times r} \quad (30)$$

由式(28)和式(30)可知,受控部分和未受控部分模态相互独立。

4 数值算例

取板长 a 为特征尺度,无量纲量取为: Poisson 比 $\nu = 0.30$; $b/a = 0.25$; $\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} / \omega_{11}$ ($i = j = 1, 2, \dots$)。表 1 给出了平板振动的前 6 阶无量纲固有频率。

表 1 基于平板精确化方程前 6 阶无量纲固有频率

Table 1 The first 6 dimensionless frequencies of plates by using the refined equation

模态阶数(i, j)	1(1,1)	2(1,2)	3(2,1)	4(2,2)	5(3,1)	6(3,2)	厚长比
固有频率(ω_{ij})	1.00	6.05	9.73	16.90	26.28	33.12	$h/a=0.01$
固有频率(ω_{ij})	1.00	5.66	9.09	15.77	24.74	30.93	$h/a=0.05$
固有频率(ω_{ij})	1.00	5.05	8.12	14.88	22.25	28.09	$h/a=0.075$

图 1~图 6 描述了分别采用 Mindlin 板理论和本文平板理论的悬臂板 5 前 6 阶频率响应。图 2、图 4 和图 6 为施加模态控制前后 Mindlin 板和本文板的前 6 阶频率响应。外扰位置为 $(x_d, y_d) = (0.20a, 0b)$, 测量动响应位置为 $(x_s, y_s) = (0.80a, 0b)$ 。

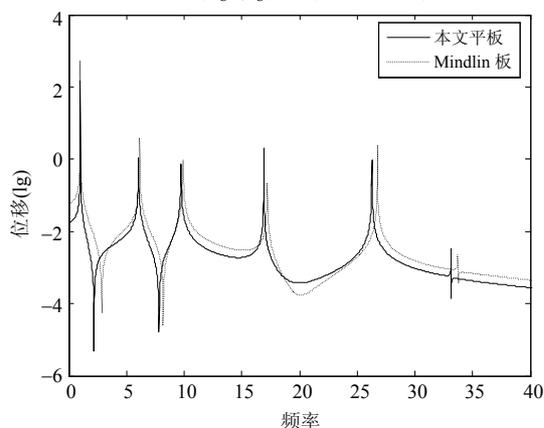


图 1 本文平板与 Mindlin 板的频率响应($h/a=0.01$)

Fig.1 Response of refined theory and Mindlin's plate

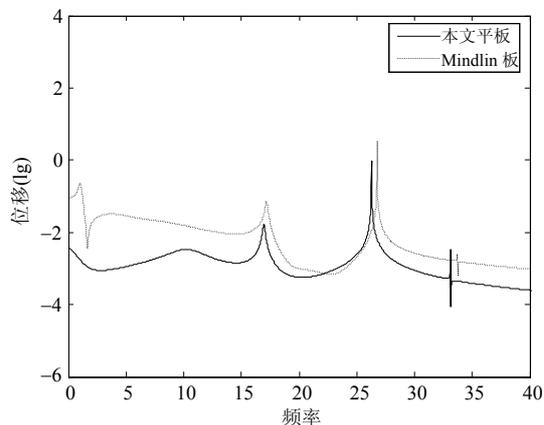


图 2 施加控制后本文板与 Mindlin 板频率响应($h/a=0.01$)

Fig.2 Response of refined theory and Mindlin's plate after modal control

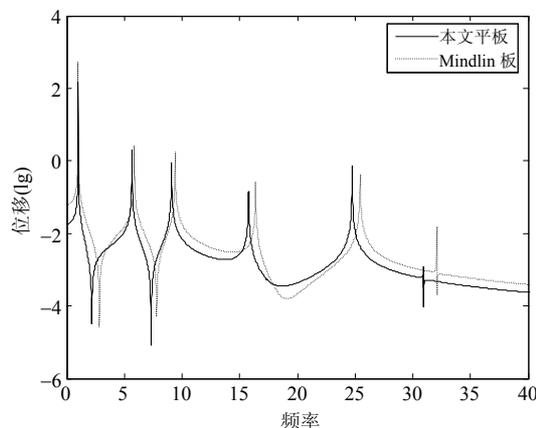


图 3 本文平板与 Mindlin 板的频率响应($h/a=0.05$)

Fig.3 Response of refined theory and Mindlin's plate

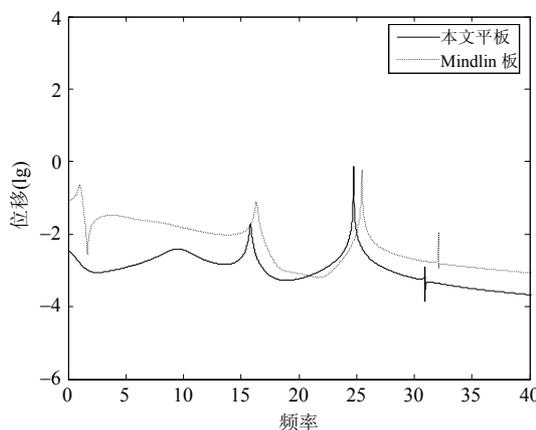


图 4 施加控制后本文板与 Mindlin 板频率响应($h/a=0.05$)

Fig.4 Response of refined theory and Mindlin's plate after modal control

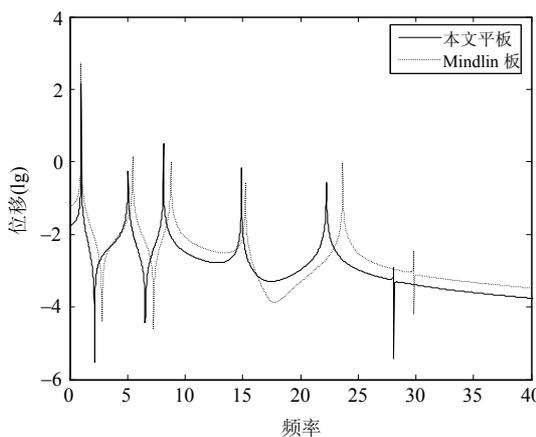


图 5 本文平板与 Mindlin 板的频率响应($h/a=0.075$)

Fig.5 Response of refined theory and Mindlin's plate

图 1 和图 2 的板厚长比取 $h/a = 0.01$; 图 3 和图 4 的板厚长比取 $h/a = 0.05$; 图 5 和图 6 的板厚长比取 $h/a = 0.075$ 。图 2、图 4 和图 6 各施加了 4 个模态控制力, 其作用位置为 $(x_{m1}, y_{m1}) = (0.20a, 0b)$ 、 $(x_{m2}, y_{m2}) = (0.50a, 0b)$ 、 $(x_{m3}, y_{m3}) =$

$(0.75a, 0b)$ 和 $(x_{m4}, y_{m4}) = (1.00a, 0b)$ 。由图 1、图 3 和图 5, 及图 2、图 4 和图 6 分别比较可知, 在低频和较小的厚长比情况下, Mindlin 板和本文基于精确化理论的平板是非常接近的; 而在高频或较大的厚长比情况下, Mindlin 板和本文平板差别比较大。本文基于精确化理论的平板模型的频率响应较 Mindlin 板模型有减小的现象, 减小数值随着厚长比和频率阶数的增大而增大。由图 2、图 4 和图 6 可知, 模态控制以后, 基于精确化理论的平板的低阶频率响应曲线比 Mindlin 板理论的平板曲线平滑, 位移数值也较小, 控制效果较好; 中频阶段的曲线基本吻合; 高频阶段的频率响应值有前移现象。

图 7~图 9 描述了厚长比取 $h/a = 0.01$, 不同外扰位置和动响应位置下施加模态控制前后的基于精确化理论的悬臂板结构的频率响应。

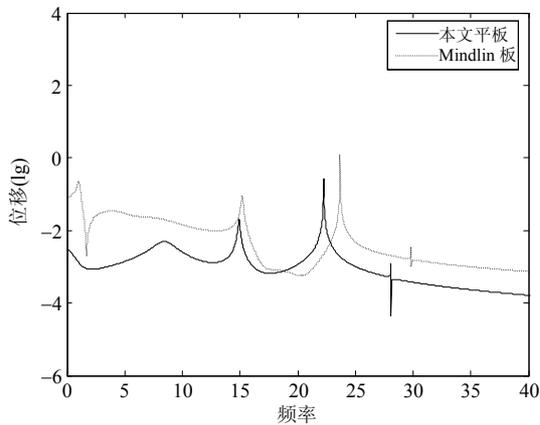


图 6 施加控制后本文板与 Mindlin 板频率响应($h/a=0.075$)
Fig.6 Response of refined theory and Mindlin's plate after modal control

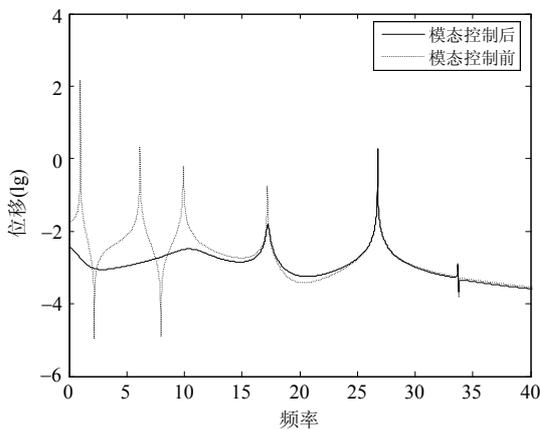


图 7 模态控制前后本文平板的频率响应
Fig.7 Frequency response of refined theory plate before and after modal control

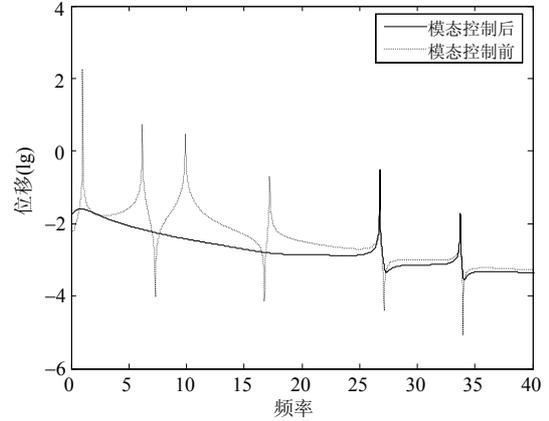


图 8 模态控制前后本文平板的频率响应
Fig.8 Frequency response of refined theory plate before and after modal control

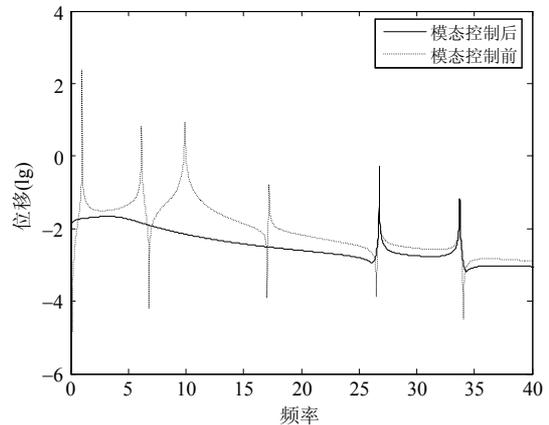


图 9 模态控制前后本文平板的频率响应
Fig.9 Frequency response of refined theory plate before and after modal control

图 7 的外部扰动位置为 $(x_d, y_d) = (0.15a, 0b)$, 测量动响应位置为 $(x_s, y_s) = (0.80a, 0b)$, 施加了 4 个模态控制力, 其作用位置分别为 $(x_{m1}, y_{m1}) = (0.20a, 0b)$ 、 $(x_{m2}, y_{m2}) = (0.50a, 0b)$ 、 $(x_{m3}, y_{m3}) = (0.75a, 0b)$ 和 $(x_{m4}, y_{m4}) = (1.00a, 0b)$ 。图 8 和图 9 的外部扰动、测量动响应和模态控制力的 y 坐标分别为 $0.50b$ 和 $1.00b$, 其余数据同图 7。

从图 7~图 9 可以看出, 独立模态控制可以很好的对结构的低阶模态进行控制, 具有很好的独立性, 但是对系统的高阶模态, 控制效果不是很明显, 未受控模态依然存在急剧的响应。对于选取不同的控制力、外扰力和测量动响应的位置, 控制效果也有所不同。

4 结论

本文基于平板弯曲振动的精确化方程, 采用 Hamilton 状态空间方法, 研究了悬臂厚板的振动控

制问题。得到了板中波模频散方程，给出了悬臂板振动的模态解，并对悬臂厚板振动的模态控制进行了数值模拟，在频域内将本文结果和基于 Mindlin 板理论的结果做了对比。

结果表明：

(1) 在未实施控制条件下，在低频段基于 Mindlin 板和本文的数值结果基本一致，但在高频段以及大厚度情况下，差别还是比较明显的；

(2) 施加模态控制后，本文理论下的频率响应在低频阶段的位移曲线较低且更加平滑，更好地刻画了控制效果，在高频阶段，频率响应曲线较基于 Mindlin 板理论结果有前移现象，在控制效果和工作范围等方面显示了不同。独立模态控制对结构振动有优良的控制效果，并具有很好的独立性。

文献[10]中给出的平板弯曲振动精确化方程是不基于任何工程假设推导得到的，其分析计算结果更加精确，其控制效果更符合实际。本文给出的平板振动分析及其数值结果可望能在工程结构的振动分析与控制策略设计中得到应用。

参考文献：

- [1] 马兴瑞, 苟兴宇, 李铁寿, 等. 航天器动力学发展概况[J]. 宇航学报, 2000, 21(3): 1—5.
Ma Xingrui, Gou Xingyu, Li Tieshou, et al. Development generalization of spacecraft dynamics [J]. Journal of Astronautics, 2000, 21(3): 1—5. (in Chinese)
- [2] 胡超, 陈涛, 黄文虎. 基于行波与模态的混合方法对 Timoshenko 梁进行振动主动控制[J]. 航空学报, 2007, 28(2): 301—308.
Hu Chao, Chen Tao, Huang Wenhui. Active vibration control of Timoshenko beam based on hybrid wave/mode method [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2007, 28(2): 301—308. (in Chinese)
- [3] 郑荣跃, 黄炎, 廖一寰. 混合边界矩形板的自由振动分析[J]. 工程力学, 2008, 25(8): 13—14.
Zheng Rongyue, Huang Yan, Liao Yihuan. Free vibration analysis of rectangular plates with mixed boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(8): 13—
- [4] 赵芝梅, 王敏庆. 板壳结构振动功率流的子结构线导纳法研究[J]. 工程力学, 2012, 29(8): 297—307.
Zhao Zhimei, Wang Mingqing. A structure line receptance method for analysis of power flow in a cylindrical shell with a floor partition [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(8): 297—307. (in Chinese)
- [5] Irie T, Yamada G, Aomura S. Free vibration of a Mindlin annular plate of varying thickness [J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 66(2): 187—197.
- [6] Vemula C, Norris A N. Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory [J]. Wave Motion. 1997, 26(1): 1—12.
- [7] 胡超, Ma Fai, 马兴瑞, 黄文虎. 厚板弯曲与拉伸振动精化理论及其求解新途径[J]. 中国科学, 天文学、物理、力学, 2012, 42(5): 522—530.
Hu Chao, Ma Fai, Ma Xingrui, Huang Wenhui. Refined dynamic theory of thick plates in extension-bending and its new formulism [J]. Science China series G Physics Mechanics Astronomy, 2012, 42(5): 522—530. (in Chinese)
- [8] Ni B, Hu C. Dynamics of the Mindlin Plate and Its Modal Vibration Control [J]. Journal of Vibration and Control, 2012, 18(13): 2039—2049.
- [9] Reissner E. On the theory of transverse bending of elastic plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 1976, 12(8): 545—554.
- [10] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1951, 18(2): 31—38.
- [11] Hu C, Chen T, Han G, et al. Flexural wave propagation and localized vibration in narrow Mindlin's plate [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 306(3/4/5): 389—399.
- [12] 胡超, Ma Fai, 马兴瑞, 黄文虎. 平板弯曲自由振动的精确化动力学方程及其分析[J]. 中国科学, 天文学、物理、力学, 2011, 41(6): 781—790.
Hu Chao, Ma Fai, Ma Xingrui, Huang Wenhui. Refined dynamic equations of the plate bending without any assumptions [J]. Science China series G Physics Mechanics Astronomy, 2011, 41(6): 781—790. (in Chinese)