参数振动系统响应的频谱成分及其分布规律[1)]

王建军[2)] 韩勤锴 李其汉
(北京航空航天大学能源与动力工程学院，北京 100191)

摘要 采用 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开方法分别研究了参数振动系统自由响应和强迫响应的频谱特性 (频谱成分及其分布规律)，讨论了系统稳定性和阻尼对于频谱幅值的影响，并给出了系统外激励共振条件. 理论研究结果表明：由于参数激励作用使得系统响应具有多频特点，这些频谱成分与系统固有频率、参数激励频率和外激励频率具有密切联系，而且其在频域分布也呈现出一定的规律. 此外，参数振动系统具有多个外激励共振点，除了外激励频率等于系统固有频率将发生共振外，当外激励频率等于系统固有频率和参数激励频率的组合值时，同样将发生外激励共振现象.

关键词 参数振动系统，自由和强迫响应，频谱成分，外激励共振， Sylvester 理论

中图分类号： TH113.1, TB532 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2010)03-0535-06

引 言

由于系统参数 (刚度、质量和阻尼) 的周期时变性，许多机械系统的动态特性可以采用含周期系数的二阶微分方程 (组) 描述，这些系统在力学上被称为参数振动系统. 许多工程问题如：齿轮系统、板壳动力稳定性、不对称或带裂纹转子系统、变速旋转的梁以及盘片系统、弹性电机的机电耦联振动、直升机以及风力发电机等的旋翼动力系统气弹稳定性、高速机构动力系统、弹性轨道上的磁悬浮列车动力控制系统、轴向移动系统 (移动弦、移动梁和移动带等) 的纵向振动、由桥面振动激励引发的斜拉桥桥索振动等通过线性简化后均可以转化为线性参数振动问题. 目前，对于这方面的研究可以参考文献 [1-2]，另外专著 [3-4] 对参数振动的现象和机理进行了深入的讨论.

研究系统在不同激励条件的强迫响应是参数振动问题的重要方面之一. 研究者提出了许多适用于参数振动系统响应求解的方法. 现有的方法主要有：摄动法 [3-5]；数值时间积分方法 (如中心差分法、龙格 - 库塔法和 Newmark 法等)；其他一些用于参数振动系统的数值方法 [6-8]；基于 Fourier 级数展开的方法 (主要有：Ritz 平均法 [9] 和 Galerkin 方法 [10])；谱方法 (包括迭代谱方法 [11] 和直接谱方法 [12])；模态方法 [13] 等. 从上述文献可以看出，人们将主要精力用于提出求解系统时域响应的方法，而系统响应中的频谱成分及其在频域内的分布状况 (即频谱特性) 却并未得到充分的重视. 事实上，研究参数振动系统的频谱特性，不仅有助于深入了解系统的固有振动特性，而且还可以作为系统故障诊断和状态检测的重要指标. 因此，本文将主要讨论系统响应的频谱特性.

众所周知，对于一般线性振动系统，响应频谱通常仅含有外激励频率和系统固有频率 (不考虑阻尼情况下)；但是，在考虑参数激励时却并非如此. 王建军等 [14-16] 在深入探讨齿轮系统非线性振动特性的基础上，采用数值仿真方法得到了单自由度齿轮系统参数振动响应的频谱 [17-18]，发现即使在外激励为零时，单频参数激励也将导致多频响应；在裂纹转子系统动态特性分析中 [19]，系统稳态响应频谱中含有以参数激励频率为间隔分布的次谐频率成分，而这一点也与文献 [20] 结果吻合； Deolasi 等 [21] 采用实验研究了周期拉力作用下板的参数振动响应，从实验结果可以看出，除了板的固有频率和参数激励频率外，在板的主参数共振和联合参数共振响应中还含有其他一些频谱成分. 从上述文献可以看出，目前人们主要采用数值或实验的方法揭示了参数振动系统的多频响应特性. 因此，需要从理论角度综

2008–11–12 收到第 1 稿， 2009–04–13 收到修改稿.
1) 国家高技术研究发展计划 (863) 资助项目 (2008AA04Z403).
2) E-mail: wangjianjun@buaa.edu.cn

合讨论系统响应的频率成分，以及它们在频域内的分布情况.

本文安排如下：首先，采用状态转移矩阵 (state transition matrix, STM) 表示线性参数振动系统的自由响应和强迫响应 [22]；进而利用矩阵谱分解中常用的 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开理论将 STM 展开为级数形式 [23]，通过一定的积分和代数运算求解系统自由响应和强迫响应的频谱成分；在此基础上，讨论系统稳定性和阻尼对于响应频谱幅值的影响情况，并寻求系统外激励共振条件；最后，给出本文的一些结论.

1 单自由度参数振动系统的时域响应

考虑线性单自由度系统在周期参数和周期外力共同激励下的响应. 周期参数激励是通过周期时变刚度引入的；由于是线性系统，通常只考虑外激励为谐波形式. 因此，系统的振动微分方程可以表示为如下无量纲形式

$$\ddot{x}+2\zeta\dot{x}+[1+\mu p(\bar{\omega}\tau)]x=\cos(\omega\tau) \tag{1}$$

其中， $\tau=\Omega t$, $\zeta=c/(2m\Omega)$ 和 $\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, 且 $\Omega^2=k/m$. m, c 和 k 分别表示系统质量、阻尼和平均刚度. 若忽略参数激励， Ω 为系统的平均固有频率. $\bar{\omega}$ 和 ω 分别为无量纲内部和外部激励频率. $p(\bar{\omega}\tau)$ 为零均值周期函数，且 $p(\bar{\omega}\tau)=p[\bar{\omega}(\tau+\bar{T})]$. $\bar{T}$ 为参数激励周期，有 $\bar{T}=2\pi/\bar{\omega}$. μ 表示参数激励的幅值.

引入状态向量 $\boldsymbol{X}(\tau)=[x(\tau)\quad \dot{x}(\tau)]^{\mathrm{T}}$, 式 (1) 可以变换为状态空间方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)=\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau) \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{G}(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -[1+\mu p(\bar{\omega}\tau)] & -2\zeta \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F}(\tau)=[0\quad \cos(\omega\tau)]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{F}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}) \tag{4}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{F}}=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$. 依据相关理论 [24]，分别得到系统的自由响应 $\boldsymbol{X}_C(\tau)$，以及不考虑初始状态的强迫响应 $\boldsymbol{X}_F(\tau)$ 的表达式为

$$\boldsymbol{X}_C(\tau)=\boldsymbol{W}(\tau)\boldsymbol{W}^{-1}(0)\boldsymbol{X}(0) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{X}_F(\tau)=\int_0^{\tau}\boldsymbol{W}(\tau)\boldsymbol{W}^{-1}(\eta)\boldsymbol{F}(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{W}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{W}^{-1}(\cdot)$ 分别为 Wronskian 矩阵及其逆矩阵. Wronskian 矩阵元素是齐次系统 (即 $\boldsymbol{F}(\tau)=0$) 的基本解或通解. 由于系统的两个基本解向量是线性无关的，那么该矩阵是非奇异的，即 $\boldsymbol{W}^{-1}(\cdot)$ 是存在的.

定义时间间隔 $(0,\tau)$ 和 (η,τ) 内的状态转移矩阵 (STM) 分别为： $\boldsymbol{\varPhi}(\tau,0)=\boldsymbol{W}(\tau)\boldsymbol{W}^{-1}(0)$, $\boldsymbol{\varPhi}(\tau,\eta)=\boldsymbol{W}(\tau)\boldsymbol{W}^{-1}(\eta)$. 那么，式 (5) 和式 (6) 可以 STM 积分形式重新表示为

$$\boldsymbol{X}_C(\tau)=\boldsymbol{\varPhi}(\tau,0)\boldsymbol{X}(0) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{X}_F(\tau)=\int_0^{\tau}\boldsymbol{\varPhi}(\tau,\eta)\boldsymbol{F}(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{8}$$

明显地，一旦状态转移矩阵确定，则系统的自由和强迫响应均可以根据式 (7) 和式 (8) 求得. 在下面一节将主要介绍用于分析系统频谱特性的 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开方法.

2 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开方法

在一个参数周期 $(0,\bar{T})$ 内的状态转移矩阵称之为离散状态转移矩阵 (Discrete STM, DSTM). 根据周期系统的 Floquet 理论 [25]， DSTM 是一个常数矩阵，并且 STM 可以分解为 1 个周期矩阵和 1 个指数矩阵的乘积

$$\boldsymbol{\varPhi}(\tau,\eta)=\boldsymbol{P}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{\varGamma}(\tau-\eta)}\boldsymbol{P}^{-1}(\eta) \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\varGamma}$ 为常值矩阵，其与 DSTM 之间的关系为： $\boldsymbol{\varGamma}=\dfrac{1}{\bar{T}}\ln[\boldsymbol{\varPhi}(\bar{T},0)]$. $\boldsymbol{P}(\tau)$ 为非奇异周期矩阵，有 $\boldsymbol{P}(\tau+\bar{T})=\boldsymbol{P}(\tau)$, $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}$. 那么 $\boldsymbol{P}^{-1}(\eta)$ 也为非奇异的周期矩阵. 利用 Fourier 级数展开法可将上述与 STM 相关的周期矩阵表示为级数形式为

$$\boldsymbol{P}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{P}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\bar{\omega}\tau} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\eta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{P}}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\bar{\omega}\eta} \tag{11}$$

为了通过积分和代数运算推导出系统响应的一般形式，这里需要引入 Sylvester 理论. Pipes[23] 对该理论进行了扩展并将其用于矩阵乘法中. 这里，主要利用该理论将含有矩阵 $\boldsymbol{\varGamma}$ 的指数矩阵分解为更有用的级数形式. 根据 Sylvester 理论

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\varGamma}\tau}=\sum_{r=1}^{2}\mathrm{e}^{\mu_r\tau}\boldsymbol{Z}_r \tag{12}$$

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\Gamma}\eta}=\sum_{l=1}^{2}\mathrm{e}^{-\mu_l\eta}\boldsymbol{Z}_l \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_r=\frac{\prod\limits_{s=1,s\neq r}^{2}(\mu_s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma})}{\prod\limits_{s=1,s\neq r}^{2}(\mu_s-\mu_r)}\quad(r=1,2)$$

$$\boldsymbol{Z}_l=\frac{\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{2}(\mu_s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma})}{\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{2}(\mu_s-\mu_l)}\quad(l=1,2)$$

式中，μ_1 和 μ_2 为一对共轭复常数，是矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的特征值，在参数振动系统中又称为特征指数．因此，利用 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开法可以将与 STM 相关的周期矩阵和指数矩阵分别表示为级数形式，为后面推导系统自由响应和强迫响应频谱奠定基础．

3 系统响应的频谱表述

3.1 自由响应频谱

本节主要分析参数振动系统自由响应的频谱特性．令式 (9) 中 $\eta=0$，则 $\boldsymbol{\Phi}(\tau,0)=\boldsymbol{P}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Gamma}\tau}$．将式 (10) 和式 (12) 代入式 (9), 进而代入式 (7), 可以得到系统的自由响应 $\boldsymbol{X}_C(\tau)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_C(\tau)=\boldsymbol{P}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Gamma}\tau}\boldsymbol{X}(0)=\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{P}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\bar{\omega}\tau}\sum_{r=1}^{2}\mathrm{e}^{\mu_r\tau}\boldsymbol{Z}_r\boldsymbol{X}(0)=\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{2}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_r\boldsymbol{X}(0)\mathrm{e}^{(\mathrm{j}n\bar{\omega}+\mu_r)\tau}\end{aligned} \tag{14}$$

由于 μ_r 为复常数，则可以表示为 $\mu_r=\mathrm{Re}(\mu_r)+\mathrm{jIm}(\mu_r)$．因此上式可以改写为

$$\boldsymbol{X}_C(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{2}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_r\boldsymbol{X}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mu_r)\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[n\bar{\omega}+\mathrm{Im}(\mu_r)]\tau} \tag{15}$$

根据 Johnson 等 [26-28] 的研究成果, 周期系统的特征指数虚部的绝对值等于系统的固有频率 (用 ω_d 表示)．那么，从式 (15) 可以得到系统自由响应的频谱为

$$f_n^c=|\omega_d+n\bar{\omega}|\quad(n=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots) \tag{16}$$

从上式可以看出, 在初始条件作用时, 参数振动系统的自由响应中含有无穷多频率成分，其中一个等于系统固有频率 ($n=0$)，其他的频谱可以认为是系统固有频率和参数激励频率的组合 ($n\neq 0$)．另外，这些频谱成分在频域内的分布规律可以描述为 [17]：位于固有频率处的响应谱线 (f_0^c) 称之为主谐谱线，其余谱线分别为超谐谱线 (f_n^c, $n>0$) 和次谐谱线 (f_n^c, $n<0$)．对于超谐谱线，以主谐谱线为起点沿频率轴向右以参数激励频率 $\bar{\omega}$ 为间隔分布；而次谐谱线则向左以同样的间隔分布．由于实际频率值不能为负，那么该组频线在遇到零频轴线时, 将会被反射，转而向右分布，间隔保持不变．上述频谱分布规律将对实际系统的状态检测和故障诊断具有一定的指导意义．

从式 (15) 还可以看出响应频率的幅值是由与时间相关指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mu_r)\tau}$ 确定的．如果系统两个特征指数中任一个具有正实部，根据周期系统稳定性理论，此时系统处于不稳定状态，那么自由响应频谱幅值将随时间呈指数增长．若系统稳定且不考虑阻尼时，特征指数为纯虚数，意味着频谱幅值是恒定的且不随时间变化．然而，实际系统中通常是存在阻尼的，对于处于稳定边界的周期系统，两个特征指数仍有一个实部等于零，此时系统具有周期的自由响应 [29], 相应的频谱幅值是不变的；对于稳定非边界的周期系统，其特征指数的实部均是小于零的，在这种情况下响应频谱幅值将随时间衰减至零．

3.2 强迫响应频谱

本节主要讨论强迫响应的频谱特性．将式 (4) 和式 (9) 代入式 (8)，并用式 (10)∼ 式 (13) 的级数形式替代式 (9) 中的矩阵，则强迫响应 $\boldsymbol{X}_F(\tau)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_F(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{2}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_r\mathrm{e}^{(\mu_r+\mathrm{j}n\bar{\omega})\tau}\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{[-\mu_l+\mathrm{j}(\omega+m\bar{\omega})]\tau}-1}{-\mu_l+\mathrm{j}(\omega+m\bar{\omega})}\right\}+\\ \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{2}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_r\mathrm{e}^{(\mu_r+\mathrm{j}n\bar{\omega})\tau}\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{\boldsymbol{F}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{[-\mu_l+\mathrm{j}(-\omega+m\bar{\omega})]\tau}-1}{-\mu_l+\mathrm{j}(-\omega+m\bar{\omega})}\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

引入两个关系 $\boldsymbol{Z}_r\boldsymbol{Z}_l=0(r\neq l)$ 和 $\boldsymbol{Z}_l^2=\boldsymbol{Z}_l$, 将式 (17) 简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_F(\tau)=&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{\boldsymbol{F}}}{-\mu_l+\mathrm{j}(\omega+m\bar{\omega})}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega+(n+m)\bar{\omega}]\tau}+\\&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{\boldsymbol{F}}}{-\mu_l+\mathrm{j}(-\omega+m\bar{\omega})}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[-\omega+(n+m)\bar{\omega}]\tau}-\\&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{\boldsymbol{F}}}{-\mu_l+\mathrm{j}(\omega+m\bar{\omega})}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mu_l)\tau}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\mathrm{Im}(\mu_l)+n\bar{\omega}]\tau}-\\&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{Z}_l\tilde{\boldsymbol{P}}_m\bar{\boldsymbol{F}}}{-\mu_l+\mathrm{j}(-\omega+m\bar{\omega})}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mu_l)\tau}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\mathrm{Im}(\mu_l)+n\bar{\omega}]\tau}\end{aligned}\tag{18}$$

上式是采用级数方式表示参数激励系统强迫响应的一般形式，从式 (18) 可以看出，在谐波外激励作用时，参数振动系统的强迫响应中同样含有无穷多频率成分．令 $i=n+m$, 这些频谱成分可以分两组表示为

$$\left.\begin{aligned}&f_i^s=|\omega+i\bar{\omega}|\,,\quad i=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots\\&f_n^a=|\omega_d+n\bar{\omega}|\,,\quad n=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

可以看出，其中一组频率 f_i^s 是与外激励频率 ω 有关的，而另一组频率 f_n^a 则是与系统固有频率 ω_d 有关的．频率组 f_n^a 的分布规律与自由响应时的频谱分布相似，这里不再重复；另外一组频谱 f_i^s 的分布特点是：该组频谱的中心可以认为是外激励频率处 (f_0^s)，其余谱线则以此为起点分别向左向右分布，向右分布的谱线的间隔为参数激励频率 $\bar{\omega}$; 向左分布的谱线，则在碰到零频轴线时被反射进而向右分布，其间隔仍然为参数激励频率．

式 (19) 确定了参数振动系统在谐波激励下的响应频谱，下面将根据式 (18) 分析这两组频率的幅值随系统参数的变化情况．对于频率组 f_n^a, 如式 (18) 右端后两项所示，与自由响应频谱的情况类似，由于其幅值含有时间指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mu_l)\tau}$, 其幅值同样是与系统稳定性密切联系的．因此，若系统处于不稳定状态 ($\mathrm{Re}(\mu_l)>0$), 则该组频率幅值将随时间不断放大，出现参数共振现象；当系统稳定且无阻尼时 ($\mathrm{Re}(\mu_l)=0$), 在其他参数确定的情况下，该组频率幅值为恒定的有限值．若考虑阻尼时，对于稳定边界上的系统, 必然存在一个实部为零的特征指数 [29], 此时这组频率将不随时间变化；对于稳定区域内的系统，由于 $\mathrm{Re}(\mu_l)<0$, 这组频率的幅值将随时间而指数衰减.

对于频率组 f_i^s，如式 (18) 右端前两项所示，该频率的幅值是与时间无关的. 但是, 若式中分母为零时，该组频率的幅值将为无穷大，即系统参数满足

$$-\mu_l+\mathrm{j}(\pm\omega+m\bar{\omega})=0\tag{20}$$

时，将出现外激励共振现象，此时该组的频率和幅值理论上都将为无穷大．将 $\mu_l=\mathrm{Re}(\mu_l)+\mathrm{jIm}(\mu_l)$ 和 $\omega_d=|\mathrm{Im}(\mu_l)|$ 代入上式，上述条件等效于如下两个条件

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\mu_l)=0,\qquad l=1,2\\&\omega=|\omega_d+m\bar{\omega}|,\quad m=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

式 (21) 所表示的外激励共振条件为：与线性时不变系统类似的是，当外激励频率等于系统固有频率 ($m=0$) 时，系统将发生的外激励引起的共振；而不同的是，当外激励频率等于系统固有频率和参数激励频率的组合值 ($m\neq0$) 时，系统同样会出现外激励共振．这是参数振动系统的特殊之处，即存在多个外激励共振点.

实际中通常是存在阻尼的，对于处于稳定边界的系统，存在实部为零的特征指数，此时式 (21) 仍然是满足的，那么系统的共振响应将随时间不断放大，意味着阻尼并不能将系统的共振响应限制在一定范围之内，这也是参数振动系统的特殊之处.

对于稳定且非边界的系统，系统特征指数的实部均是小于零的，此时式 (21) 的第 1 个条件是不满足的．那么，当外激励频率满足上述条件时，该频率组的幅值为最大值，而不能达到无穷值，说明考虑阻尼时，系统的共振响应幅值将先增加而后稳定在一个较高的幅值范围内，这是与线性时不变系统相似的.

以上分析并讨论参数振动系统强迫响应的频谱特性，并得到了系统的外激励共振条件．上述的部

分分析结果与数值仿真结果 [17] 符合得很好，由于篇幅限制，其它的数值结果将另文发表.

4 结　论

采用矩阵谱分解中常用的 Sylvester 理论和 Fourier 级数展开方法，研究了参数振动系统自由响应和谐波激励下的强迫响应的频谱特性，并得到了系统的外激励共振条件．正是参数激励的作用，使得单自由度参数振动系统响应含有多种频率成分，即使在外激励为零的情况 (自由响应)．这些频率成分与系统固有频率、参数激励频率和外激励频率具有密切的联系．其在频域的分布规律可以描述为：

(1) 对于自由响应，其主谐谱线为系统固有频率，超谐和次谐谱线以主谐谱线为起点分别沿频率轴向右、向左以参数激励频率为间隔进行分布．对于向左分布的次谐谱线，在遇到零频轴线时，将被反射转而向右分布，频率间隔保持不变；

(2) 对于强迫响应，其频谱成分可以分为两组：一组与系统固有频率有关；另一组则与外激励频率有关．前者的分布规律与自由响应频谱分布情况类似；后者的分布规律可以总结为：中心频率为外激励频率，其余频谱则以中心频率为起点分别向右、向左以参数频率为间隔分布；对于向左分布的频谱，在遇到零频轴线时，将同样被反射转而向右分布，频率间隔保持不变.

此外，参数振动系统具有多个外激励共振区，除了外激励频率等于系统固有频率将发生共振外，当外激励频率等于系统固有频率与参数激励频率的组合值时，同样将出现外激励共振现象．考虑阻尼使得处于稳定区域内的系统的共振响应削弱为稳态响应；但对于处于稳定边界的系统，若发生外激励共振，即使阻尼存在，系统的响应幅值仍然不断增大.

参　考　文　献

1 Ibrahim RA. Parametric vibration-part III: current problems (1). *The Shock and Vibration Digest*, 1978, 10(3): 41-57

2 Ibrahim RA. Parametric vibration-part III: current problems (2). *The Shock and Vibration Digest*, 1978, 10(4): 19-47

3 Bolotin VV. Dynamic Stability of Elastic Systems. San Francisco: Holden-Day, 1964

4 Yakubovitch VA, Starzhinskii VM. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. Vols I and II. New York: John Wiley, 1975

5 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley, 1979

6 Hsu CS. On approximating a general linear periodic system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, 45: 371-378

7 Farhang K, Midha A. Steady-state response of periodically time-varying linear systems with application to an elastic mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1995, 117: 633-639

8 Selstad TJ, Farhang K. On efficient computation of the steady-state response of linear systems with periodic coefficients. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, 118: 522-526

9 Benton M, Seireg A. The application of the Ritz averaging method to determining the response of systems with time varying stiffness to harmonic excitation. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1980, 102: 384-390

10 David JW, Mitchell LD, Daws JW. Using transfer matrices for parametric system forced response. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 1987, 109: 356-360

11 Perret-Liaudet J. An original method for computing the response of a parametrically excited forced system. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 196(2): 165-177

12 Deltombe R, Moraux D, Plessis G, et al. Forced response of structural dynamic systems with local time-dependent stiffnesses. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 237(5): 761-773

13 Wu WT, Wickert JA, Griffin JH. Modal analysis of the steady state response of a driven periodic linear system. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182: 297-308

14 李润方，王建军．齿轮系统动力学．北京：科学出版社， 1997 (Li Runfang, Wang Jianjun. Geared System Dynamic: Vibration, Shock and Noise. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese))

15 Wang JJ, Li RF, Peng XH. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, 56 (3): 309-329

16 王建军，李其汉，李润方．齿轮系统非线性研究进展．力学进展，2005, 35(1): 37-51 (Wang Jianjun, Li Qihan, Li Runfang. Research advances for nonlinear vibration of gear transmission systems. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(1): 37-51 (in Chinese))

17 王建军，高雄兵，李其汉．单自由度参数振动系统非线性响应的若干特征．应用力学学报，2003, 20(2): 147-151 (Wang Jianjun, Gao Xiongbing, Li Qihan. Some characteristics of nonlinear response for single-degree-of-freedom of parametric vibration system. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2003, 20(2): 147-151 (in Chinese))

18 Han QK, Wang JJ, Gao XB, et al. Characteristics of frequency-domain response for the parametric vibration of spur gear pair system. In: Qin DT, ed. Proceedings of International Conference on Mechanical Transmission (ICMT). Beijing: Science Press, 2006. 1256-1261

19 Sekhar AS, Prasad PB. Dynamic analysis of a rotor system considering a slant crack in the shaft. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208(3): 457-474

20 Ichimonji M, Watanabe S. The dynamics of a rotor system with a shaft having a slant crack (a qualitative analysis using a simple rotor model). *Japan Society of Mechanical Engineers, International Journal*, 1988, 31(4): 712-718

21 Deolasi PJ, Datta PK. Experiments on the parametric vibration response of plates under tensile loading. *Experimental Mechanics*, 1997, 37(1): 56-61

22 D'Angelo H. Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis. Boston: Allyn & Bacon, 1970

23 Pipes LA. Applied Mathematics for Scientists and Engineers. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1958

24 Barbashin EA. Introduction to the Theory of Stability. Netherlands: Wolters-Noordhoff, 1970

25 Richards JA. Analysis of Periodically Time Varying Systems. New York: Springer-Verlag, 1983

26 Johnson W. Helicopter Theory. New York: Princeton University Press, 1980

27 Peters DA, Hohenemser KH. Application of the Floquet transition matrix to problems of lifting rotor stability. *Journal of the American Helicopter Society*, 1971, 16(2): 25-33

28 Dugundji J, Wendell JH. Some analysis methods for rotating systems with periodic coefficients. *AIAA Journal*, 1983, 21(6): 890-897

29 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京：航空工业出版社，2000 (Hu Haiyan. Applied Nonlinear Dynamics. Beijing: Aviation Industry Press, 2000 (in Chinese))

(责任编辑：何漫丽)

SPECTRAL COMPONENTS AND THEIR DISTRIBUTIONS OF THE RESPONSE FOR PARAMETRIC VIBRATION SYSTEM [1)]

Wang Jianjun[2)] Han Qinkai Li Qihan

(*School of Jet Propulsion, Beihang University, Beijing* 100191, *China*)

Abstract Utilizing Sylvester's theorem and Fourier series approximations, commonly used in the matrix decomposition, the spectral components for both the free and forced responses of linear parametrically excited system are obtained theoretically, and the effects of parametric stability and damping on the spectral amplitudes are discussed in detail. Consequently, the outer excitation resonant condition for parametric system is found. It is concluded from the theoretical results as follows: parametric excitation leads to multi-frequency response; these spectra are closely related to the natural frequency, parametric frequency and the outer excitation frequency (only for the forced response) of the system; the distribution for these spectra in frequency domain follow certain laws; there are multi-resonances caused by outer excitation in parametric vibration system.

Key words parametric vibration system, free and forced response, spectral components, external resonance, Sylvester's theorem

Received 12 November 2008, revised 13 April 2009.

1) The project supported by the National High-Tech R&D Program of China (863 Program) (2008AA04Z403).

2) E-mail: wangjianjun@buaa.edu.cn