

# 高超声速飞行器的 LPV 变增益状态反馈 $H_\infty$ 控制

王明昊<sup>1</sup>, 刘刚<sup>1</sup>, 赵鹏涛<sup>1</sup>, 杨述华<sup>2</sup>

(1. 第二炮兵工程大学, 西安 710025; 2. 第二炮兵驻某部军事代表室, 北京 100076)

**摘要:** 针对高超声速飞行器模型高度非线性、强耦合的特点, 提出了一种多胞形线性变参数系统 (Linear Parameter Varying, LPV) 变增益状态反馈  $H_\infty$  控制器的设计方法。首先在感兴趣的变参数轨迹上选取若干个平衡点进行雅克比线性化并拟合得到 LPV 模型, 将其离散化后存储于一张量中, 然后利用高阶奇异值分解 (Higher Order Singular Value Decomposition, HOSVD), 舍去较小和等于 0 的奇异值及对应的特征向量对其进行降秩重构处理, 得到了有限个 LTI 多胞顶点系统。在对各顶点进行状态反馈控制器设计时, 为降低保守性, 通过引入松弛变量, 将 Lyapunov 函数矩阵与系统矩阵解耦, 从而可以在不同的点使用不同的 Lyapunov 函数矩阵, 以此得到依赖变参数进行增益在线调节的控制器。最后的仿真结果表明了所设计的控制器能够使系统较快地跟踪指令信号, 并具有一定的鲁棒性能。

**关键词:** 高超声速飞行器; 变增益 LPV 系统; 张量; 高阶奇异值分解; 状态反馈

中图分类号: TP273 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2013)04-0488-08

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.04.006

## Variable Gain State Feedback $H_\infty$ Control for Hypersonic Vehicle Based on LPV

WANG Ming-hao<sup>1</sup>, LIU Gang<sup>1</sup>, ZHAO Peng-tao<sup>1</sup>, YANG Shu-hua<sup>2</sup>

(1. The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China;

2. The Second Artillery Military Representative Office, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Considering strong coupling and nonlinearity of the hypersonic vehicle model, a variable gain state feedback  $H_\infty$  robust controller design methodology based on polytopic LPV system is proposed. Firstly, Jacobian linearization is used on several balance points choose in the trajectory of the scheduling parameters to get the LPV models, then discretizing the system matrix and storing into a tensor, discarding smaller and zero singular values and their corresponding singular vectors through HOSVD, reconstructing the reduced-rank tensor to obtain a finite number of LTI polytopic vertex systems. To reduce the conservatism, a slack variable is inducted into the state feedback controller design for each vertex, and the Lyapunov function is made to be decoupled from system matrix, so we can design different Lyapunov function is made to be decoupled matrix on each vertex to get the parameter-dependent controller with gain adjusted on-line. The final simulation results show that the system using controller designed can follow the command signal rapidly and also have the robustness.

**Key words:** Hypersonic vehicle; LPV; Tensor; HOSVD; State feedback

### 0 引言

高超声速飞行,是指飞行器的飞行马赫数不小于 5 的飞行状态,包括火箭式高超声速系统和吸气

式高超声速系统两种基本实现方式。以火箭为动力的高超声速飞行技术目前相对较成熟,而以吸气式动力的高超声速飞行器技术,由于其重要的军事价值,正在成为各国极为关注的领域。鉴于高超声速

飞行器高度非线性和强耦合的特点, 给其控制器的设计提出了严峻的考验。2004年美国采用增益预置控制器设计方法的X-43A成功试飞<sup>[1-2]</sup>, 但值得注意的是, X-43A的试飞仅仅是为了在高超声速下对超燃冲压发动机进行验证, 整个过程为巡航下的直线飞行, 飞行包线变化范围小, 飞行时间短(10秒), 飞控系统的作用并未真正突显出来。当飞行包线范围扩大, 外界扰动增强时, 基于增益预置方法的控制器就会存有明显的缺陷, 特别是在控制可能发生故障时, 该方法有极其大量的增益预置表, 且切换过程中, 参数往往产生突变, 将严重影响到系统整体性能。因此, 在最近的控制器设计时, 很多先进的控制理论和控制方法诸如非线性动态逆<sup>[3]</sup>、滑模控制<sup>[4]</sup>等被应用到了高超声速飞行控制中来。

近几年, 有关LPV系统的研究得到了控制界的高度关注。LPV系统可以描述许多实际系统内在的非线性和时变特性, 能够使用线性控制理论的方法来解决非线性系统的问题, 进而设计变增益控制器。2000年, 著名学者Rugh和Shamma在Automatica上发表《Research on Gain-Scheduling》的文章中, 声称一切能够在陆地上、水中和太空中运动的机器都是通过变增益控制实现的<sup>[5]</sup>。

本文针对高超声速飞行器的物理模型, 将系统矩阵在参数的变化区间内离散化组成张量, 对其进行高阶奇异值分解得到有限个顶点模型, 利用凸理论和H<sub>∞</sub>鲁棒控制思想设计顶点控制器, 然后根据变参数的凸分解进行控制器增益的在线调节, 以保证飞行器在整个参数变化范围内的系统稳定性和鲁棒性。

## 1 高超声速飞行器LPV建模

### 1.1 模型描述

选用NASA风动实验所用的Winged-cone高超声速模型, 其几何和惯性参数、气动数据库以及发动机模型已经公开, 其在平衡巡航飞行条件( $M = 15$ ,  $V_0 = 4590.3\text{m/s}$ ,  $h_0 = 33528\text{m}$ ,  $\gamma_0 = 0^\circ$ ,  $q_0 = 0(\circ)/\text{s}$ )的运动方程如下<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{T\cos\alpha - D}{m} - \frac{\mu\sin\gamma}{r^2} \\ \dot{\gamma} &= \frac{L + T\sin\alpha}{mV} - \frac{(\mu - V^2r)\cos\gamma}{Vr^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{h} &= V\sin\gamma \\ \dot{\alpha} &= q - \dot{\gamma} \\ \dot{q} &= M_{yy}/I_{yy}\end{aligned}\quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned}L &= 0.5\rho V^2 s C_L \\ D &= 0.5\rho V^2 s C_D \\ T &= 0.5\rho V^2 s C_T \\ M_{yy} &= 0.5\rho V^2 s c (C_{M\alpha} + C_{M\delta_e} + C_{Mq}) \\ r &= h + R_E \\ C_L &= 0.6203\alpha \\ C_D &= 0.645\alpha^2 + 0.0043378\alpha + 0.003772 \\ C_T &= \begin{cases} 0.02576\beta, & \beta < 1 \\ 0.0224 + 0.00336\beta, & \beta \geq 1 \end{cases} \\ C_{M\alpha} &= -0.035\alpha^2 + 0.036617\alpha + 5.3261 \times 10^{-6} \\ C_{M\delta_e} &= c_e(\delta_e - \alpha) \\ C_{Mq} &= (c/2V)q(-6.796\alpha^2 + 0.3015\alpha - 0.2289)\end{aligned}\quad (2)$$

式中,  $C_L$ 表示升力系数;  $C_D$ 表示阻力系数;  $C_T$ 表示推力系数;  $C_{M\alpha}$ 、 $C_{M\delta_e}$ 、 $C_{Mq}$ 分别表示与攻角、舵偏角以及俯仰角速率有关的力矩系数;  $c$ 表示飞行器的参考长度;  $\delta_e$ 表示舵偏角;  $c_e$ 表示力矩常数;  $\beta$ 表示发动机节流阀;  $R_E$ 表示地球半径;  $\rho$ 表示空气密度;  $s$ 表示飞行器的参考面积。

发动机动态方程采用如下二阶系统模型:

$$\ddot{\beta} = -2\xi\omega_n\dot{\beta} - \omega_n^2\beta + \omega_n^2\beta_c\quad (3)$$

### 1.2 LPV建模

目前主要有三种方法可以将系统非线性模型表示为LPV系统的形式, 分别是雅克比线性化方法(Jacobian Linearization)、状态变换方法(State Transformations)和函数替换法(Function Substitution)。其中, 雅克比线性化方法是获取LPV模型最常用的方法, 对非线性系统的形式没有特殊的要求, 已经在许多种非线性系统中得到应用。本文采用此方法来获取高超飞行器的LPV模型, 其方法概述为从一组覆盖了感兴趣的工作区域内线性化后的LTI系统中得到LPV模型, 所得到的结果是原非线性系统在特定平衡点周围的局部近似。该方法的理论基础就是对非线性系统采用一阶Taylor

展开。

考虑如下式所示的非线性系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4)$$

对于它的任一个平衡点采用一阶 Taylor 展开，得到：

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Delta_x \mathbf{f} \mathbf{x}_\delta + \Delta_u \mathbf{f} \mathbf{u}_\delta \quad (5)$$

式中， $\mathbf{f}_e(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  表示系统位于平衡点处的取值， $\mathbf{x}_\delta = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ ， $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$ ， $\mathbf{x}_e$  和  $\mathbf{u}_e$  分别表示平衡点状态和平衡点输入， $\Delta_x \mathbf{f}$  表示函数  $\mathbf{f}$  相对于状态变量  $\mathbf{x}$  的导数， $\Delta_u \mathbf{f}$  表示函数  $\mathbf{f}$  相对于输入变量  $\mathbf{u}$  的导数。

在工作区域内选取一定数量的平衡点，然后进行上述的雅克比线性化，则可以得到一系列的平衡点附近的 LTI 系统，最后将这些线性化的局部系统进行数值拟合便可以得到系统的 LPV 模型。

根据高超声速飞行器模型，令

$$\begin{cases} f_1 = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - \frac{\mu \sin \gamma}{r^2} \\ f_2 = \frac{L + T \sin \alpha}{mV} - \frac{(\mu - V^2 r) \cos \gamma}{V^2 r} \\ f_3 = V \sin \gamma \\ f_4 = q - \dot{\gamma} \\ f_5 = M_{yy} / I_{yy} \end{cases} \quad (6)$$

高超声速飞行器平衡状态是其在给定的约束下，满足线速度和角速度为定值或零、加速度为零的特定飞行状态。选择  $V, h$  作为调度参量，故系统平衡点序列可由下面方程组求解。

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \\ f_5 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

由式(7)可得：

$$\begin{cases} T \cos \alpha - D = 0 \\ L + T \sin \alpha - \frac{m(\mu - V^2 r)}{r^2} = 0 \\ \dot{\gamma} = 0 \\ M_{yy} = 0 \\ q = \dot{\gamma} \\ V \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (8)$$

因此， $\dot{\gamma}_e = 0, q_e = 0, \gamma_e = 0$ ，同时由于攻角  $\alpha$  变化范围很小，令  $\tan \alpha \approx \alpha$  可得如下方程组：

$$\begin{cases} C_T \cos \alpha = 0.645 \alpha^2 + 0.0043378 \alpha + 0.003772 \\ m \mu - m V^2 r - \frac{1}{2} \rho V^2 s 0.6203 \alpha r^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 s \alpha C_D r^2 \\ \delta_{ee} = \alpha_e - C_{M\alpha} / c_e \end{cases} \quad (9)$$

定义如下偏差变量：

$$\begin{aligned} V_\delta(t) &= V(t) - V_e(V, h), \\ \gamma_\delta(t) &= \gamma(t) - \gamma_e(V, h), \\ h_\delta(t) &= h(t) - h_e(V, h), \\ \alpha_\delta(t) &= \alpha(t) - \alpha_e(V, h), \\ q_\delta(t) &= q(t) - q_e(V, h), \\ \beta_\delta(t) &= \beta(t) - \beta_e(V, h), \\ \delta_{e\delta}(t) &= \delta_e(t) - \delta_e(V, h) \end{aligned}$$

其中， $V_e(V, h)$ 、 $\gamma_e(V, h)$  等均为状态变量在系统平衡点处的取值，则原运动方程可表示为：

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_\delta \\ \dot{\gamma}_\delta \\ \dot{h}_\delta \\ \dot{\alpha}_\delta \\ \dot{q}_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\delta \\ \gamma_\delta \\ h_\delta \\ \alpha_\delta \\ q_\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \\ B_{51} & B_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\delta \\ \delta_{e\delta} \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中， $A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial V}, A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \gamma}, A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial V}, B_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \beta}$ ，其余同理。

将得到的一系列 LTI 模型进行数值拟合，即得到高超声速飞行器的 LPV 模型，记为：

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{x}_\delta + \mathbf{B}(\mathbf{p}) \mathbf{u}_\delta \quad (11)$$

式中： $\mathbf{x}_\delta = [V_\delta \ \gamma_\delta \ h_\delta \ \alpha_\delta \ q_\delta]^T, \mathbf{u}_\delta = [\beta_\delta \ \delta_{e\delta}]^T, \mathbf{p} = [V \ h]^T$  为调度参数向量。

### 1.3 LPV 模型的多胞形转换

LPV 系统的稳定性分析和控制器综合是基于在变参数轨迹上的一组 LMI，控制器可以由 LMI 的解

来构造,如果能够保证在整个变参数轨迹上 LMI 有解,则控制器就能保证闭环系统的稳定性和一定的性能指标。很明显,在整个变参数的轨迹上需要求解无穷个 LMI,这是难以实现的,或者将变参数网格化,转化为有限个 LMI 的问题,但是这种方法费时耗力,且网格化的密度和方法缺乏理论证明。如果所研究的 LPV 系统具有多胞形结构,由于多胞形属于凸集,它可由顶点完全描述,那么在进行稳定性分析和控制器设计时,无需对多胞体内的所有点进行分析和设计,而只对它的顶点进行设计即可,因而可大大减少计算量,同时可使控制器获得连续的增益并具有全局特性。

具有仿射参数依赖形式的 LPV 系统可以根据变参数的上下界组合很容易地表示成多胞形,继而进行稳定性分析和控制器综合。对于一般的 LPV 模型的多胞形表示,文献[7]提出了一种基于张量积转换的方法。其主要思想就是把 LPV 模型的变参数进行网格划分,然后把系统离散化并存储在一张量中,进而对其进行高阶奇异值分解(Higher Order Singular Value Decomposition, HOSVD),得到有限个 LTI 顶点系统及对应的权系数函数。

考虑高超声速飞行器的 LPV 系统状态空间模型式(11):

可以表示成如下形式:

$$S(p(t)) = \begin{pmatrix} A(p(t)) & B(p(t)) \\ C(p(t)) & D(p(t)) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(m+k) \times (m+l)} \quad (12)$$

矩阵是一个时变对象,其中  $p(t) \in \Omega$  为一时变的 2 维参数向量,是闭超立方体  $\Omega = [V_{\min}, V_{\max}] \times [h_{\min}, h_{\max}] \subset \mathbf{R}^2$  中的一个元素。 $S(p(t))$  可以利用任意的变参数  $p(t)$  与 LTI 系统  $S_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \mathbf{R}^{O \times I} = \mathbf{R}^{(m+k) \times (m+l)}$  的凸组合进行逼近, $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$  也被称为顶点系统。因此可以通过定义权系数函数  $w_n(p_n(t))$ ,使得  $S(p(t))$  可以表示成  $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$  的凸组合。这种凸组合可以通过张量积的形式表达,如下式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \otimes_{n=1}^N w_n(p_n(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,行向量  $w_n(p_n(t)) \in \mathbf{R}^{I_n}$  ( $n = 1, \dots, N$ ) 包含权系数函数  $w_{n,i_n}(p_n)$  ( $i_n = 1, \dots, I_n$ )。函数  $w_{n,i_n}(p_n(t)) \in [0, 1]$  表示定义在紧集  $\Omega$  的第  $n$  维

的第  $i_n$  个单变量权系数函数, $p_n(t)$  表示向量  $p(t)$  的第  $n$  个元素, $I_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) 表示权系数函数的维数大小, $(N + 2)$  维张量  $S \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times O \times I}$  是由 LTI 顶点系统  $S_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \mathbf{R}^{O \times I}$  组成的。

式(13)所表示的系统只是原系统的近似,它与原 LPV 系统的误差用式(14)表示,误差与 LTI 顶点系统的个数成反比。如果令 LTI 顶点系统的个数为无穷大,则理论上可以精确逼近原系统。一般情况下,为了便于分析和设计,根据系统可容忍的误差大小,选择有限个 LTI 顶点系统。

$$\|S(p(t)) - S \otimes_{n=1}^N w_n(p(t))\|_{L_2} \leq \varepsilon \quad (14)$$

根据上述分析,得到 LPV 系统多胞分解的一般步骤:

(1) 将待分解的 LPV 模型离散化,主要包括以下几个过程:

(a) 定义变参数空间  $\Omega$ :

$$p(t) \in \Omega = [V_{\min}, V_{\max}] \times [h_{\min}, h_{\max}];$$

(b) 对变参数空间  $\Omega$  的每一维进行等距的网格划分: $\theta_{n,h_n} = a_n + \frac{b_n - a_n}{H_n - 1}(h_n - 1)$ ,  $h_n = 1, \dots, H_n$ ,每一维网格线的数为  $H_n$ ;

(c) 在划分好的参数空间上离散化给定的函数  $S(p(t))$ ;

(d) 将离散化后的一系列矩阵存储于张量  $S^D$  中,上标  $D$  代表离散化的意思。

(2) 对张量  $S^D$  的前  $N$  维进行高阶奇异值分解,在每一维中,舍弃等于 0 或者很小的奇异值,以及与之相对应的奇异值向量,得到下式:

$$S^D \approx_{\gamma} S \otimes_{n=1}^N U_n \quad (15)$$

$\gamma$  代表了顶点系统与原系统之间的误差。

(3) 构造连续的权系数函数,矩阵  $U_n$  的第  $i_n$  ( $i_n = 1, \dots, I_n$ ) 个列向量  $u_n$  便确定了变量  $p_n(t)$  的离散权函数  $w_{n,i_n}(p_n(t))$ 。

至此,我们得到了一般 LPV 系统的多胞形表示:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B(p)u \\ y = C(p)x + D(p)u \end{cases} \quad (16)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \in \Theta \triangleq \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \right\}$$

## 2 多胞形 LPV 系统的变增益状态反馈 $H_\infty$ 控制

### 2.1 问题描述

在对 LPV 系统进行鲁棒稳定性分析和变增益控制器设计时,通常的做法是基于二次稳定性的概念来寻求解决办法。其思想是要求对于所有可能的变参数轨迹,系统存在一个统一的 Lyapunov 函数,显然这样的处理使得对于系统的分析和综合在很大程度上得以简化,然而,也正是由于选取了一个共同的 Lyapunov 函数矩阵去适应所有的变参数,因而所获得的结果不可避免地引入了较大的保守性。

本文基于参数依赖 Lyapunov 函数方法来代替二次稳定性中的单一 Lyapunov 矩阵,考虑参数的变化,导出系统稳定性条件。将控制系统的稳定性归结为在整个变参数集内寻找一系列正定对称矩阵,避免寻找一个满足不等式组的公共 Lyapunov 矩阵的困难,进而降低二次稳定性概念中由于采用一个单一 Lyapunov 矩阵而引进的保守性。由此提出一种变增益状态反馈  $H_\infty$  控制器的新方法,通过引入附加矩阵解除系统矩阵和参数依赖 Lyapunov 函数之间的耦合,利用多凸概念,将变参数空间内无穷 LMIs 求解转化为其顶点集的 LMIs 求解,从而使控制器设计便于进行凸优化求解,更易于数值实现。

考虑如下多胞 LPV 系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z = C_1(p)x + D_{11}(p)w + D_{12}(p)u \end{cases} \quad (17)$$

其中:  $x \in \mathbf{R}^n$  是状态向量,  $u \in \mathbf{R}^m$  是控制输入,  $z \in \mathbf{R}^r$  是被控输出,  $w \in \mathbf{R}^q$  是参考输入、外部扰动,  $p \in \Omega$  为可测变参数,预先知道其取值范围,则上述多胞形 LPV 系统可以用下列矩阵表述:

$$\begin{aligned} S(p) &= \begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2(p) \\ C_1(p) & D_{11}(p) & D_{12}(p) \end{bmatrix} \\ &= w_1 S(\Pi_1) + \cdots + w_n S(\Pi_n) \end{aligned} \quad (18)$$

$\{\Pi_i\}_{i=1}^n$  为多胞形系统的顶点,  $S(p)$  位于具有顶点  $S(\Pi_i)$  的矩阵多项式中。

对于多胞 LPV 系统,设计与其具有同样多胞形结构的变增益状态反馈控制器  $K(p)$ ,使得闭环系统满足以下的性质:

(1) 闭环系统是内部稳定的,即其状态矩阵的所有特征值均在左半开复平面中;

(2) 从扰动输入  $w$  到被控输出  $z$  的闭环传递函数  $T_{wz}(s)$  的  $H_\infty$  范数小于性能指标  $\gamma$ 。

根据  $H_\infty$  控制器存在的条件,考虑实际情况,对系统作如下假设:

- (1)  $B_2(p), D_{12}(p)$  不依赖于  $p$ ;
- (2) 对  $p \in \Omega$ , 系统的  $[A(p), B_2]$  可二次稳定。

其中,(1)主要是从计算角度考虑,如果其中的矩阵是参数依赖的,则会导致系统非凸,从而出现需要计算无穷个约束 LMI,对一般的 LPV 系统可以通过对控制输入  $u(t)$  引入前置或后置滤波器来满足,具体内容可参考文献[8],在此不再赘述;(2)则是系统存在状态反馈控制器的充要条件。

### 2.2 控制器设计

引理 1(顶点性质)<sup>[8]</sup>. 考虑如式(16)所示的多胞形 LPV 系统,则下列结论是等价的:

(1) 此 LPV 系统稳定,且具有二次  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ ;

(2) 存在一个对称正定矩阵  $P$ , 对于所有的

$$\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \in \Omega, \text{ 满足}$$

$$\begin{bmatrix} A^T(p)P + PA(p) & PB(p) & C^T(p) \\ * & -\gamma I & D^T(p) \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

(3) 存在一个对称正定矩阵,满足下列 LMI 组:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & PB_i & C_i^T \\ * & -\gamma I & D_i^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

其中,“\*”表示对称转置项,下同。

引理 2<sup>[9]</sup>. 下列条件是等价的:

$$(1) \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

(2) 存在矩阵  $\tilde{G}$  使得下式成立

$$M + \begin{bmatrix} N^T \\ -I \end{bmatrix} \tilde{G}^T + \tilde{G} \begin{bmatrix} N & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中,  $I$  为单位矩阵,  $M, N$  为任意矩阵。引理 2 在约束和变量之间增加维度的空间中,产生了一个扩展条件,而且松弛变量  $\tilde{G}$  在检验一类问题中提供了额

外的灵活度。应用上述引理可以使得系统矩阵与 Lyapunov 函数矩阵实现解耦。

**定理 1.** 系统式(16)鲁棒稳定且具有二次 H<sub>∞</sub> 性能指标  $\gamma$  的充要条件为存在一个正定对称矩阵  $P$  满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B(p) & P \\ 0 & -\gamma I & D(p) & 0 \\ B^T(p) & D^T(p) & -\gamma I & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

证. 将上式展开后根据顶点性质即可得到。

**定理 2.** 多胞形 LPV 系统式(16)鲁棒稳定且具有二次 H<sub>∞</sub> 性能指标  $\gamma$ , 当且仅当存在  $n$  个正定对称矩阵  $P_i, i = 1, \dots, n$ , 以及矩阵  $G$  满足下列 LMI:

$$\begin{bmatrix} A_i G + G^T A_i^T & G^T C_i^T & B_i & P_i - G^T \\ * & -\gamma I & D_i & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

那么设计的多胞状态反馈控制器  $K(p)$  将保证在变参数  $p$  的整个范围内闭环系统都内稳定, 同时外部干扰  $w$  到输出  $z$  之间具有二次 H<sub>∞</sub> 性能  $\gamma$ , 且各顶点的控制器  $K_i = L_i G^{-1}$ 。

证. 将控制器代入满足假设条件的多胞 LPV 系统中, 得到闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(p) + B_2 K(p)]x(t) + B_1(p)w \\ z(t) = [C_1(p) + D_{12} K(p)]x(t) + D_{11}(p)w \end{cases} \quad (27)$$

由于  $K(p) = \sum_{i=1}^n w_i K_i, A(p) = \sum_{i=1}^n w_i A_i, B_1(p) = \sum_{i=1}^n w_i B_{1i}, C_1(p) = \sum_{i=1}^n w_i C_{1i}, D_{11}(p) = \sum_{i=1}^n w_i D_{11i},$

其中:

$$\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \right\}$$

“\*”表示对称转置项。

证. 根据引理 1 与定理 1, 令:

$$\tilde{G}^T = [G \ 0 \ 0 \ 0], N^T = \begin{bmatrix} A(p) \\ C(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B(p) & P \\ * & -\gamma I & D(p) & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

并代入式(22)中并展开, 得到下式:

$$\begin{bmatrix} A(p)G + G^T A^T(p) & G^T C^T(p) & B(p) & P_i - G^T \\ * & -\gamma I & D(p) & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

根据顶点性质即可得证。

**定理 3.** 对多胞 LPV 系统式(17), 设计具有同样多胞结构的状态反馈控制器, 如果存在  $n$  个正定对称矩阵  $P_i, n$  个矩阵  $L_i, i = 1, \dots, n$ , 以及矩阵  $G$  满足下列 LMI:

$$\begin{bmatrix} A_i G + G^T A_i^T + B_{2i} L_i + L_i^T B_{2i}^T & G^T C_{1i} + L_i^T D_{12}^T & B_{1i} & P_i - G^T \\ * & -\gamma I & D_{11i} & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

可得:

$$\begin{bmatrix} A(p) + B_2 K(p) & B_1(p) \\ C_1(p) + D_{12} K(p) & D_{11}(p) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n w_i \begin{bmatrix} A_i + B_{2i} K_i & B_{1i} \\ C_{1i} + D_{12i} K_i & D_{11i} \end{bmatrix} \quad (28)$$

由上式可见, 闭环系统矩阵同样具有多胞结构。由定理 2 可知, 对于具有多胞结构的闭环系统式(27), 鲁棒稳定且具有二次 H<sub>∞</sub> 性能指标  $\gamma$ , 当且仅当存在  $n$  个正定对称矩阵  $P_i, i = 1, \dots, n$ , 以及矩阵  $G$  满足下列 LMI:

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_2 K_i)G + G^T(A_i + B_2 K_i)^T & G^T(C_{1i} + D_{12}K_i)^T & B_{1i} & P_i - G^T \\ * & -\gamma I & D_{11i} & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

令  $K_i G = L_i$  整理后即可得到式(26)。证毕。

### 3 仿真与分析

为了检验本文所设计鲁棒变增益控制器的正确性,对式(1)所示的高超声速飞行器非线性模型进行仿真。选取高超声速飞行器的速度范围为 4500m/s ~ 4700m/s,飞行高度的变化范围为 33400m ~ 33700m,选取 12 个平衡点,得到 12 个 LTI 模型,采用多元线性拟合的方法进行数据拟合,得到高超声速飞行器的 LPV 模型,调度参数为速度  $V$  及高度  $h$ 。如式(30)所示:

$$\dot{x}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} x_\delta + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{52} \end{bmatrix} u_\delta \quad (30)$$

将其在速度和高度变化范围内离散化并存储在张量中,进行高阶奇异值分解并按照大小顺序进行排列,得到的奇异值如下所示(限于篇幅,表中只给出了最大的前五阶奇异值):

表 1 张量的奇异值分解结果

Table 1 Singular value decomposition of tensor

展开矩阵	$A_{(1)}$	$A_{(2)}$
第一阶奇异值	$7.9677 \times 10^3$	$7.9677 \times 10^3$
第二阶奇异值	$1.8990 \times 10^{-1}$	$6.1387 \times 10^{-2}$
第三阶奇异值	$6.1386 \times 10^{-2}$	$6.1195 \times 10^{-9}$
第四阶奇异值	$3.7357 \times 10^{-11}$	$1.3207 \times 10^{-12}$
第五阶奇异值	$2.8508 \times 10^{-12}$	$8.2255 \times 10^{-13}$

根据分解结果,保留展开矩阵  $A_{(1)}$  的前三个奇异值和  $A_{(2)}$  的前 2 个奇异值,得到 6 个顶点模型以及调度参数权函数,如图 1、图 2 所示。

由定理 3 对其进行控制器设计,并在 0 时刻起给定飞行速度指令  $V_c = 80\text{m/s}$  和飞行高度指令  $h_c = 100\text{m}$ ,得到飞行器的速度和高度变化曲线如图 3、图 4 所示。

由图 3、4 可以看出,系统能快速地跟踪速度和

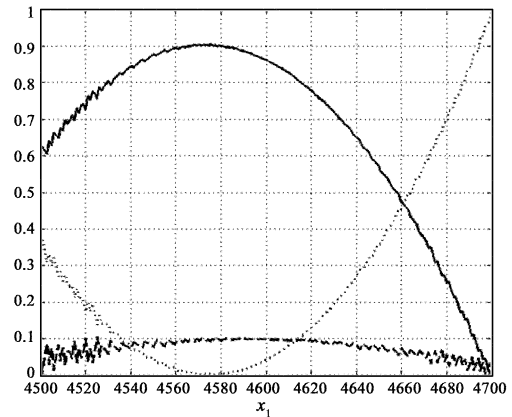


图 1 变参数  $V$  的系数权函数

Fig. 1 Coefficient weight function of velocity

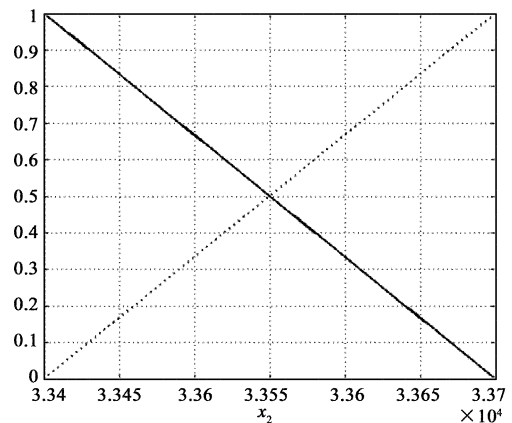


图 2 变参数  $h$  的系数权函数

Fig. 2 Coefficient weight function of altitude

高度指令信号,具有良好的动态跟踪性能。验证了所设计的控制器的正确性。

### 4 结论

本文针对高超声速飞行器模型高度非线性、强耦合的特点,首先对其非线性模型进行雅克比线性化处理并拟合得到 LPV 模型,离散化后存储于一张量中,然后利用高阶奇异值分解,舍去较小和等于 0 的奇异值及对应的特征向量对其进行降秩重构处理,得到了有限个 LTI 多胞顶点系统。在对各顶点进行状态反馈  $H_\infty$  控制器设计,通过引入松弛变量,将 Lyapunov

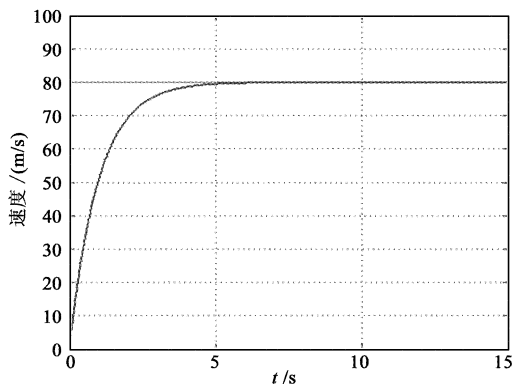


图3 速度变化曲线

Fig. 3 Curve of velocity

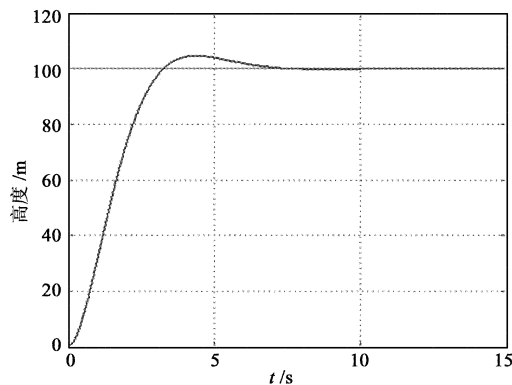


图4 高度变化曲线

Fig. 4 Curve of altitude

函数矩阵与系统矩阵解耦,从而可以在不同的点使用不同的 Lyapunov 函数矩阵,以此降低控制器的保守性,从而得到依赖变参数进行增益在线调节的控制器。最后的仿真结果表明了所设计的控制器能较快地跟踪指令信号,并具有一定的鲁棒性能。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Davidson J, Lallman F, McMinn J D. Flight control laws for NASA's Hyper-X research vehicle [ C ]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Portland, August 1 - 11, 1999.
- [ 2 ] Bahm C, Baumann E, Martin J. The X-43A hyper-X mach 7 flight 2 guidance, navigation, and control overview and flight test results [ C ]. The 13th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies, Switzerland, July 10 - 13, 2005.
- [ 3 ] Xu H J, Mirmirani M, Ioannou P A. Robust neural adaptive control of a hypersonic aircraft [ C ]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Austin, April 1 - 8, 2003.
- [ 4 ] Xu H J, Ioannou P A, Mirmirani M. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle [ J ]. Journal of

Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(5):829 - 838.

- [ 5 ] Rugh W, Shamma J. Research on gain scheduling [ J ]. Automatica, 2000, 36(10):1401 - 1425.
- [ 6 ] Wang Q, Stengel R F. Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft [ J ]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(4): 577 - 584.
- [ 7 ] Petres Z. Polytopic decomposition of linear parameter-varying models by tensor-product model transformation [ D ]. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2006.
- [ 8 ] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example [ J ]. Automatica, 1995, 31(9):1251 - 1261.
- [ 9 ] Peaucelle D, Arzelier D. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions [ J ]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(4):624 - 630.
- [ 10 ] Szeidl L, Baranyi P, Petres Z, et al. Numerical reconstruction of the HOSVD based canonical form of polytopic dynamic models [ C ]. The 3rd International Symposium on Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Agadir, March 28 - 30, 2007.
- [ 11 ] Baranyi P. TP model transformation as a way to LMI-Based controller design [ J ]. IEEE Transaction on Industrial Electronics, 2004, 51(2): 387 - 400.
- [ 12 ] 刘燕斌,陆宇平,何真.高超声速飞机鲁棒自适应控制的研究 [ J ]. 宇航学报, 2006, 27(5): 903 - 907. [ Liu Yan-bin, Lu Yu-ping, He Zhen. Research on robust adaptive control for hypersonic vehicle [ J ]. Journal of Astronautics, 2006, 27(5): 903 - 907. ]
- [ 13 ] 秦伟伟,郑志强,刘刚,等.高超声速飞行器的LPV鲁棒变增益控制 [ J ]. 系统工程与电子技术, 2011, 6(31): 1327 - 1331. [ Qin Wei-wei, Zheng Zhi-qiang, Liu Gang, et al. Robust variable gain control for hypersonic vehicles based on LPV [ J ]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 6(31): 1327 - 1331. ]
- [ 14 ] 虞忠伟,陈辉堂.机器人多胞变增益输出反馈 $H_\infty$ 控制 [ J ]. 控制理论与应用, 2003, 20(6):925 - 932. [ Yu Zhong-wei, Chen Hui-tang. Polytopic gain scheduling output feedback  $H_\infty$  control for robotic manipulators [ J ]. Control Theory and Applications, 2003, 20(6): 925 - 932. ]

作者简介:

王明昊(1984 -),男,博士研究生,主要研究方向为LPV系统控制、鲁棒模型预测控制。

通信地址:陕西西安第二炮兵工程大学7系(710025)

电话:(029)84741357

E-mail:54985963@qq.com

(编辑:曹亚君)