Regime Switching Lévy 模型下的局部风险最小套期保值策略 *

王 伟

(宁波大学数学系，宁波 315211)

(E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn)

钱林义

(华东师范大学金融与统计学院，上海 200241)

温利民

(江西师范大学数学与信息科学学院，南昌 330022)

摘 要 本文假定风险资产的价格满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程，其中市场利率、风险资产的平均回报率、波动率以及跳跃强度和幅度都依赖于市场的经济状态，这些经济状态由一连续时间马尔可夫链描述. 由于该模型下的市场是不完备的，在本文中我们首先采用局部风险最小化方法获得了欧式未定权益的最优套期保值策略. 接着，本文给出了一个具体的例子，得到了马尔科夫调制的几何布朗运动模型下的最优套期保值策略的数值结果. 最后将该最优套期保值策略与 Black-Scholes 模型下 Delta 套期保值策略进行了比较，证实了不确定因素 - 马氏链的存在给风险管理者的投资决策带来了影响.

关键词 机制转换；局部风险最小； Lévy 过程

MR(2000) 主题分类 62P05; 60J175

中图分类 O211.9

1 引言

当市场是无套利的完备市场时，市场中存在唯一的等价鞅测度，使得市场中可交易资产的贴现价格过程在这个概率测度下是鞅. 在完备市场中，任何未定权益都可以用市

本文 2011 年 5 月 25 日收到. 2013 年 3 月 5 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (71001046)， 教育部人文社会科学基金 (12YJC910009) 以及浙江省自然科学基金 (LQ12A01006) 资助项目.

场上的基础证券进行无套利复制. 然而, 在现实中理想的完备市场是很少见的, 不完备市场中的未定权益不能通过自融资策略来复制. [1] 中首次提出了未定权益套期保值的风险最小准则和 H- 可容许风险最小套期保值策略的概念，当标的资产的贴现价格过程在原始测度下是平方可积鞅时，证明了风险最小套期保值策略存在并且能够通过 Kunita-Watanab 定理获得. 然而， [2] 通过例子说明了当贴现价格过程 $\widetilde{S}=\left(S_t e^{-\int_0^t r_u\,\mathrm{d}u}\right)_{t\geq 0}$ 是一般半鞅时，均值自融资的 H- 可容许风险最小套期保值策略不一定存在. 因此，[2,3] 提出了局部风险最小套期保值策略的概念，研究了局部风险最小套期保值策略与 Föllmer-Schweizer 分解之间的关系. [4] 研究了风险资产价格满足几何 Lévy 过程时金融市场中人寿保险合同的风险最小套期保值问题. [5] 得到了保险给付现金流的风险最小套期保值策略. [6] 改正了 [4] 中的错误，并在 [7] 文中模型的基础上考虑了单位连结人寿保险合同的局部风险最小套期保值策略. 然而，有关 regime switching 模型下套期保值的研究到目前为止还是很少的，其中 [8] 研究了当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动时的风险最小套期保值问题. 在本文，我们假定市场经济状态由一连续时间时齐马尔可夫链描述，研究了当标的资产价格满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程时的局部风险最小套期保值问题. 由于在无套利的不完备市场中, 等价鞅测度不是唯一的, 于是为了获得未定权益的一个合理价格, 我们需要选取一个合适的等价鞅测度来进行资产定价. 因此，我们还进一步给出了当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程时的最小鞅测度的表达式.

2 市场模型

给定一个带有域流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},P)$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件，即右连续，完备的. $\{U_t\}_{0\leq t\leq T}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},P)$ 上的一连续时间时齐马尔可夫链，其状态空间取值为 $\mathcal{X}=\{1,2,\cdots.N\}$, 且当 $\delta\to 0$ 时， U 的转移概率为

$$
\begin{aligned}
&P(U_{t+\delta t}=j\mid U_t=i)=a_{ij}\delta t+o(\delta t), \qquad i\neq j,\\
&P(U_{t+\delta t}=i\mid U_t=i)=1+a_{ii}\delta t+o(\delta t),
\end{aligned}
$$

其中，当 $i\neq j$ 时， $a_{ij}\geq 0$, 且 $a_{ii}=-\sum\limits_{j=1}^{N}a_{ij}$， $A=[a_{ij}]_{i,j\in[1,2,\cdots,N]}$ 为连续时间马尔可夫链 $\{U_t\}_{0\leq t\leq T}$ 的 Q 矩阵. 假定市场中有两种可交易的风险资产，一个是局部无风险资产 B 和一个风险资产 S. 令 $r:\mathcal{X}\to[0,\infty)$ 表示市场无风险利率， $r_t=r(U_t)$, 也就是说，如果 $U_t=i$, 则 $r_t=r(i)$, 为了方便，我们记 $r_t=r_i$. 令 B_t 表示银行货币账户在 t 时刻的价值， B_t 满足如下方程

$$
\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t,
$$

其中 $B_0=1$. 假定风险资产价格 S_t 满足如下：

$$
S_t=S_0\exp\Big\{\int_0^t\overline{b}_s\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s+\int_0^t\int_{|x|\leq 1}x\big(N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)-v(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)\big)
$$

$$+\int_0^t\int_{|x|>1} xN(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\},\tag{1}$$

其中 $\bar{b}_t=\bar{b}(U_t)$，$\sigma_t=\sigma(U_t)$，$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 是随机测度，$v(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 是它的补偿子．此外，我们也假定股票的跳跃强度和幅度跟市场的状态有关，即 $v(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t)=\sum\limits_{j=1}^{N} I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$，这里 $I_{\{*\}}$ 是示性函数，$j\in[1,2,\cdots,N]$，$v_j(\mathrm{d}x)$ 是 Lévy 测度．

为了计算简单，我们假定对任意的 $j\in[1,2,\cdots,N]$，

$$\int_{|x|>1}|x|v_j(\mathrm{d}x)<\infty,$$

则 S_t 可以写成如下：

$$S_t=S_0\exp\Big\{\int_0^t\mu_s\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\},$$

其中 $\mu_t=\bar{b}_t+\sum\limits_{j=1}^{N} I_{\{U_{t-}=j\}}\int_{|x|>1}xv_j(\mathrm{d}x)$, $\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)-v(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$.

由 Itô 微分公式可知贴现资产价格过程 $\widetilde{S}_t$ 满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}\widetilde{S}_t=\widetilde{S}_{t-}\Big((b_t-r_t)\,\mathrm{d}t+\sigma_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\Big),\tag{2}$$

其中 $b_t=\mu_t+\frac{1}{2}\sigma_t^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1-x)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)$. 另外，我们还假定 S_t 是平方可积的，于是由 [9] 中的定理 25.17 知，对于 $\forall\, j\in[1,2,\cdots,N]$，Lévy 测度 $v_j(\mathrm{d}x)$ 必须满足如下

$$\int_{|x|>1}e^{2x}v_j(\mathrm{d}x)<\infty.\tag{3}$$

为了方便，我们把 U_t 写成关于泊松随机测度的一个随机积分的形式，可参考 [10]. 这里我们采用 [8] 中的符号和叙述，对于 $i,j\in\mathcal{X}$，$i\neq j$，令 Δ_{ij} 是连续的 (consecutive) 左闭右开区间，长度为 a_{ij}. 定义一个函数 $h:\mathcal{X}\times R\to R^N$，$R^N=\{0,1,\cdots,N-1\}$，

$$h(i,z)=\begin{cases} j-i, & \text{当 } z\in\Delta_{ij},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则

$$\mathrm{d}U_t=\int_R h(U_{t-},z)P(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),\tag{4}$$

其中 $P(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 是一个泊松随机测度，其强度为 $m(\mathrm{d}z)\times dt$, $m(\mathrm{d}z)$ 是定义在 R 上的 Lebesgue 测度，假定 $P(\cdot,\cdot)$, $N(\cdot,\cdot)$, $\widetilde{W}$ 是相互独立的，有关这方面内容也可以参考 [11] 中的例 11.51. 此外，在这篇文章中我们令 $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)$ 表示 $P(\cdot,\cdot)$ 的补偿泊松随机测度.

由 (2) 可知 $\widetilde{S}_t$ 满足如下分解

$$\widetilde{S}_t=\widetilde{S}_0+M_t+A_t,$$

其中

$$M_t=\int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sigma_u\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{S}_{u-}(e^x-1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x), \tag{5}$$

$$A_t=\int_0^t \widetilde{S}_u(b_u-r_u)\,\mathrm{d}u. \tag{6}$$

3 局部风险最小套期保值策略

在这一节，我们考虑当风险资产价格满足马尔科夫调制的 Lévy 过程时的局部风险最小套期保值问题，下面首先介绍一些基本概念和假设.

定义 1 一个组合 $\varphi=(\xi,\eta)$ 称为策略，如果它们满足下面几个条件：

1. ξ 是可料过程；

2. $\xi\in L^2(X)$，$\|\xi\|_{L^2(X)}=\big(\mathbb{E}_P\big[\int_0^T\xi_u^2\,\mathrm{d}[X,X]_u\big]\big)^{\frac{1}{2}}<\infty$;

3. η 是适应的；

4. 令 V_t 表示在 t 时刻的贴现投资价值过程， $V_t=\xi_tX_t+\eta_t$, 其中 ξ_t 表示在 t 时刻持有贴现风险资产 X_t 的数量， η_t 表示在 t 时刻持有无风险资产的数量. V_t 是右连续的，且对 $\forall\, 0\le t\le T$，$\mathbb{E}_P[V_t^2]<\infty$.

定义 2 令 $H\in L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 是一未定权益，若存在组合策略 $\varphi=(\xi,\eta)$ 使得其投资价值过程 $V_t=\eta_t+\xi_tX_t$, 且 $V_T(\varphi)=H$, 则称 φ 为 H 可容许策略.

定义 3 如果累积成本过程 $C_t(\varphi)=V_t-\int_0^t\xi_s\,\mathrm{d}X_s$ 在测度 P 下是鞅，则策略 φ 称为均值自融资的，剩余风险过程 $R_t(\varphi)=\mathbb{E}_P\big[(C_T(\varphi)-C_t(\varphi))^2\big|\mathcal{F}_t\big]$.

定义 4 假定 X 为半鞅， X 的典则分解为 $X=X_0+M+A$, M 是初值为 0 的平方可积局部鞅， A 是平方可积的有限变差过程. $H\in L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 是一未定权益， φ 是 H 可容许策略. 如果 φ 是均值自融资的且累积成本过程 $C(\varphi)$ 是正交于 M 的，则 φ 被称作伪局部风险最小套期保值策略 (pseudo locally risk minimizing hedging strategy).

定义 5 一个鞅测度 $\widehat{P}$ 与 P 等价，称 $\widehat{P}$ 为最小鞅测度当且仅当对于在 P 下与 M 正交的任意平方可积 P 鞅 L 在测度 $\widehat{P}$ 下仍是局部鞅.

下面的引理 1 见 [12] 中的定理 3.3 或 [6].

引理 1 假定半鞅 X 的典则分解中的 M, A 满足下面三个条件：

1. 对 $\forall\, 0\le t\le T$，$\langle M\rangle_t$ 是 P-a.s 严格增的；

2. A 是 P-a.s 连续的；

3. A 关于 $\langle M\rangle$ 是绝对连续的，即存在可料过程 α_t 使得 $A_t=\int_0^t\alpha_s\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ 和 $\mathbb{E}_P\big[\big\langle\int\alpha\,\mathrm{d}M\big\rangle\big]<\infty$, 则 H 可容许策略 φ 是局部风险最小套期保值策略当且仅当 φ 是均值自融资的且累积成本过程 $C(\varphi)$ 与 M 是正交的.

由定义 4 和引理 1 知，当 M,A 满足上述条件 1–3 时，局部风险最小套期保值策略与伪局部风险最小套期保值策略等价.

由于市场是不完备的，市场中存在无穷个等价鞅测度，我们首先给出等价鞅测度的

一个通常表达式．令

$$D_t = 1 + \int_0^t D_{s-} G(s, U_{s-})\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} D_{s-}(H(s, U_{s-}, x) - 1)\widetilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \tag{7}$$

假定存在可料过程 $G(t, U_{t-})$ 和 $H(t, U_{t-}, x) > 0$ 使得上式定义的 D_t 是一个鞅，记 $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_T^U$, 这里 $\mathcal{F}_T^U = \sigma\big(U_s,\ 0 \le s \le T\big)$, 则我们可以定义一个新的概率测度 Q 如下：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{H}_t} = D_t. \tag{8}$$

由半鞅的 Girsanov 定理知，在给定条件 $\mathcal{F}_T^U$ 和测度 Q 下 $W_t = \widetilde{W}_t - \int_0^t G(s, U_{s-})\,\mathrm{d}s$ 是标准布朗运动， $\overline{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) - H(t, U_{t-}, x)v(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$ 是补偿随机测度．在 $[0, T]$ 时间段内，由于 $r_t \ne r_{t-}$， $b_t \ne b_{t-}$ 和 $\sigma_t \ne \sigma_{t-}$ 的所有时间点的集合，也就是说 Markov 链的跳跃时间集合是一个可数集，故它的 Lebsegue 测度为 0, 因此由 (2) 可得贴现资产价格过程 $\widetilde{S}_t$ 可以写成如下：

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_t &= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\Big((b_{u-} - r_{u-})\,\mathrm{d}u + \sigma_{u-}\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\Big) \\
&= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sigma_{u-}(\mathrm{d}\widetilde{W}_u - G(u, U_{u-})\mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\overline{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\big(\sigma_{u-}G(u, U_{u-}) + b_{u-} - r_{u-}\big)\,\mathrm{d}u \\
&\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)(H(u, U_{u-}, x) - 1)v(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

因为 $W_t = \widetilde{W}_t - \int_0^t G(s, U_{s-})\,\mathrm{d}s$ 和 $v(\mathrm{d}x, \mathrm{d}u) = \sum\limits_{j=1}^N I_{\{U_{u-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u$, 所以

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_t &= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sigma_{u-}\,\mathrm{d}W_u + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\overline{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\big(\sigma_{u-}G(u, U_{u-}) + b_{u-} - r_{u-}\big)\,\mathrm{d}u \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)(H(u, U_{u-}, x) - 1) I_{\{U_{u-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{9}$$

然而，由于马尔可夫链 U 所生成的不确定性存在，鞅条件需要被定义在更大的 σ 域流 $\mathcal{H}_t$ 上，见 [13,14], 即对任意的 $0 \le s \le t$,

$$\mathbb{E}_Q\big[\widetilde{S}_t | \mathcal{H}_s\big] = \widetilde{S}_s.$$

于是由 (9) 可知贴现资产价格过程 $\{\widetilde{S}_t\}_{0 \le t \le T}$ 是 Q 鞅当且仅当对任意 $0 \le t \le T$,

$$\begin{aligned}
&\sigma_{t-}G(t, U_{t-}) + b_{t-} - r_{t-} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)(H(t, U_{t-}, x) - 1) I_{\{U_{t-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x) = 0, \qquad \text{a.s.}
\end{aligned} \tag{10}$$

因此，风险资产价格 S_t 满足如下随机微分方程：

$$\mathrm{d}S_t = S_{t-}\Big(r_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t + \int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\overline{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\Big). \tag{11}$$

从方程 (10) 很容易发现，满足方程 (10) 的 $G(t,U_{t-})$ 和 $H(t,U_{t-},x)$ 的取值不是唯一的，然而怎样选择 G 和 H 使得由 (7) 和 (8) 所定义的测度是最小鞅测度呢？在考虑这个问题之前，我们首先考虑当标的资产价格满足马尔科夫调制的 Lévy 过程时的局部风险最小套期保值问题. 假定 $\Psi(S_T)$ 是一 $\mathcal{F}_T$ 可测的欧式未定权益，且 $\mathbb{E}_Q\big[(B_T^{-1}\Psi(S_T))^2\big]<\infty$，其中 $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ 表示在等价鞅测度 Q 下的期望. 令 $\Phi(t,S_t,U_t)$ 表示未定权益在 t 时刻的价值，则由风险中性定价原理可知 $\Phi(t,S_t,U_t)=\mathbb{E}_Q\big[\frac{B_t}{B_T}\Psi(S_T)\big|\mathcal{F}_t\big]$. 此外，我们假定对 $\forall\, j\in[1,2,\cdots,N]$，$\Phi(t,S_t,j)\in C^{1,2}\big([0,T]\times[0,\infty]\big)$，用 Φ_t 表示 Φ 关于 t 的一阶导数，Φ_x 表示 Φ 关于 S 的一阶导数，Φ_{xx} 表示 Φ 关于 S 的二阶导数.

定理 1 令 $V_t=\mathbb{E}_Q\big[B_T^{-1}\Psi(S_T)\big|\mathcal{F}_t\big]=B_t^{-1}\Phi(t,S_t,U_t)$，则

$$\begin{aligned}V_t =&V_0+\int_0^t\Phi_x(s,S_{s-},U_{s-})\sigma_{s-}\widetilde{S}_{s-}\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}J_1(s,S_{s-},U_{s-},x)\overline{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &+\int_0^t\int_R J_2(s,S_{s-},U_{s-},z)\widetilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}&J_1(t,S_{t-},U_{t-},x)=B_t^{-1}\big[\Phi(t,S_{t-}e^x,U_{t-})-\Phi(t,S_{t-},U_{t-})\big],\\ &J_2(t,S_{t-},U_{t-},z)=B_t^{-1}\big[\Phi(t,S_{t-},U_{t-}+h(U_{t-},z))-\Phi(t,S_{t-},U_{t-})\big].\end{aligned}$$

证 由 Itô 公式有

$$\begin{aligned}V_t=&\int_0^t -r_{u-}B_u^{-1}\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\,\mathrm{d}u+\int_0^t B_u^{-1}\Big[\Phi_u(u,S_{u-},U_{u-})\,\mathrm{d}u+\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})\,\mathrm{d}S_u\\ &+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}^2\sigma_{u-}^2\,\mathrm{d}u\Big]+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}B_u^{-1}\big[\Phi(u,S_{u-}e^x,U_{u-})-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\\ &-\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}(e^x-1)\big]N(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)+\int_0^t\int_R B_u^{-1}\big[\Phi(u,S_{u-},U_{u-}+h(U_{u-},z))\\ &-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\big]P(\mathrm{d}u,\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

由式 (2) 可得

$$\mathrm{d}S_t=S_{t-}\Big(b_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\Big),$$

于是

$$\begin{aligned}V_t=&\int_0^t -r_{u-}B_u^{-1}\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\,\mathrm{d}u+\int_0^t B_u^{-1}\Big[\Phi_u(u,S_{u-},U_{u-})du+\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})\\ &\cdot S_{u-}\Big(b_{u-}du+\sigma_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\Big)+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}^2\sigma_{u-}^2\,\mathrm{d}u\Big]\end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}B_u^{-1}\big[\Phi(u,S_{u-}e^x,U_{u-})-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})$$
$$-\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}(e^x-1)\big]N(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_0^t\int_R B_u^{-1}\big[\Phi(u,S_{u-},U_{u-}+h(U_{u-},z))-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\big]P(\mathrm{d}u,\mathrm{d}z).$$

将 $W_t=\widetilde{W}_t-\int_0^t G(s,U_{s-})\,\mathrm{d}s$ 和 $\overline{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)-H(t,U_{t-},x)v(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}V_t=&-\int_0^t r_{u-}B_u^{-1}\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\,\mathrm{d}u+\int_0^t B_u^{-1}\Big[\Phi_u(u,S_{u-},U_{u-})+\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}\\&\cdot(\sigma_{u-}G(u,U_{u-})+b_{u-})+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}^2\sigma_{u-}^2\Big]\,\mathrm{d}u\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)H(u,U_{u-},x)v(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}B_u^{-1}\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}(e^x-1)v(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&+\sum_{j=1}^N\int_0^t B_u^{-1}\Phi(u,S_{u-},j)a_{U_{u-},j}\,\mathrm{d}u+\int_0^t B_u^{-1}\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})S_{u-}\sigma_{u-}\,\mathrm{d}W_u\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)\overline{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)+\int_0^t\int_R J_2(u,S_{u-},U_{u-},z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}z).\end{aligned}\tag{13}$$

因为 V_t 在测度 Q 下是鞅，所以上式的飘移项系数为 0, 于是

$$\begin{aligned}V_t=&V_0+\int_0^t\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\,\mathrm{d}W_u+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)\overline{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&+\int_0^t\int_R J_2(u,S_{u-},U_{u-},z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

这样定理 1 得证.

定理 2 令 $\Phi(t,S_{t-},i)$ 表示当 $U_{t-}=i$ 时欧式未定权益在 t 时刻的价值，则对任意 $1\le i\le N$， $\Phi(t,S_{t-},i)$ 满足如下偏微分方程：

$$\begin{aligned}&\Phi_t(t,S_{t-},i)-r_i\Phi(t,S_{t-},i)+\Phi_x(t,S_{t-},i)r_iS_{t-}-\Phi_x(t,S_{t-},i)S_{t-}\\&\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)H(t,i,x)v_i(\mathrm{d}x)+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(t,S_{t-},i)S_{t-}^2\sigma_i^2\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\big(\Phi(t,S_{t-}e^x,i)-\Phi(t,S_{t-},i)\big)H(t,i,x)v_i(\mathrm{d}x)\\&+\sum_{j=1}^N a_{ij}\Phi(t,S_{t-},j)=0,\end{aligned}$$

且终值条件 $\Phi(T,S_{T-},i)=\Psi(S_T)$.

证 由于 V_t 在测度 Q 下是鞅, 则式 (13) 中的漂移项系数为 0, 因此对于 $\forall 0\le t\le T$, 我们有

$$\begin{aligned}
&-r_{t-}B_t^{-1}\Phi(t,S_{t-},U_{t-})\\
&+B_t^{-1}\Big[\Phi_t(t,S_{t-},U_{t-})+\Phi_x(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}\ (\sigma_{t-}G(t,U_{t-})+b_{t-})\\
&+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}^2\sigma_{t-}^2\Big]+\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}J_1(t,S_{t-},U_{t-},x)\,H(t,U_{t-},x)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\\
&-\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}B_t^{-1}\Phi_x(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}(e^x-1)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\\
&+\sum_{j=1}^N B_t^{-1}\Phi(t,S_{t-},j)a_{U_{t-},j}=0,
\end{aligned}$$

又因为 $G(t,U_{t-})$ 和 $H(t,U_{t-},x)$ 满足 (10), 所以将 $\sigma_{t-}G(t,U_{t-})+b_{t-}=r_{t-}-\sum\limits_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\big(H(t,U_{t-},x)-1\big)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}
&-r_{t-}B_t^{-1}\Phi(t,S_{t-},U_{t-})+B_t^{-1}\Big[\Phi_t(t,S_{t-},U_{t-})+\Phi_x(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}\\
&\cdot\Big(r_{t-}-\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\big(H(t,U_{t-},x)-1\big)\,I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\Big)+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}^2\sigma_{t-}^2\Big]\\
&+\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}J_1(t,S_{t-},U_{t-},x)H(t,U_{t-},x)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\\
&-\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}B_t^{-1}\Phi_x(t,S_{t-},U_{t-})S_{t-}(e^x-1)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\\
&+\sum_{j=1}^N B_t^{-1}\Phi(t,S_{t-},j)a_{U_{t-},j}=0.
\end{aligned}$$

于是，当 $U_{t-}=i$ 时，将 $J_1(t,S_{t-},U_{t-},x)=B_t^{-1}\big[\Phi(t,S_{t-}e^x,U_{t-})-\Phi(t,S_{t-},U_{t-})\big]$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}
r_i\Phi(t,S_{t-},i)=&\Phi_t(t,S_{t-},i)+\Phi_x(t,S_{t-},i)r_iS_{t-}-\Phi_x(t,S_{t-},i)S_{t-}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\\
&\cdot H(t,i,x)v_i(\mathrm{d}x)+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(t,S_{t-},i)S_{t-}^2\sigma_i^2+\int_{-\infty}^{\infty}\big(\Phi(t,S_{t-}e^x,i)\\
&-\Phi(t,S_{t-},i)\big)H(t,i,x)v_i(\mathrm{d}x)+\sum_{j=1}^N a_{ij}\Phi(t,S_{t-},j).
\end{aligned}$$

因此，我们完成了定理 2 的证明.

注 1 当标的资产价格过程满足马尔可夫调制的几何布朗运动时， $\Phi(t,S_t,i)$ 满足

如下偏微分方程：

$$
\begin{aligned}
&\Phi_t(t,S_t,i)-r_i\Phi(t,S_t,i)+\Phi_x(t,S_t,i)r_iS_t\\
&+\frac{1}{2}\Phi_{xx}(t,S_t,i)S_t^2\sigma_i^2+\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\Phi(t,S_t,j)=0,
\end{aligned}
$$

且终值条件 $\Phi(T,S_T,i)=\Psi(S_T)$.

假定 $\varphi_u=(\xi_u,\eta_u)$ 为伪局部风险最小套期保值策略，令

$$
L_t=V_t-V_0-\int_0^t\xi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u,
$$

则由定义 3 可知 $L_t=C_t(\varphi)-V_0$, 再根据定义 4 可知 L_t 必须满足下面两个条件：

1. L_t 在原始测度 P 下是鞅;
2. L_t 与 $\widetilde{S}_t$ 的半鞅分解中的局部鞅部分 M_t 在原始测度 P 下是正交的.

接下来，为了获得当标的资产价格满足马尔科夫调制的几何 Lévy 过程时局部风险最小套期保值策略和最小鞅测度，我们必须对风险资产价格作出如下假设. 至于为什么需要这两个假设，在定理 3 的证明结束后会给具体解释.

B.1 令 $X_t=\ln\frac{S_t}{S_0}$, 假定 $\Delta X_t\in[-c_1,c_2]$, $c_1>0$, $c_2>0$, 对 $\forall j\in[1,2,\cdots,N]$, 即 Lévy 测度 $v_j(\cdot)$ 的支撑为 $[-c_1,c_2]$, 也就是说 $v_j((-\infty,-c_1))=0$, $v_j((c_2,\infty))=0$.

B.2 $\frac{-1}{e^{c_2}-1}<\max\limits_{j\in[1,2,\cdots,N]}\frac{r_j-b_j}{\sigma_j^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2v_j(\mathrm{d}x)}<\frac{1}{1-e^{-c_1}}$.

定理 3 当标的资产价格满足马尔科夫调制的几何 Lévy 过程时欧式未定权益的局部风险最小套期保值策略为

$$
\begin{aligned}
&\varphi_t=(\xi_t,V_t-\xi_t\widetilde{S}_t),\\
&\xi_t=\frac{\Phi_x(t,S_{t-},U_{t-})\sigma_{t-}^2\widetilde{S}_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}J_1(t,S_{t-},U_{t-},x)\widetilde{S}_{t-}(e^x-1)I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}{\sigma_{t-}^2\widetilde{S}_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{S}_{t-}^2(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

剩余风险过程 $R_t(\varphi)$ 满足

$$
\begin{aligned}
R_t(\varphi)=&\mathbb{E}_P\Big[\int_t^T\Big(\big(\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})-\xi_u\big)^2\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2+\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\big[\big(J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)\\
&-\xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x-1)\big)\big]^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)+\sum_{j=1}^{N}a_{U_{u-},j}e^{-2\int_0^u r_s^2\,\mathrm{d}s}\big(\Phi(u,S_{u-},j)\\
&-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\big)^2\Big)\,\mathrm{d}u\Big|\mathcal{F}_t\Big].
\end{aligned}
$$

证　由 (12) 知

$$
L_t=V_t-V_0-\int_0^t\xi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-})\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\,\mathrm{d}W_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x)\overline{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_0^t\int_R J_2(u, S_{u-}, U_{u-}, x)\widetilde{P}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}z) - \int_0^t \xi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u.
\end{aligned}
$$

因为 $W_t = \widetilde{W}_t - \int_0^t G(s, U_{s-})\,\mathrm{d}s$, $\overline{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \widetilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) - (H(t, U_{t-}, x) - 1)v(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$, 再结合式 (2), 可得

$$
\begin{aligned}
L_t &= \int_0^t \Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-})\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\big(\mathrm{d}\widetilde{W}_u - G(u, U_{u-})\,\mathrm{d}u\big) \\
&\quad + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x)(H(u, U_{u-}, x) - 1)v(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_0^t\int_R J_2(u, S_{u-}, U_{u-}, z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}z) \\
&\quad - \int_0^t \xi_u\widetilde{S}_{u-}\Big(\sigma_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + (b_{u-} - r_{u-})\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\Big).
\end{aligned}
$$

对上式化简可得

$$
\begin{aligned}
L_t &= \int_0^t \big(\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-}) - \xi_u\big)\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\big(J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x) \\
&\quad - \xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\big)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) + \int_0^t\int_R J_2(u, S_{u-}, U_{u-}, z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}z) \\
&\quad - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x)(H(u, U_{u-}, x) - 1)v(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\
&\quad - \int_0^t \Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-})\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}G(u, U_{u-})\,\mathrm{d}u - \int_0^t \xi_u\widetilde{S}_{u-}(b_{u-} - r_{u-})\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

由于我们假定 $\varphi_u = (\xi_u, \eta_u)$ 为伪局部风险最小套期保值策略，则 L_t 是 P 鞅，故上式的飘移项系数为 0, 即对任意 $u \in [0, T]$ 有

$$
\begin{aligned}
&\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-})\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}G(u, U_{u-}) + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x) \\
&\cdot (H(u, U_{u-}, x) - 1)I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x) + \xi_u\widetilde{S}_{u-}(b_{u-} - r_{u-}) = 0, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
L_t &= \int_0^t \big(\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-}) - \xi_u\big)\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\big(J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x) \\
&\quad - \xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\big)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) + \int_0^t\int_R J_2(u, S_{u-}, U_{u-}, z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}z).
\end{aligned}
$$

又因为

$$M_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sigma_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x),$$

从而

$$\begin{aligned}[L, M]_t = &\int_0^t \big(\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-}) - \xi_u\big)\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \big(J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x) \\ &- \xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\big)\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)N(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x).\end{aligned}$$

另外，通过 Itô 分部积分公式可得

$$L_tM_t = L_0M_0 + \int_0^t L_{s-}\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t M_{s-}\,\mathrm{d}L_s + [L, M]_t,$$

于是 L_tM_t 在测度 P 下是鞅当且仅当对任意的 $u \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}&\big(\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-}) - \xi_u\big)\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2 + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \big(J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x) - \xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\big) \\ &\cdot \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x) = 0, \qquad P\text{-a.s.}\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\xi_u = \frac{\Phi_x(u, S_{u-}, U_{u-})\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2 + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} J_1(u, S_{u-}, U_{u-}, x)\widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}{\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2 + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}^2(e^x - 1)^2 I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}.$$

下面我们验证引理 1 中的条件 1–3, 由引理 1 可知，如果这三个条件满足，则上面得到的伪局部风险最小套期保值策略是局部风险最小套期保值策略.

条件 1

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_t =& \Big\langle \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sigma_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}(e^x - 1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\Big\rangle \\ =& \int_0^t \widetilde{S}_{u-}^2\Big(\sigma_{u-}^2 + \sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)^2 I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\Big)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)^2 v_j(\mathrm{d}x) > 0$, 故 $\langle M\rangle_t$ 是 P-a.s 严格增的.

条件 2

因为 $A_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-}(b_{u-} - r_{u-})du$ 且由于发生跳跃时间的 Lebesgue 测度为 0, 所以 A_t 是连续的.

条件 3

由 $\langle M\rangle_t$ 和 A_t 的表达式可知

$$\lambda_t=\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}\langle M\rangle_t}=\frac{(b_{t-}-r_{t-})\widetilde{S}_{t-}}{\widetilde{S}_{t-}^2\big[\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\big]}=\frac{(b_{t-}-r_{t-})}{\widetilde{S}_{t-}\big[\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\big]}.$$

此外,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_P\Big[\Big\langle\int_0^t\lambda_u\,\mathrm{d}M_u\Big\rangle\Big]=\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\lambda_u^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_u\Big]\\=&\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{(b_{u-}-r_{u-})^2\widetilde{S}_{u-}^2\big(\sigma_{u-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\big)}{\widetilde{S}_{u-}^2\big[\sigma_{u-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\big]^2}\,\mathrm{d}u\Big]\\<&\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{(b_{u-}-r_{u-})^2}{\sigma_{u-}^2}\,\mathrm{d}u\Big]<\infty.\end{aligned}$$

因此，我们证明了引理 1 中的条件 1–3 是成立的，于是伪局部风险最小套期保值策略 φ_t 是局部风险最小套期保值策略. 下面我们将计算剩余风险过程 $R_t(\varphi)$.

由于 $C_t(\varphi)=V_t-\int_0^t\xi_u\,\mathrm{d}\widetilde{S}_u$, 由定义 3 可得

$$\begin{aligned}&R_t(\varphi)=\mathbb{E}_P\big[(C_T(\varphi)-C_t(\varphi))^2|\mathcal{F}_t\big]\\=&\mathbb{E}_P\big[(L_T-L_t)^2|\mathcal{F}_t\big]\\=&\mathbb{E}_P\Big[\int_t^T(\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})-\xi_u)\sigma_{u-}\widetilde{S}_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u+\int_t^T\int_{-\infty}^{\infty}(J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)\\&-\xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x-1))\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)+\int_t^T\int_{-\infty}^{\infty}J_2(u,S_{u-},U_{u-},z)\widetilde{P}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}z)\mid\mathcal{F}_t\Big]^2\\=&\mathbb{E}_P\Big[\int_t^T\Big(\big(\Phi_x(u,S_{u-},U_{u-})-\xi_u\big)^2\sigma_{u-}^2\widetilde{S}_{u-}^2\\&+\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\big[(J_1(u,S_{u-},U_{u-},x)-\xi_u\widetilde{S}_{u-}(e^x-1))\big]^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u\\&+\sum_{j=1}^{N}a_{U_{u-},j}e^{-2\int_0^u r_s\,\mathrm{d}s}\big(\Phi(u,S_{u-},j)-\Phi(u,S_{u-},U_{u-})\big)^2\Big)\,\mathrm{d}u\Big|\mathcal{F}_t\Big].\end{aligned}$$

证毕.

注 2 当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动时欧式未定权益的局部风险最小套期保值策略为

$$\varphi_t=(\xi_t,V_t-\xi_t\widetilde{S}_t),$$

其中 $\xi_u = \Phi_x(u, S_u, U_{u-})$, 剩余风险过程 $R_t(\varphi)$ 满足

$$R_t(\varphi) = \mathbb{E}_P\Big[\int_t^T \Big(\sum_{j=1}^N a_{U_{u-},j} e^{-2\int_0^u r_s^2 ds} \left(\Phi(u, S_u, j) - \Phi(u, S_u, U_{u-})\right)^2\Big) \mathrm{d}u \Big| \mathcal{F}_t\Big],$$

这正是 [8] 中的结果.

虽然定理 3 的证明没有用到假设 B.1 和 B.2, 但在定理 3 的证明中 $H(t, U_{t-}, x)$ 必须大于 0, 否则由 $G(t, U_{t-})$, $H(t, U_{t-}, x)$, (7) 和 (8) 所决定的测度是符号测度. 将 (14) 中 ξ_u 的值代入 (15), 再由 (10) 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Phi_x \widetilde{S}_{t-}(e^x - 1) - J_1(t, S_{t-}, U_{t-}, x)\big) \\ &\cdot \bigg(\frac{(e^x - 1)(r_{t-} - b_{t-})}{\sigma_{t-}^2 + \sum\limits_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)^2 I_{\{U_{t-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)} - H(t, U_{t-}, x) + 1\bigg) \\ &\cdot I_{\{U_{t-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x) = 0.\end{aligned}$$

尽管满足上式的 $H(t, U_{t-}, x)$ 不一定是唯一的，但很容易发现

$$H(t, U_{t-}, x) = 1 + \frac{(e^x - 1)(r_{t-} - b_{t-})}{\sigma_{t-}^2 + \sum\limits_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)^2 I_{\{U_{t-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)}$$

是上式的一个解. 假设 B.1 和 B.2 保证了

$$H(t, U_{t-}, x) = 1 + \frac{(e^x - 1)(r_{t-} - b_{t-})}{\sigma_{t-}^2 + \sum\limits_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)^2 I_{\{U_{t-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)} > 0,$$

因此由 (7) 和 (8) 所定义的等价鞅测度是存在的. 当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程时，市场是不完备的，等价鞅测度是不唯一的，为了选取一个合适的等价鞅测度来进行资产定价，下面的定理 4 在假设 B.1 和 B.2 的基础上给出了最小鞅测度的表达式.

定理 4　定义

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{H}_t} = D_t \\ &= \exp\Big\{\int_0^t G(u, U_{u-})\, \mathrm{d}\widetilde{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t G(u, U_{u-})^2\, \mathrm{d}u + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \ln H(u, U_{u-}, x) N(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (H(u, U_{u-}, x) - 1) I_{\{U_{u-}=j\}} v_j(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}u\Big\},\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$G(t,U_{t-})=\frac{(r_{t-}-b_{t-})\sigma_{t-}}{\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)},\tag{17}$$

$$H(t,U_{t-},x)=1+\frac{(e^x-1)(r_{t-}-b_{t-})}{\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(dx)},\tag{18}$$

则由 (16) 所定义的概率测度 Q^* 是最小鞅测度.

证 我们首先证明 D_t 在测度 P 下是平方可积鞅，由 (16) 可得

$$\begin{aligned}D_t^2=\exp\Big\{&\int_0^t 2G(u,U_{u-})\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u-\int_0^t G(u,U_{u-})^2\,\mathrm{d}u+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}2\ln H(u,U_{u-},x)N(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&-2\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(H(u,U_{u-},x)-1)\,I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u\Big\},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_P[D_t^2]\\=&\mathbb{E}_P\Big[\exp\Big\{\int_0^t G(u,U_{u-})^2\,\mathrm{d}u+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\big(H(u,U_{u-},x)-1\big)^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u\Big\}\Big].\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}G(u,U_{u-})=&\frac{(r_{u-}-b_{u-})\sigma_{u-}}{\sigma_{u-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}\\\le&\frac{r_{u-}-b_{u-}}{\sigma_{u-}}\le\max_{j\in[1,\cdots,N]}\frac{r_j-b_j}{\sigma_j},\end{aligned}$$

故 $\int_0^t G^2(u,U_{u-})\,\mathrm{d}u$ 是有界的．另外，因为对 $\forall j\in[1,2,\cdots,N]$, 当 $U_{u-}=j$ 时

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\big(H(u,U_{u-},x)-1\big)^2v_j(\mathrm{d}x)=&\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2(r_j-b_j)^2v_j(\mathrm{d}x)}{\big(\sigma_{u-}^2+(e^x-1)^2v_j(\mathrm{d}x)\big)^2}\\\le&\max_{j\in[1,2,\cdots,N]}\frac{(r_j-b_j)^2}{\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2v_j(\mathrm{d}x)},\end{aligned}$$

所以 D_t 是平方可积鞅．又由于当

$$G(t,U_{t-})=\frac{(r_{t-}-b_{t-})\sigma_{t-}}{\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)},$$

$$H(t,U_{t-},x)=1+\frac{(e^x-1)(r_{t-}-b_{t-})}{\sigma_{t-}^2+\sum\limits_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2I_{\{U_{t-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)}$$

时，(10) 成立，故概率测度 Q^* 是等价鞅测度．接下来我们将证明测度 Q^* 是最小鞅测度．对任意的平方可积 P 鞅 $\overline{L}$, 由 D_t 的定义可得

$$\begin{aligned}D_t &= \int_0^t D_{u-}G(u,U_{u-})\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} D_{u-}\big(H(u,U_{u-},x)-1\big)\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\ &= \int_0^t D_{u-}G(u,U_{u-})\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{u-}G(u,U_{u-})(e^x-1)}{\sigma_{u-}}\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

因为

$$M_t = \int_0^t S_{u-}\sigma_{u-}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_u + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} S_{u-}(e^x-1)\widetilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x),$$

故

$$D_t = \int_0^t \frac{D_{u-}G(u,U_{u-})}{S_{u-}\sigma_{u-}}\,\mathrm{d}M_u,$$

所以我们有

$$[\overline{L},D]_t = \int_0^t \frac{D_{u-}G(u,U_{u-})}{S_{u-}\sigma_{u-}}\,\mathrm{d}[\overline{L},M]_u. \tag{19}$$

接下来我们首先证明 M_t 是平方可积 P 鞅．因为 $\int_{|x|>1} e^{2x}v_j(\mathrm{d}x) < \infty$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2 v_j(\mathrm{d}x) < \infty$. 又由于

$$\mathbb{E}_P[M_t^2] = \int_0^t \mathbb{E}_P[S_{u-}^2\sigma_u^2]\,\mathrm{d}u + \sum_{j=1}^N\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}_P[S_{u-}^2](e^x-1)^2 I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u,$$

且 S_u 关于测度 P 是平方可积的和 $\sigma_u \le \max\limits_{j\in[1,2,\cdots,N]}\sigma_j$, 所以 M_t 是关于测度 P 的平方可积鞅．另外，通过 Kunita-Watanabe 不等式可知

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t \frac{D_{u-}G(u,U_{u-})}{S_{u-}\sigma_{u-}}\,\mathrm{d}[\overline{L},M]_u\Big]\\ \le&\Big\{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{G^2(u,U_{u-})}{\sigma_{u-}^2}\,\mathrm{d}[\overline{L}]_u\Big]\Big\}^{\frac12}\Big\{\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{D_{u-}^2}{S_{u-}^2}\,\mathrm{d}[M]_u\Big]\Big\}^{\frac12}.\end{aligned} \tag{20}$$

由于 D_t 在测度 P 下是平方可积鞅，$\sigma_u^2 \le \max\limits_{j\in[1,\cdots,N]}\sigma_j^2$ 和 (5), 我们可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{D_{u-}^2}{S_{u-}^2}\,\mathrm{d}[M]_u\Big] =&\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t D_{u-}^2\Big(\sigma_{u-}^2+\sum_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2 I_{\{U_{u-}=j\}}v_j(\mathrm{d}x)\Big)\,\mathrm{d}u\Big]\\ =&\max_{j\in[1,\cdots,N]}\int_0^t\mathbb{E}_P[D_{u-}^2]\Big(\sigma_j^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)^2v_j(\mathrm{d}x)\Big)\,\mathrm{d}u<\infty.\end{aligned}$$

又因为 $G^2(u,U_{u-}) \le \max\limits_{j\in[1,\cdots,N]}\frac{(r_j-b_j)^2}{\sigma_j^2}$，$\overline{L}$ 是平方可积 P 鞅，则结合上式和 (20) 知

$$\mathbb{E}_P\Big[\int_0^t\frac{D_{u-}G(u,U_{u-})}{S_{u-}\sigma_{u-}}\,\mathrm{d}[\overline{L},M]_u\Big]<\infty. \tag{21}$$

根据定义 5, 假定 $\overline{L}$ 是正交于 M 的任意平方可积 P 鞅, 则通过 (19) 和 (21) 可知 $[\overline{L}, D]_t$ 是 P 鞅, 因此 $\overline{L}$ 是 Q^* 鞅. 于是由定义 5 可知 Q^* 是风险最小鞅测度. 这样定理 4 得证.

注 3 当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动时的最小鞅测度 Q^* 由如下定义

$$\frac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{H}_t} = \exp\Big\{\int_0^t \frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\Big)^2 \mathrm{d}s\Big\}.$$

为了说明不确定因素 - 马氏链的存在给风险管理者的投资决策带来了影响, 下面我们考虑一个特殊的例子. 假定风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动, 且欧式未定权益为欧式看涨期权. 利用文中的 (14) 式可得马尔可夫调制的几何布朗运动模型下欧式看涨期权的局部风险最小套期保值策略为 $\varphi_t = (\xi_t, \eta_t)$, 其中 $\xi_t = \Phi_x(t, S_{t-}, U_{t-})$, $\eta_t = B_t^{-1}\Phi(t, S_t, U_t) - \xi_t\widetilde{S}_t$. 因此局部风险最小套期保值策略我们只需要知道风险资产的头寸 ξ_t, 利用 ξ_t 和衍生产品的价值就可以求出 η_t. 由 [13] 可知, 风险资产价格满足马尔科夫调制的几何布朗运动时欧式看涨期权的价值 $\Phi(t, S_t, U_t)$ 为

$$\oint_{\{J_1+J_2+\cdots+J_N=T-t\}} \Big(S_t\mathbb{N}(d_1(J_1,\cdots,J_N)) - Ke^{-\sum\limits_{j=1}^{N} r_j J_i}\mathbb{N}(d_2(J_1,\cdots,J_N))\Big) \cdot \phi(J_1,\cdots,J_N)\,\mathrm{d}J_1,\cdots,\mathrm{d}J_N,$$

其中 $J_i = \int_t^T I_{\{U_u=i\}}\,\mathrm{d}u$ 表示连续时间马尔可夫链 U 在状态 i 的累积停留时间, $\phi(J_1, \cdots, J_N)$ 为 $(J_1, \cdots, J_N)$ 的联合概率密度函数, K 是执行价格, $\mathbb{N}(*)$ 表示标准正态分布的累积分布函数, S_t 为 t 时刻股票的现价,

$$\mathrm{d}_1(J_1,\cdots,J_N) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + \sum\limits_{i=1}^{N}\left(r(i) + \frac{1}{2}\sigma^2(i)\right)J_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma^2(i)J_i}},$$

$$\mathrm{d}_2(J_1,\cdots,J_N) = \mathrm{d}_1(J_1,\cdots,J_N) - \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(i)J_i}.$$

因此

$$\begin{aligned}\xi_t =& \Phi_x(t, S_{t-}, U_{t-}) \\ =& \oint_{\{J_1+J_2+\cdots+J_N=T-t\}} \mathbb{N}(\mathrm{d}_1(J_1,\cdots,J_N))\phi(J_1,\cdots,J_N)\mathrm{d}J_1,\cdots,\mathrm{d}J_N.\end{aligned}$$

下面我们利用 Matlab 得到 ξ_t 与 Black-Scholes 模型下 Delta 套期保值策略的数值结果. 为了方便起见, 我们假定马尔可夫链 U 仅有两个状态, 其状态转移概率为

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

另外，在下边的图形中我们将风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动模型简写为 Markov-modulated B-S, 将 Black-Scholes 模型简写为 B-S model. Markov-modulated B-S 模型的参数分别被假定为 $K=30$, $\sigma(1)=0.6$, $\sigma(2)=0.8$, $r(1)=0.03$, $r(2)=0.05$, $T-t=0.5$ 年. 考虑两个 Black-Scholes 模型，其中 Black-Scholes 模型 1 的参数分别被假定为 $K=30$, $\sigma=0.6$, $r=0.03$, $T-t=0.5$ 年， Black-Scholes 模型 2 的参数分别被假定为 $K=30$, $\sigma=0.8$, $r=0.05$, $T-t=0.5$ 年.

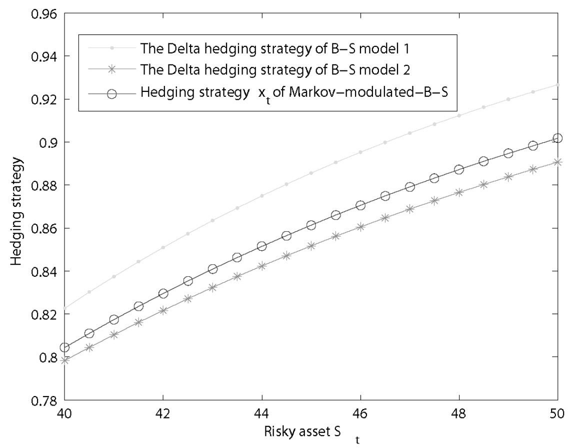

图 1 $T-t=0.5$ 年

从上图可以看出，随着股票的现价 S_t 的增加，当风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动模型时，投资者采取的局部风险最小对冲策略和 Black-Scholes 模型下采取的 Delta 套期保值策略在风险资产上的头寸都是增加的. 然而，由于马尔可夫链的影响，当投资者选取局部风险最小对冲策略时，投资者在风险资产上的头寸值在上述两个 Black-Scholes 模型的 Delta 套期保值策略的数值之间，这也说明了马尔可夫链的存在的确给投资者的套期保值策略带来了影响.

4　小结

近年来，有关 regime switching 模型受到国内外越来越多学者的关注，在衍生产品定价、风险度量、信用风险等金融领域有着广泛的应用，但在这个模型下有关局部风险最小套期保值的研究结果还是不多的. 本文假定风险资产的价格过程满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程，其中市场利率、风险资产的平均回报率和波动率以及跳的强度和幅度都依赖于市场经济状态，这些经济状态由一连续时间马尔可夫链来描述. 因为所考虑的市场是不完备的，等价鞅测度不是唯一的且市场中的未定权益不一定能够通过自融资策略来复制，本文给出了局部风险最小套期保值策略，并给出了当风险资产的价格过程满足马尔可夫调制的几何 Lévy 过程时最小鞅测度的表达式. 最后给出了马尔科夫调制的 Black-Scholes 模型下局部风险最小套期保值策略的数值解. 总的来说，本文推

广了 [8] 中的结果，考虑了马尔可夫调制的几何 Lévy 过程下欧式衍生产品的套期保值问题，文中的模型更加贴近金融市场，有着很好的经济解释.

致谢 本文作者对王文胜教授的指导以及审稿专家提出的宝贵意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Föllmer H, Sondermann D. Hedging of Non-redundant Contingent Claims. In: Hildenbrand W, Mas-Colell A (eds), “Contributions to Mathematical Economics”, 1986, 205–223

[2] Schweizer M. Hedging of Options in a General Semimartingale Model. ETH Zurich, 1988

[3] Schweizer M. Option Hedging for Semimartingales. *Stochastics Processes and Their Applications*, 1991, 37: 339–363

[4] Riesner M. Hedging Life Insurance Contracts in a Lévy Process Financial Market. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006, 38: 599–608

[5] Riesner M. Locally Risk Minimizing Hedging of Insurance Payment Streams. *Astin Bulletin*, 2007, 37: 67–91

[6] Vandaele N, Vanmaele M. Locally Risk Minimizing Hedging Strategy for Unit-linked Life Insurance Contracts in a Lévy Process Financial Market. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42: 1128–1137

[7] Chan T. Pricing Contingent Claims on Stocks Driven by Lévy Processes. *The Annals of Applied Probability*, 1999, 9(2): 504–528

[8] Deshpande A, Ghosh M K. Risk Minimizing Option Pricing in a Regime Switching Market. *Stochastic Analysis and Applications*, 2008, 26: 313–324

[9] Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

[10] Ghosh M K., Arapostathis A, Marcus S I. Ergodic Control of Switching Diffusions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1997, 35: 1952–1988

[11] 何声武，汪嘉冈，严加安. 半鞅与随机分析. 北京：科学出版社， 1995
(He S W, Wang J G, Yan J A. Semimartingale and Stochastic Analysis. Beijing: Science Press, 1995)

[12] Schweizer M. A Guided Tour Through Quadratic Hedging Approaches. Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, 2001, 538–574

[13] Elliott R J, han L L, Siu T K. Option Pricing and Esscher Transform Under Regime Switching. *Annals of Finance*, 2005, 1(4): 423–432

[14] Siu T K, Yang H L, Lau J W. Pricing Currency Options Under Two-factor Markov-modulated Stochastic Volatility Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 43: 295–302

Locally Risk Minimizing Hedging Strategy Under a Regime Switching Lévy Model

WANG Wei

(*Department of Mathematics, Ning Bo University, Ningbo* 315211)

(*E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn*)

QIAN Linyi

(*School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai* 200241)

WEN Limin

(*School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330022)

Abstract In this paper, we suppose that the risky asset follows a Markov-modulated Geometric Lévy process, the market interest rate, the appreciation rate and the volatility rate of the risky asset, and the intensity and magnitude of the jump depend on the states of the economy which are described by a continuous-time Markov chain. Since the market which we considered is incomplete, we find an optimal hedging strategy for a European contingent claim by employing the local risk minimization method. Then we also provide an example and obtain the numerical result of an optimal risk hedging strategy for a European call option under a Markov-modulated Geometry Brownian motion. Finally, this optimal risk hedging strategy and the Delta hedging strategy under the Black-Scholes model are compared in this paper, and prove that the uncertain factors of Markov chain will bring the impact on the investment decision of risk manager.

Key words regime switching; local risk minimization; Lévy process

MR(2000) Subject Classification 62P05; 60J175

Chinese Library Classification O211.9