

## 稀疏补分析模型下迭代硬阈值正交投影

张宗念<sup>1\*</sup>, 李金徽<sup>2</sup>, 黄仁泰<sup>3</sup>, 闫敬文<sup>4</sup>

(1. 东莞理工学院 电子工程学院, 广东 东莞 523808; 2. 东莞理工学院 网络中心, 广东 东莞 523808;

3. 东莞理工学院 计算机学院, 广东 东莞 523808; 4. 汕头大学 电子工程系, 广东 汕头 515063)

(\* 通信作者电子邮箱 zzn99@sohu.com)

**摘要:**为了从含噪声的测量矢量中重构信号,研究了稀疏补分析模型理论及其迭代硬阈值正交投影算法。通过采用稀疏补正交投影修改了稀疏补分析模型下迭代硬阈值算法的迭代追踪过程;分析了迭代步长和稀疏补取值大小对算法收敛速度和重构性能的影响,找出了选取最优迭代步长和最佳稀疏补取值方法;提出并实现了稀疏补分析模型下迭代硬阈值正交投影算法,给出了算法收敛的充分条件和重构信号误差范围。仿真实验结果表明,算法的平均运算时间仅仅为 AIHT、AL1 和 GAP 算法的 19%、11% 和 10%;算法重构信号的综合平均峰值信噪比 (PSNR) 比 AIHT 算法提高了 0.89 dB,但比 AIHT、AL1 算法稍逊色。算法在满足给定条件下能够以高概率实现含噪信号重构,重构信号的综合平均 PSNR 与典型算相比没有明显下降,但运算时间大为缩短,收敛速度更快。

**关键词:**稀疏补分析模型;迭代;硬阈值;正交投影;信号重构;压缩感知

**中图分类号:** TN911.7 **文献标志码:** A

### Iterative hard thresholding orthogonal projection under cosparsity analytical model

ZHANG Zongnian<sup>1\*</sup>, LI Jinhui<sup>2</sup>, HUANG Rentai<sup>3</sup>, YAN Jingwen<sup>4</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China;

2. Network Center, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China;

3. School of Computer Science, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China;

4. Department of Electronic Engineering, Shantou University, Shantou Guangdong 515063, China)

**Abstract:** To reconstruct the original signal from a set of linear measurements with noise, the cosparsity analytical model theory was analyzed and the hard thresholding orthogonal projection algorithm under the cosparsity analysis model was proposed. The cosparsity orthogonal projection strategy was used to improve the iterative process for the proposed algorithm, and the methods for selecting iterative step size and the length of cosparsity were given. The sufficient condition of convergence for the algorithm and the reconstructed signal error range between the reconstructed signal and the original one were provided. The experiments show that the CPU running time of the algorithm is only equal to 19%, 11% and 10% of AIHT, AL1 and GAP algorithms, and the average Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) of reconstructed signal improves 0.89 dB than that of AIHT but degrades a little bit than that of AL1 and GAP. It is concluded that the proposed algorithm can reconstruct the signal with Gaussian noise in high probability with very short running time or faster convergence speed than that of the current typical algorithm when some conditions are satisfied.

**Key words:** cosparsity analysis model; iteration; hard thresholding; orthogonal projection; signal reconstruction; compressed sensing

## 0 引言

在信号处理领域经常遇到如下问题:从一组含有噪声的测量矢量  $y = Mx + e$  中重构原始信号矢量  $x \in \mathbb{R}^d$ , 其中测量矩阵  $M \in \mathbb{R}^{m \times d}$  (通常  $m < d$ ) 已知,  $e$  为加性有界噪声且满足  $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ 。此方程有无穷个解,要找到唯一解,需要知道  $x$  的部分先验知识,如假设它是稀疏的。这种稀疏性假设将产生两种信号表示模型,即稀疏综合模型与稀疏补分析模型<sup>[1]</sup>,两种模型下的信号优化方法是不同的。在稀疏综合模型下,通常假定  $x$  在给定字典  $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$  ( $d \leq n$ ) 下的表示系数  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  是  $k$  稀疏的,即存在矢量  $\alpha$  使得  $x = D\alpha$ , 且  $\|\alpha\|_0 = k$ , 则重构  $x$  可通过求解  $\arg \min \|\alpha\|_0$ , 约束条件  $\|y - M D\alpha\|_2 \leq \varepsilon$ , 即

先求  $\alpha$  再用  $x = D\alpha$  重构出  $x$ 。在稀疏补分析模型下,如果  $x$  在已知分析运算符 (分析字典)  $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times d}$  (与  $M$  不同,且通常  $p > d$ ) 下的分析表示矢量为  $\Omega x$ , 并含有  $l = p - \|\Omega x\|_0$  个零元素, 则称  $x$  是  $l$  稀疏补的。该模型把焦点集中到  $\Omega x$  的零元素而不是非零元素上, 重构  $x$  变成求方程  $\hat{x} = \arg \min \|\Omega x\|_0$  并满足约束条件  $\|y - Mx\|_2 \leq \varepsilon$ 。

近十年来,国内外学者对稀疏综合模型进行了深入研究<sup>[2-7]</sup>,取得了一系列成果,但是在稀疏补分析模型下信号的优化研究是近三年的事情<sup>[8]</sup>,国内还没有公开发表的文献报道。直接求解稀疏补分析模型下的优化方程是一个 NP-hard 问题,故只能求近似最优解,方法有两类:一是采用 L1 范数法 (Analysis L1 norm algorithm, AL1)<sup>[8]</sup>, AL1 算法的重构性能很

收稿日期:2013-02-04;修回日期:2013-04-09。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(40971206);东莞市科技计划项目(2011108102038)。

作者简介:张宗念(1963-),男,河北深州人,副教授,博士,主要研究方向:压缩感、图像分析与处理;李金徽(1980-),男,辽宁沈阳人,工程师,主要研究方向:分布式计算机网络;黄仁泰(1964-),男,广东东莞人,副教授,主要研究方向:嵌入式系统设计;闫敬文(1964-),男,吉林磐石人,教授,博士生导师,主要研究方向:图像处理和分析、遥感图像处理。

好,但是由于要搜索全局最优解,算法收敛速度慢;二是采用各种贪婪追踪策略。Nam等<sup>[9-10]</sup>于2011年提出贪婪分析追踪算法(Greedy Analysis Pursuit, GAP),从一个满支撑集补开始追踪,每一次迭代去掉其中的一个元素,直到迭代满足终止条件为止,最后一次迭代的支撑集补就是最终解。此算法可获得与ALI相当的重构性能,不足之处是迭代需要遍历整个支撑集,收敛速度也慢。Giryas等<sup>[11]</sup>于2011年提出的分析迭代硬阈值算法(Analysis Iterative Hard Thresholding, AIHT)把稀疏综合模型下的硬阈值概念<sup>[12-15]</sup>直接搬到稀疏补分析模型中,也取得了不错的信号重构效果,但是没有考虑稀疏补分析模型下分析字典 $\Omega$ 和分析表示矢量 $\Omega x$ 的结构特点、算法收敛的充要条件以及如何提高算法收敛速度等问题。本文在AIHT算法的基础上,采用稀疏补正交投影修改算法的迭代追踪方法,试图解决AIHT算法收运算时间长、收敛速度慢的缺点,提出了稀疏补分析模型下的迭代硬阈值正交投影算法(Cospase Analysis Iterative Hard Thresholding orthogonal projection algorithm, CAIHT),给出了满足 $\Omega$ 有限等距特性( $\Omega$ -Restricted Isometry Property,  $\Omega$ -RIP)的分析矩阵类型,以及存在近似最优投影前提条件下算法收敛的充分条件,并给出了重构信号与原始信号的误差范围,实现了信号以高概率重构,并通过仿真实验进行了验证。

## 1 稀疏补分析模型

若分析字典为 $\Omega \in \mathbf{R}^{p \times d}$ ,则定义 $A = \text{cosupp}(\Omega x)$ 表示 $\Omega x$ 中零元素的索引集,即 $A = \{j: \langle w_j, x \rangle = 0, j \in A, w_j \in \Omega\}$ ;  $\text{cosupp}(\Omega x, l)$ 表示 $\Omega x$ 中 $l$ 个最小元素的索引集; $\Omega_A$ 表示由 $\Omega$ 中属于 $A$ 的行向量 $w_j$ 构成的子矩阵; $\text{Range}(\Omega_A^T)$ 表示矩阵 $\Omega_A^T$ 的列空间; $W_A = \{x: \langle w_j, x \rangle = 0, j \in A\}$ ,或者说 $W_A = \text{span}\{w_j: w_j \in \Omega^T, j \in A^c\}$ ,即 $A$ 上的行向量张成子空间的正交补。由矩阵理论可知 $W_A = \text{Range}(\Omega_A^T)^\perp = \text{Null}(\Omega_A)$ 成立。定义 $A_l = \bigcup_{A \in L_l} W_A$ 是在 $A$ 上的稀疏补矢量张成子空间的并, $L_l = \{A: |A| \geq l, A \subset [p]\}$ 是稀疏补大于或等于 $l$ 的所有支撑集补的集合; $Q_A = I - \Omega_A^T \Omega_A$ 表示在 $\text{range}(\Omega_A^T)$ 正交补上的正交投影; $P_A = I - Q_A = \Omega_A^T \Omega_A$ 表示在 $\text{range}(\Omega_A^T)$ 上的正交投影。矩阵 $M$ 的最大奇异值为 $\sigma_M$ 。下文“ $\Omega$ 处于通常位置”指 $\Omega \in \mathbf{R}^{p \times d}$ 中任意 $d$ 个行向量之间是线性独立的;“完全重构信号 $x$ ”是指能够完全重构 $x$ 的真实支撑集补 $A$ 。

**定理1** 对于任意 $z \in A_l$ ,如果 $\delta_l$ 满足 $(1 - \delta_l) \|z\|_2 \leq \|Mz\|_2 \leq (1 + \delta_l) \|z\|_2$ ,则称矩阵 $M$ 满足常数 $\delta_l$ 的 $\Omega$ -RIP特性,且有 $\|MQ_A\|_2 \leq (1 + \delta_l)$ <sup>[16]</sup>。

**定理2** 对于任意 $A \in L_l$ ,当且仅当 $\|Q_A((I - M^*M)Q_A)\|_2 \leq \delta_l$ 时,矩阵 $M$ 满足 $\Omega$ -RIP特性<sup>[16]</sup>。

## 2 迭代硬阈值正交投影算法

### 2.1 算法实现过程

信号 $x$ 在分析字典 $\Omega$ 下的稀疏补为 $l$ ,在测量矩阵 $M$ 下,测量矢量 $y = Mx + e$ , $e$ 为加性噪声,求稀疏补为 $l$ 的信号估计值 $\hat{x}_{\text{CAIHT}}$ ,算法实现步骤如下:

步骤1 初始化信号估计值 $\hat{x}^0 = 0$ 和迭代次数 $i = 0$ ,并输入 $M, \Omega, l$ ;

步骤2 开始循环迭代 $i = i + 1$ ;

步骤3 计算信号过渡值 $\hat{x}^i = \hat{x}^{i-1} + \mu^i M^*(y - M\hat{x}^{i-1})$ ;

步骤4 对信号过渡值进行硬阈值运算 $\hat{x}_i^i = S_l(\hat{x}_i^i)$ ,其中硬阈值运算符 $S_l(x)$ 是 $x$ 把中 $l$ 个最小元素以内的元素置零,保留其他元素值不变的非线性运算;

步骤5 计算长度为 $l$ 的支撑补上的正交投影 $Q_{\hat{A}^i} \hat{x}_i^i$ 以及投影的二次范数最小值 $\hat{A}^i = \arg \min_{\hat{A}} \|Q_{\hat{A}^i} \hat{x}_i^i\|_2^2$ ,约束条件 $|\hat{A}^i| = l$ ,找出第 $i$ 次循环的支撑补估计值 $\hat{A}^i$ ;

步骤6 计算在 $\hat{A}^i$ 上的本次迭代信号估计值 $\hat{x}^i = Q_{\hat{A}^i} \hat{x}_i^i$ ;

步骤7 判断终止条件是否满足,若不满足,转到循环开始处,终止条件为 $i = i_{\max}$ 或者 $\|\hat{x}^i - \hat{x}^{i-1}\|_2 \leq C_{\text{Terminal}} \|\hat{x}^i\|_2$ ;

步骤8 若满足终止条件,则循环迭代结束,并给出最终估计解 $\hat{x}_{\text{CAIHT}} = \hat{x}^i$ 。

### 2.2 迭代步长选取方法

迭代步长 $\mu^i$ 的选择十分重要,选得太小,算法可能会得到局部解;选得太大,算法无法收敛。有三种选择方法:一是步长为固定值,这需要不断地实验才能找到最优步长。二是通过计算 $\mu^i := \arg \min_{\mu} \|y - M\hat{x}^i\|_2^2$ 找出最优可变步长。由于 $\hat{x}^i = Q_{\hat{A}^i} \hat{x}_i^i$ 和 $\hat{A}^i = \text{cosupp}(S_l(\hat{x}_i^i))$ ,所以计算最优可变步长时需要对不同的 $\mu$ 值进行线性搜索。三是采用自适应步长。与文献[13]类似采用试探法,限定支撑集补搜索范围 $\hat{A} = \text{cosupp}(S_l(M^*(y - M\hat{x}^{i-1}) \cap \hat{A}^{i-1}))$ ;由于 $\hat{x}^i = Q_{\hat{A}^i} \hat{x}_i^i$ ,故寻找 $\mu^i$ 就变成了求 $\mu^i = \arg \min_{\mu} \|y - (\hat{x}^{i-1} + \mu Q_{\hat{A}^{i-1}} M^*(y - M\hat{x}^{i-1}))\|_2^2$ ,此过程不需要线性搜索,且有简单闭合解。

### 2.3 稀疏补 $l$ 的选取方法

以稀疏补 $l$ 取值为目标决定了算法的投影步骤。在流行的稀疏综合模型中,过渡估计信号的稀疏度值对算法重构性能是有益的。类似地,在稀疏补分析模型中,欠估计稀疏补 $l$ 的值对算法性能是有益的。根据文献[8]的命题3,为了从 $y = Mx$ 和 $\Omega_{A^c} = 0$ 中重构 $x$ ,确定 $\tilde{A}$ 的充分条件是 $\kappa_{\Omega}(\tilde{l}) \leq m/2$ ,其中 $\kappa_{\Omega}(\tilde{l}) = \max_{A \in L_{\tilde{l}}} (\dim(W_A))$ 为 $\tilde{l}$ 的函数, $\tilde{A}$ 是 $A$ 的子集, $\tilde{l} := |\tilde{A}| < l := |A|$ 。在无噪声时,可以用较小的 $\tilde{l}$ 代替 $l$ ;有噪声时, $l$ 取值较大的去噪效果会更好。当 $\Omega$ 处于通常位置时, $\kappa_{\Omega}(\tilde{l}) = \max(d - l, 0)$ ,用 $\tilde{l}$ 代替 $l$ ,选取 $\tilde{l} = \min(d - m/2, l)$ ,这样对改进算法性能更有利。

### 2.4 算法稳定重构条件

假定 $M$ 在所考虑的子空间上是bi-Lipschitz,双常数为 $B_L$ 和 $B_U$ ,则对所有的稀疏矢量 $V_1, V_2$ ,有 $B_L \|(V_1 + V_2)\|_2 \leq \|M(V_1 + V_2)\|_2 \leq B_U \|(V_1 + V_2)\|_2$ ,用 $1 - \delta_{2l-p}$ 和 $1 + \delta_{2l-p}$ 分别代替 $B_L$ 和 $B_U$ ,把文献[13]的定理2应用到CAIHT,则有如下定理。

**定理3** 假定CAIHT算法中迭代步长 $\mu$ 选取固定值,常数 $C_l = 1, 1 + \delta_{2l-p} \leq 1/\mu \leq 1.5(1 - \delta_{2l-p})$ <sup>[16]</sup>,那么经 $i^*$ 次迭代后,CAIHT算法可以稳定重构信号,而且重构信号与原信号误差满足 $\|x - \hat{x}^{i^*}\|_2 \leq C_3 \varepsilon$ ,其中 $C_3$ 是 $\delta_{2l-p}, \mu$ 的函数。

定理中各个常数的选择如下:当 $\Omega$ 为酉矩阵时, $C_l = C_{2l-p} = 1$ ,此时 $\Omega$ -RIP条件变成 $\delta_{2l-p} < \delta_l(1, \sigma_M^2) = 1/3$ 。若 $\Omega$ 为非酉矩阵,比如均值为零、方差为 $1/\sqrt{d}$ 的随机高斯矩阵, $\sigma_M$ 取值十分重要,可用 $1 + \sqrt{d/m}$ 描述<sup>[16]</sup>,例如 $d/m = 1.5$ ,可以得到 $\sigma_M^2 \approx 5$ ,此时要保证 $C_l \leq 1.25$ ,这对于近似最优估

影的质量十分重要。

**定理 4** 给定随机矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times d}$ , 对于任意  $z \in \mathbf{R}^d$ , 常数  $C_M > 0, \varepsilon_i > 0$ , 若  $m \geq 32((p-l)\log(9p/(\varepsilon_i(p-l))) + t)/(C_M \varepsilon_i^2)$  成立, 则经过第  $i$  次迭代后,  $\delta_i \leq \varepsilon_i$  将以大于  $1 - e^{-i}$  的概率成立。

对于处于通常位置的  $\Omega$ , 要求  $l < d, m < d, p < 2d$ , 参见文献[17-18]。如果  $\Omega$  较大, 那么其行向量之间的线性相关性也更大, 此时稀疏补  $l$  可能会大于  $d$ , 这也解释了为什么  $\Omega$  内行向量之间线性相关性越强对算法的重构性能更有益。

### 3 仿真实验

#### 3.1 测试算法对含噪声的高维信号重构性能

本实验在四核 CPU 主频 3.06 MHz、内存 12 MB 的图形工作站上完成。由标准正交矩阵与独立同分布高斯随机矢量的乘积产生  $d = 4096$  维的原始信号  $x$ , 矩阵  $M$  采用独立同分布构成的随机矩阵,  $\Omega$  采用二维全变分运算符<sup>[19]</sup>, 并把均值为零、方差为  $1E-6$  的高斯噪声加到测量矢量中。选取 6 组不同的  $m$  和  $l$  值, 即改变取样率  $\delta = m/d$  和  $\rho = (d-l)/m$  的值, 求出各种算法重构信号的峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR):

$$PSNR = 20 \lg(\|x\|_2 / \|\hat{x} - x\|_2)$$

其中算法 AL1、GAP 和 AIHT 分别采用文献[8, 10-11]的方法。这里 CAIHTC 和 CAIHTA 分别表示采用固定步长的 CAIHT (Constant CAIHT, CAIHTC) 和自适应可变步长的 CAIHT (Adaptive CAIHT, CAIHTA)。实验结果见图 1。

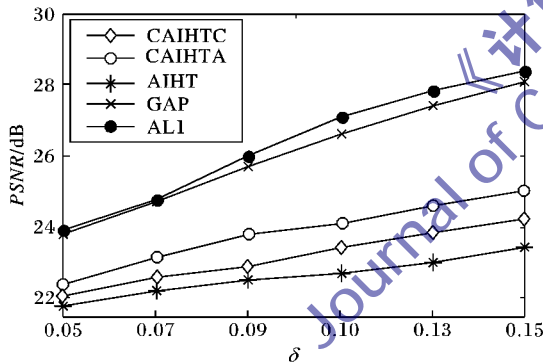


图 1 峰值信噪比对比

从图 1 中数据对比可知, CAIHTA 和 CAIHTC 算法重构信号的平均峰值信噪比为 23.83 dB、23.15 dB, 而 AIHT 的平均峰值信噪比为 22.60 dB, 新算法 CAIHTA 和 CAIHTC 分别高出了 1.23 dB 和 0.55 dB, 综合平均提高了 0.89 dB。但是新算法的重构性能不及 AL1 和 GAP, 这主要是由于新算法采用硬阈值处理增加了逼近误差的原因, 但换来了算法收敛速度的大幅提高。

#### 3.2 测试算法的运算时间

本实验条件与 3.1 节相同, 取 6 组不同的  $\delta$  和  $\rho$  值, 求出各个算法的 CPU 运算时间 (单位: s), 结果见图 2。

从图 2 中的数据对比可知, 新算法 CAIHTA 和 CAIHTC 的平均运算时间为 5.32 s 和 4.55 s; 而 AIHT 的平均运算时间为 25.72 s; AL1 和 GAP 算法的平均运算时间分别为 49.10 s 和 44.72 s。新算法的平均运算时间仅仅为 AIHT、AL1 和 GAP 算法的 19%、11% 和 10%, 或者说算法收敛速度提高了 4 倍、8.9 倍、9 倍。

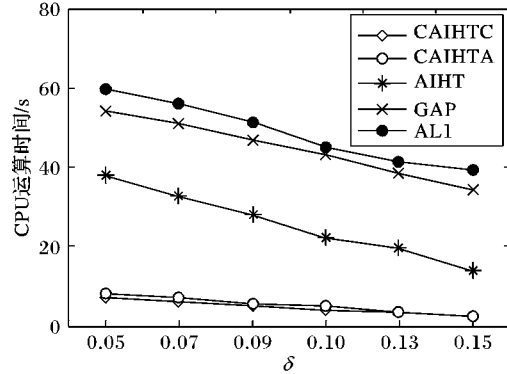


图 2 运算时间对比

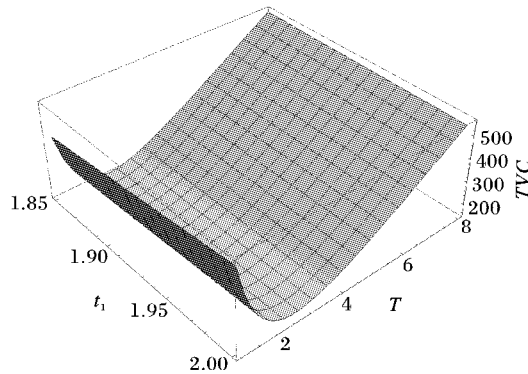
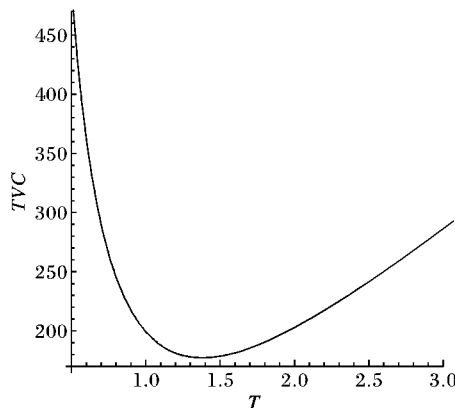
### 4 结语

分析了稀疏综合模型和稀疏补分析模型下含噪声信号的优化重构方法的区别与联系, 阐述了稀疏补分析模型的基础理论及其硬阈值迭代算法, 通过引入稀疏补投影修改了稀疏补分析模型下迭代硬阈值重构算法的迭代步长和稀疏补取值的选取方法, 给出了算法收敛的充分条件和重构信号误差范围。通过实验证实了采用简单投影可以得到良好的信号重构性能的可行性; 在保证信号重构性能没有明显下降的前提下, 极大地降低了算法的运算时间, 提高了收敛速度; 也证明了分析字典  $\Omega$  内行向量间线性相关性越强, 对改善信号重构效果越有利。需要注意, 选择哪种类型的分析字典  $\Omega$  及其选取多大常数, 才能找到近似最优投影和最优重构效果, 尚需进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] ELAD M, MILANDFAR P, RUBINSTEIN R. Analysis versus synthesis in signal priors[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23(3): 947-968.
- [2] 张宗念, 黄仁泰, 闫敬文. 压缩感知信号盲稀疏度重构算法[J]. *电子学报*, 2011, 39(1): 18-22.
- [3] 张宗念, 李金徽, 黄仁泰. 迭代硬阈值压缩感知重构算法——IIHT[J]. *计算机应用*, 2011, 31(8): 2123-2125.
- [4] 李蕴华. 压缩感知框架下基于 ROMP 算法的图像精确重构[J]. *计算机应用*, 2011, 31(10): 2714-2716.
- [5] 郭莹, 邱天爽. 基于改进子空间追踪算法的稀疏信道估计[J]. *计算机应用*, 2011, 31(4): 907-909.
- [6] 蔡体健, 樊晓平, 刘遵雄. 基于稀疏表示的高噪声人脸识别及算法优化[J]. *计算机应用*, 2012, 32(8): 2313-2315.
- [7] CANDÈS E J, ELDAR Y C, NEEDLELL D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59-73.
- [8] DONOHO D L, ELAD M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via  $l^1$  minimization[J]. *Proceedings of National Academy Science*, 2003, 100(5): 2197-2202.
- [9] NAM S, DAVIES M, ELAD M, et al. Cospase analysis modeling — uniqueness and algorithms [C]// ICASSP 2011: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Piscataway: IEEE, 2011: 5804-5807.
- [10] NAM S, DAVIES M E, ELAD M, et al. The cospase analysis model and algorithms [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 34(1): 30-56.
- [11] GIRYES R, NAM S, GRIBONYAL R, et al. Iterative cospase projection algorithms for the recovery of cospase vectors [C]// EU-SIPCO-2011: Proceedings of the 19th European Signal Processing Conference. Barcelona, Spain: [s. n.], 2011.



图2 成本函数  $TVC$  随着  $t_1, T$  的变化图3 成本函数  $TVC$  随着  $T$  的变化

## 6 结语

本文研究了一类短缺量拖后率随缺货时间变化而变化的非立即变质性物品的库存模型。其中,物品的需求受当前库存水平的影响,当库存水平为正值时,市场需求受销售价格影响;当库存为负值时,不能满足的需求被部分拖后,拖后率在缺货期间已经发生的缺货量有关。且物品有一定生命周期,在其生命周期内不发生变质,超出其最大生命周期时开始变质,即变质率随时间变化。因此,本模型更具有一般性,更加符合现代化的高科技生产制造业实际情形,而且给出了模型最优解存在的条件,最后用实例说明了模型的实际应用。进一步可以研究的方向是需求受顾客当场付款比例和延期支付水平影响的情况、随机需求情况等。

### 参考文献:

- [1] WEE H M. A deterministic lot-size inventory model for deteriorating items with shortages and a declining market [J]. *Computers and Operations Research*, 1995, 22(2): 345 - 356.
- [2] WEE H M, LAW S P. Economic production lot size for deteriorating items taking account of the time-value of money [J]. *Computers and Operations Research*, 1999, 26(6): 545 - 558.
- [3] SANA S S. Demand influenced by enterprises' initiatives a multi-item EOQ model of deteriorating and ameliorating items [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(2): 284 - 302.
- [4] WIDYADANA G A, CÁRDENAS-BARRÁN L E. Economic order quantity model for deteriorating items with planned backorder level [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 54(1): 1569 - 1575.
- [5] WIDYADANA G A, WEE H M. Optimal deteriorating items production inventory models with random machine breakdown and stochastic repair time [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(2): 3495 - 3508.
- [6] SARKAR B, SAREN S, WEE H M. An inventory model with variable demand, component cost and selling price for deteriorating items [J]. *Economic Modelling*, 2013, 30(4): 306 - 310.
- [7] GIRI B C, JALAN A K, CHAUDHURI K S. Economic order quantity model with Weibull deterioration distribution, shortage and ramp-type demand [J]. *International Journal of Systems Science*, 2003, 34(4): 237 - 243.
- [8] MANNA S K, CHAUDHURI K S. An EOQ model with ramp type demand rate, time dependent deterioration rate, unit production cost and shortages [J]. *European Journal of Operation Research*, 2006, 171(5): 557 - 566.
- [9] LOA S T, WEE H M, HUANG W C. An integrated production-inventory model with imperfect production processes and Weibull distribution deterioration under inflation [J]. *International Journal of Production Economics*, 2007, 106(2): 248 - 260.
- [10] 闵杰, 周永务. 存货影响销售率的非立即变质物品的库存模型 [J]. *系统工程学报*, 2009, 24(2): 198 - 204.
- [11] SANA S S. Optimal selling price and lot-size with time varying deterioration and partial backlogging [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010b, 217(4): 185 - 194.
- [12] SARKAR B. An EOQ model with delay in payments and time varying deterioration rate [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, 55(3/4): 367 - 377.
- [13] 闵杰, 周永务. 带有时变短缺量拖后率且需求依赖库存水平的库存模型 [J]. *系统管理学报*, 2010, 19(2): 222 - 227.
- [14] 闵杰, 周永务. 库存水平影响需求变化的供应链协调 [J]. *复旦学报: 自然科学版*, 2007, 46(4): 523 - 533.
- [15] 闵杰. 需求依赖库存的库存控制和供应链协调模型研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2009: 43 - 54.
- [16] SANA S S, CHAUDHURI K S. A deterministic EOQ model with delays in payments and price discount offers [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 184(5): 509 - 533.
- [12] FOUCAIT S. Hard thresholding pursuit: an algorithm for compressive sensing [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 2011, 49(6): 2543 - 2563.
- [13] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 27(3): 265 - 274.
- [14] BLUMENSATH T. Accelerated iterative hard thresholding [J]. *Signal Processing*, 2012, 92(3): 752 - 756.
- [15] B BLUMENSATH T, DAVIES M E. Sampling theorems for signals from the union of finite-dimensional linear subspaces [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(4): 1872 - 1882.
- [16] GIRYES R, NAM S, ELAD M, *et al.* Greedy-like algorithm for the cospars analysis model [J/OL]. [2013 - 04 - 09]. *Linear Algebra and its Applications*, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379513001870>.
- [17] FOUCAIT S. Sparse recovery algorithms: sufficient conditions in terms of restricted isometry constants [C]// *Approximation Theory XIII: San Antonio 2010: Springer Proceedings in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 2010, 13: 65 - 77.
- [18] GIRYES R, ELAD M. RIP-based near-oracle performance guarantees for SP, CoSaMP, and IHT [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1465 - 1468.
- [19] NAM S, DAVIES M E, ELAD M, *et al.* Recovery of cospars signals with greedy analysis pursuit in the presence of noise [C]// *CAMSAP 2011: The 4th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*. Piscataway: IEEE, 2011: 361 - 364.

(上接第 2389 页)