

# 火箭发动机燃烧过程无记忆鲁棒镇定的 积分不等式方法

李 涛, 张合新, 孟 飞  
(第二炮兵工程学院自动化系, 西安 710025)

**摘 要:** 研究了液体火箭发动机燃烧室燃烧过程的无记忆鲁棒镇定问题。通过构造适当的 Lyapunov 泛函并结合积分不等式变换技巧, 将所得的非线性矩阵不等式转化为可解的线性矩阵不等式, 导出了不确定时滞系统可鲁棒镇定的时滞相关条件。与现有方法相比, 该方法不涉及模型变换技术, 因而减少了理论与计算上的复杂性。同时在较大的参数变化范围内保证了燃烧过程的鲁棒镇定。最后通过数值仿真验证了其有效性。

**关键词:** 火箭发动机; 燃烧; 鲁棒镇定; 线性矩阵不等式; 积分不等式

中图分类号: TP13 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2010)12-2788-06

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2010.12.025

## Integral Inequality Approach to Memoryless Robust Stabilization of Combustion Process in Rocket Motor

LI Tao, ZHANG He-xin, MENG Fei  
(Department of Automation, Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** The memoryless robust stabilization of the combustion process in liquid propellant rocket motor chambers is investigated in this paper. By constructing appropriate Lyapunov functional combined with an integral inequality transformation technique, nonlinear matrix inequalities are transformed into linear ones and delay-dependent conditions for robust stabilization of the uncertain system with discrete delay are derived. Compared with existing methods, the proposed approach doesn't involve the model transformation technique so that the complexity both in theory and computation can be reduced. And it is guaranteed that the combustion can be robustly stabilized over larger variation intervals of parameters. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of the method.

**Key words:** Rocket motors; Combustion; Robust stabilization; Linear matrix inequality (LMI); Integral inequality

### 0 引 言

液体火箭发动机燃烧室内燃烧过程的动态模型是一不稳定时滞系统<sup>[1-2]</sup>, 近年来受到不少学者的关注和研究<sup>[3-9]</sup>。Fiagbedzi 与 Pearson<sup>[3]</sup> 利用矩阵特征等式降阶技术最先对该系统的鲁棒镇定进行了研究, 并设计了线性反馈控制器。郑锋<sup>[4-5]</sup> 通过设计变结构控制器, 提高了系统响应参数摄动的鲁棒性并缩短了状态收敛时间。

随着线性矩阵不等式技术的兴起, 2001 年, Moon 等<sup>[6]</sup> 利用凸优化算法设计了此系统的无记忆反馈控制器。郑锋<sup>[7]</sup> 和陈武华<sup>[8]</sup> 分别于 2002 和 2007 年利用模型变换结合交叉项界定技术对非一致滞后条件下的系统模型进行了研究, 得出了系统鲁棒稳定和鲁棒可镇定的充分条件, 但模型变换一方面可能引入不稳定动态, 另一方面带来理论推导和数值计算上的复杂性, 同时交叉项界定技术也是保守性的主要来源。2008 年, Jafarov<sup>[9]</sup> 利用拉格朗

日均值定理,对一致滞后条件下的系统模型作适当变换,进而通过构造新的 Lyapunov 泛函导出了系统可鲁棒镇定的时滞相关条件,该方法虽然思路比较新,但应用于燃烧过程控制时所获得的参数可镇定范围较小。

总结以上研究成果,本文通过构造适当的 Lyapunov 泛函并结合不等式变换技巧,建立了火箭发动机燃烧过程的无记忆线性反馈控制器。较之上述方法,该方法在理论和计算复杂性方面有所降低,从数值仿真来看,其鲁棒镇定的性能相比文献[3]和[9]也有一定提高。

### 1 问题描述

考虑带有反馈伺服机构的单一燃料液体火箭发动机,液体燃料从射入燃烧室加热到即将燃烧的临界状态,需要一段时间(这就是燃烧的时滞)。整个馈送系统如图 1 所示,其中燃烧室中的压力是通过调节燃料泵出口处的压力来实现的。

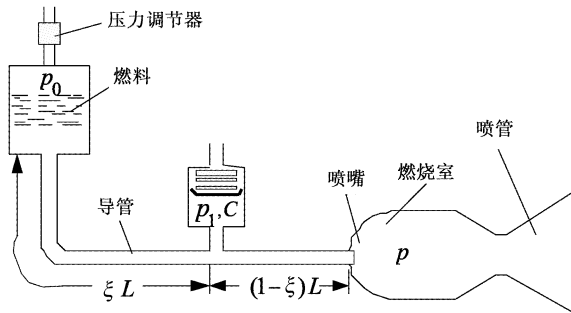


图 1 液体火箭发动机馈送系统示意图

Fig. 1 Feeding systems of liquid propellant rocket motors

假定非恒稳流动并考虑一致滞后情况下,整个系统的动态方程<sup>[1-3]</sup>如下:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = (\gamma - 1)\phi(t) - \gamma\phi(t - \delta) + \mu(t - \delta) \\ \dot{\mu}_1(t) = \frac{1}{\xi J} \left[ -\psi(t) + \frac{p_0 - p_1}{2\Delta p} \right] \\ \dot{\mu}(t) = \frac{1}{(1 - \xi)J} \left[ -\mu(t) + \psi(t) - p\phi(t) \right] \\ \dot{\psi}(t) = \frac{1}{E_e} [\mu_1(t) - \mu(t)] \end{cases} \quad (1)$$

其中  $t$  为对  $\theta_g$  归一化的时间(reduced time),设真实时间为  $\bar{t}$ ,则这里的时间  $t$  为  $t = \bar{t}/\theta_g$ ,  $\theta_g$  为燃气通过时间(gas residence time),即热燃气从被燃烧产生到经过喷口喷射出去的平均时间;  $\delta = \bar{\tau}/\theta_g$ ,  $\bar{\tau}$  表示稳

定情况下燃料从喷入到开始燃烧之间的时滞;  $\phi(t) = (p(t) - \bar{p})/\bar{p}$ ,  $p(t)$  是燃烧室内的瞬时压力,  $\bar{p}$  是稳定状态燃烧室内的平均压力;  $\mu(t) = (\dot{m}_i - \dot{m})/\dot{m}$ ,  $\dot{m}_i$  是时刻  $t$  喷入燃料的质量速率,  $\dot{m}$  是流过整个系统的燃料的稳态质量速率;  $\mu_1(t) = (\dot{m}_1 - \dot{m})/\dot{m}$ ,  $\dot{m}_1$  为时刻  $t$  从燃料泵到弹簧容器口之间的燃料流过的瞬时质量速率;  $\psi(t) = (p_1(t) - \bar{p}_1)/(2\Delta p)$ ,  $p_1(t)$  为时刻  $t$  作用在弹簧容器口处的压力,  $\bar{p}_1$  是稳定状态  $p_1(t)$  的值,  $\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}$  表示稳定状态从弹簧容器口到喷嘴处的压降,  $p_0$  是供给压强  $p = \bar{p}/2\Delta p$  的调节气压,即燃料泵出口处的压力;  $\gamma$  是压强指数,表征燃烧室中从热燃气到喷入的液体燃料的传热速率与压力之间关系的一个指数;  $\xi$  表示供给压强的小数长度,  $J$  表示流路上的惯性参数,  $E_e$  表示流路上的弹性参数。选取  $u = (p_0 - p_1)/(2\Delta p)$  为控制变量,并取  $\gamma = 1, \xi = 0.1, p = 1, J = 2, E_e = 1$ 。令

$$\mathbf{x}(t) = [\phi(t) \quad \mu_1(t) \quad \mu(t) \quad \psi(t)]^T$$

那么系统可化为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - \delta) + \mathbf{B}_0u(t) \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \gamma - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

假定初始函数取为:  $\mathbf{x}(\theta) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\theta \in [-1, 0]$ , 时滞  $\delta = 1$ , 采样时间间隔取为 0.01, 则系统不加控制( $u = 0$ )时的运动曲线如图 2 所示,显然此时系统的运动是不稳定的,这表明如果不调节从燃气泵到弹簧容器入口处的压力降(即  $p_0 = p_1$ ),火箭发动机燃烧室的燃烧过程是不稳定的。

### 2 时滞系统鲁棒镇定

考虑如下含单点时滞的线性控制系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}_0u(t) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (3)$$

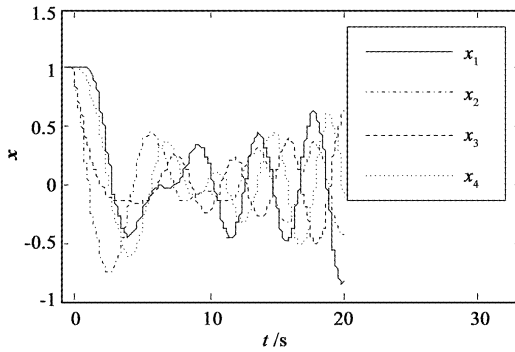


图 2 燃烧室燃烧过程的自由运动曲线

Fig.2 Free motion of combustion in chambers

其中  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态向量,  $u(t) \in \mathbf{R}$  是控制输入,  $A_0(t)$  和  $A_1(t)$  满足:

$$A_i(t) = A_i + \Delta A_i(t), (i = 0, 1) \quad (4)$$

不确定部分满足:

$$[\Delta A_0(t) \quad \Delta A_1(t)] = DF(t)[E_0 \quad E_1] \quad (5)$$

上述  $A_i, B_0, D, E_i$  均为适当维数的定常矩阵, 而  $F(t)$  是具有可测元的不确定矩阵, 且满足  $F^T(t)F(t) \leq I, \forall t$ .  $I$  表示适当维数的单位矩阵.

这一部分的目的是设计一个无记忆状态反馈控制器:

$$u(t) = Kx(t) \quad (6)$$

鲁棒镇定连续时滞系统(3), 其中  $K \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  是定常增益矩阵.

文中证明过程用到的引理:

引理 1<sup>[10]</sup> (Schur 补). 对于分块矩阵  $S =$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}, S < 0 \text{ 成立的充分必要条件是下面两个}$$

条件之一成立:

(a)  $S_{11} < 0$ , 且  $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;

(b)  $S_{22} < 0$ , 且  $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

引理 2<sup>[11]</sup>. 任意定常矩阵  $M \in \mathbf{R}^{n \times n}, M = M^T > 0$ , 标量  $\gamma > 0$ , 向量函数  $x: [0, \gamma] \rightarrow \mathbf{R}^n$  的以下相关积分项有定义, 则有:

$$\left(\int_0^\gamma x(s) ds\right)^T M \left(\int_0^\gamma x(s) ds\right) \leq \gamma \int_0^\gamma x^T(s) M x(s) ds$$

引理 3<sup>[12]</sup>. 给定具有适当维数的矩阵  $Q = Q^T, H, E$ , 则:

$$Q + HF(t)E + E^T F^T(t)H^T < 0$$

对任意满足  $F^T(t)F(t) \leq I$  的  $F(t)$  成立的充要条件是存在  $\varepsilon > 0$ , 使得:

$$Q + \varepsilon^{-1} H H^T + \varepsilon E^T E < 0$$

下面考虑不确定系统(3)的标称系统(7)的稳定性问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (7)$$

定理 1. 若存在适当维数的正定对称矩阵  $P, Q$  和  $R$ , 使得如下线性矩阵不等式

$$\Xi = \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + Q - R & P A_1 + R & \tau A_0^T R \\ * & -R - Q & \tau A_1^T R \\ * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

成立, 则标称系统(7)是渐近稳定的.

证. 构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V(t, s, \theta) = V_1(t) + V_2(t, s) + V_3(t, s, \theta) \quad (9)$$

这里:

$$V_1(t) = x^T(t) P x(t)$$

$$V_2(t, s) = \int_{t-\tau}^t x^T(s) Q x(s) ds$$

$$V_3(t, s, \theta) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta$$

取 Lyapunov 泛函  $V(t, s, \theta)$  对时间  $t$  求导可得:

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t)$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t) Q x(t) - x^T(t - \tau) Q x(t - \tau)$$

$$\dot{V}_3(t) = \tau^2 \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$$

由引理 2 可得:

$$\begin{aligned} & -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq \\ & -\left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds\right)^T R \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds\right) \end{aligned} \quad (10)$$

将式(7)和(10)代入  $\dot{V}(t)$  有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \cdot \\ & \left\{ \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + Q - R & P A_1 + R \\ * & -R - Q \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} A_0^T \\ A_1^T \end{bmatrix} \tau^2 R \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对不等式右边二次型的矩阵项应用 Schur 补, 并将所得矩阵分别左乘、右乘相同维数的对角阵  $\text{diag}(I, I, \tau R)$  可得:

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (11)$$

若  $\Xi < 0$ , 可知存在充分小正数  $\varepsilon$  使得  $\dot{V}(t) < -\varepsilon \|x(t)\|^2, (x(t) \neq 0)$  成立, 即  $\dot{V}(t) < 0$  成立, 由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性准则<sup>[13]</sup> 可得标称系统 (7) 是渐近稳定的, 定理得证。

注 1. 本文中 \* 表示对称矩阵中的对称项, 即:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

下面考虑标称系统 (7) 的反馈镇定问题。

定理 2. 若存在正定对称矩阵  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$  以及适当维数的矩阵  $Z$ , 使得如下线性矩阵不等式:

$$H = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & A_1 \bar{R} & \Pi_{13} & \bar{P} \\ * & -\bar{R} & \tau \bar{R} A_1^T & 0 \\ * & * & -\bar{R} & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

成立, 则标称系统 (7) 在控制器 (6) 的作用下是渐近稳定的, 且反馈增益  $K = Z\bar{P}^{-1}$ , 这里:

$$\Pi_{11} = A_0 \bar{P} + \bar{P} A_0^T + A_1 \bar{P} + \bar{P} A_1^T + B_0 Z + Z^T B_0^T$$

$$\Pi_{13} = \tau \bar{P} A_0^T + \tau Z^T B_0^T + \tau \bar{P} A_1^T$$

证. 设存在状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  使系统渐近稳定, 则由定理 1 可知闭环系统渐近稳定的充分条件为存在适当维数的正定对称矩阵  $P, Q$  和  $R$ , 使矩阵不等式

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_k^T P + P A_k + Q - R & P A_1 + R & \tau A_k^T R \\ * & -R - Q & \tau A_1^T R \\ * & * & R \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立, 其中  $A_k = A_0 + B_0 K$ 。

由于矩阵不等式 (13) 中存在非线性项  $A_k^T P$  等, 因此无法直接利用 LMI 方法求解。为了求得反馈增益  $K$ , 采用下列步骤将非线性矩阵不等式线性化:

令矩阵  $S = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ P^{-1} & R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix}$ , 则有:

$$S^T \Omega S = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & A_1 R^{-1} & \tau P^{-1} (A_k^T + A_1^T) \\ * & -R^{-1} & \tau R^{-1} A_1^T \\ * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} Q P^{-1} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P^{-1} Q P^{-1} & P^{-1} Q R^{-1} & 0 \\ * & R^{-1} Q R^{-1} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} < 0$$

其中  $\Omega_{11} = P^{-1} A_k^T + A_k P^{-1} + P^{-1} A_1^T + A_1 P^{-1}$ 。

由于:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} Q P^{-1} & P^{-1} Q R^{-1} & 0 \\ * & R^{-1} Q R^{-1} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} \\ R^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} P^{-1} & R^{-1} & 0 \end{bmatrix} > 0$$

倘若:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & A_1 R^{-1} & \tau P^{-1} (A_k^T + A_1^T) \\ * & -R^{-1} & \tau R^{-1} A_1^T \\ * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{-1} Q P^{-1} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

则  $S^T \Omega S < 0$  成立。对 (14) 应用 Schur 补有:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & A_1 R^{-1} & \tau P^{-1} (A_k^T + A_1^T) & P^{-1} \\ * & -R^{-1} & \tau R^{-1} A_1^T & 0 \\ * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

令  $Z = K P^{-1}, \bar{P} = P^{-1}, \bar{Q} = Q^{-1}, \bar{R} = R^{-1}$ , 代入上述矩阵即可得出结论。

下面考虑不确定系统 (3) 的鲁棒镇定问题。

推论 1. 若存在标量  $\varepsilon > 0$  和正定对称矩阵  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ , 以及适当维数的矩阵  $Z$ , 使得如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} H & M D & \varepsilon E^T \\ * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

成立, 则不确定系统 (3) 在控制器 (6) 的作用下是渐近稳定的, 且反馈增益  $K = Z\bar{P}^{-1}$ , 这里:

$$M = [I \quad 0 \quad \tau I]^T$$

$$E = [(E_0 + E_1) \bar{P} \quad E_1 \bar{R} \quad 0 \quad 0]$$

证. 以  $A_0(t)$  和  $A_1(t)$  分别代替矩阵  $H$  中的  $A_0$  和  $A_1$ , 并分离不确定项可得:

$$H + M D F(t) E + E^T F^T(t) D^T M^T < 0$$

由引理 3 可得:

$$H + \varepsilon^{-1} M D D^T M^T + \varepsilon E^T E < 0 \quad (17)$$

应用 Schur 补, 并将所得矩阵分别左乘、右乘相同

维数的对角阵  $\text{diag}(I, \dots, I, \varepsilon I)$  即可推出结论。

### 3 燃烧过程镇定

利用 Simulink 模块进行数值仿真可知, 当时滞参数满足  $0 \leq \delta < 0.756$  时, 燃烧过程方程(2)的自由运动 ( $u(t) = 0$ ) 是稳定的; 而当  $\delta \geq 0.756$  时, 方程(2)的自由运动不稳定。

下面来研究本文设计的控制器对系统的镇定性能以及对参数摄动的鲁棒性。

#### (1) 系统镇定性能

同样为线性反馈下, 文献[9]利用拉格朗日方法计算的系统可镇定的时滞上界值为  $\delta = 0.898$ , 增益  $K = [-89.125 \quad -20.000 \quad -215.161 \quad -125.040]$ ; 由本文定理2中的线性矩阵不等式  $\mathbf{II}$  计算可得, 不等式可行的时滞参数上界值为  $\delta = 0.999995$ , 取  $\delta = 0.8$  则  $K = [6.406 \quad -5.780 \quad 16.267 \quad -13.404]$ 。将增益  $K$  代入燃烧过程方程并仿真可得图3与图4如下。

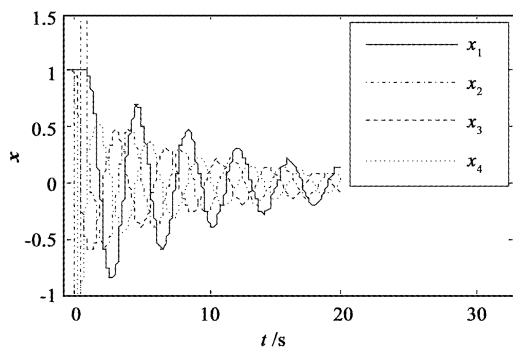


图3 系统(2)在文献[9]控制器作用下的响应  
Fig.3 Response of system (2) with controller in[9]

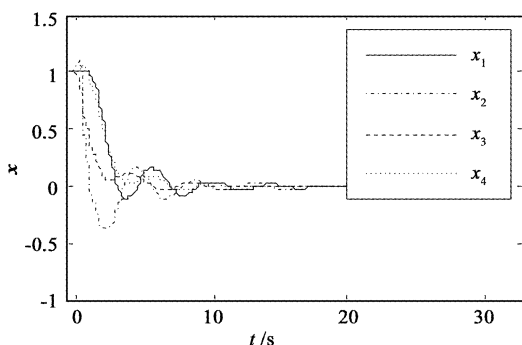


图4 系统(2)在本文控制器作用下的响应  
Fig.4 Response of system (2) with controller in this paper

由图可知, 利用文献[9]方法镇定后的状态曲线振荡幅度比较大, 收敛也比较慢; 而利用本文方法

镇定的状态曲线振荡较小, 收敛也比较快。与文献[5]的变结构控制方法相比, 本文方法镇定后的状态曲线初始振荡超调较小, 控制输入为线性反馈, 控制器易于实现, 系统相对比较稳定; 而变结构控制的优点是状态收敛速度相对快些, 但初始时刻振荡超调较大, 控制输入抖振过大, 不利于控制器的实现和系统的稳定。

#### (2) 参数摄动的鲁棒性

对于火箭发动机的燃烧过程, 燃烧时滞  $\delta$  和压力指数  $\gamma$  是最难确定的两个参数, 因此这里只研究系统对  $\delta$  和  $\gamma$  的鲁棒性。

##### ① 对时滞参数 $\delta$ 的鲁棒性

仍然取  $\delta = 0.8$ , 利用本文方法所计算的控制器增益  $K = [6.406 \quad -5.780 \quad 16.267 \quad -13.404]$ 。事实上, 将反馈增益  $K$  代入燃烧过程方程并仿真可知, 该控制器对时滞参数满足  $0 \leq \delta \leq 1.1$  时, 均可镇定此燃烧过程。因为状态变量  $x_2(t)$  的振荡最强<sup>[3]</sup>, 这里以  $x_2(t)$  为对象研究系统响应随时滞参数  $\delta$  摄动的变化。如图5所示为该控制器作用下随时滞参数  $\delta$  的变化, 状态  $x_2(t)$  的响应曲线。

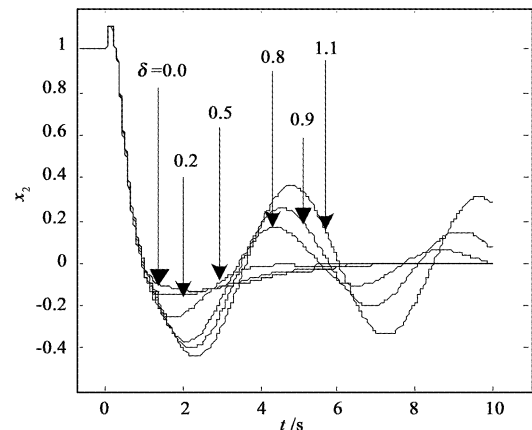


图5 控制器对时滞参数  $\delta$  的鲁棒性  
Fig.5 Robust performance of controller to variation of  $\delta$

##### ② 对压力指数 $\gamma$ 的鲁棒性

同样取  $\delta = 0.8$ , 控制器增益  $K = [6.406 \quad -5.780 \quad 16.267 \quad -13.404]$ 。仍然以状态变量  $x_2(t)$  为对象研究系统响应随压力指数  $\gamma$  摄动的变化。图6所示为该控制器作用下随压力指数  $\gamma$  的变化, 状态  $x_2(t)$  的响应曲线。从图中可以看出, 当  $0.8 \leq \gamma \leq 1.2$  时, 控制器同样能够镇定系统, 当  $\gamma \geq 1.3$  时, 系统开始振荡。事实上, 从大量数值仿真

可以得出当  $0 \leq \gamma \leq 0.8$  时,系统也是可以镇定的。

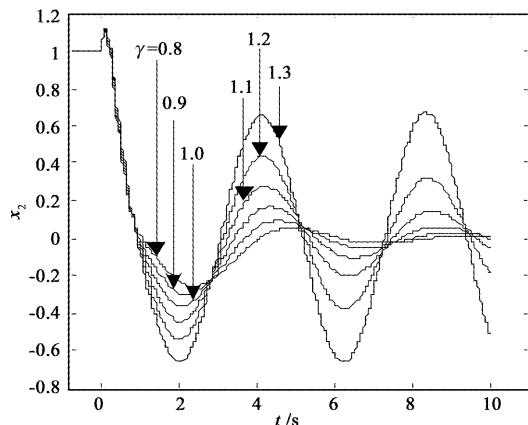


图6 控制器对压力指数  $\gamma$  的鲁棒性

Fig. 6 Robust performance of controller to variation of  $\gamma$

上述结果表明,本文所设计的控制器对参数扰动具有良好的鲁棒性。值得指出的是,当时滞参数  $\delta$  和压力指数  $\gamma$  为0时,该控制器仍能镇定系统。这样我们在设计控制器时,就可以取参数变化的最大值进行设计,以保证系统在参数变化范围内均能正常工作。

#### 4 结论

针对液体火箭发动机燃烧室燃烧过程的时滞相关镇定问题,通过构造适当的 Lyapunov 泛函并结合不等式变换技巧,设计了使系统鲁棒可镇定的线性反馈控制器。理论分析和数值验证表明:

(1) 在假定非恒稳 (Non-steady) 流动和一致滞后条件下,火箭发动机燃烧室的燃烧过程在时滞参数满足  $\delta \geq 0.756$  时,其自由运动是不稳定的,且是时滞无关不可镇定的。本文设计的线性反馈控制器可在  $0 \leq \delta \leq 1.1$  的时滞范围内有效镇定该过程;

(2) 与文献[9]的线性反馈控制器相比,本文控制器可镇定的时滞变化范围更大,且在相同时滞下,利用本文控制器所镇定后的系统状态振荡幅值较小,收敛速度较快;

(3) 与文献[5]变结构控制器相比,本文方法镇定后的状态曲线初始振荡超调较小,控制输入为线性反馈,控制器易于实现,系统相对比较稳定;变结构控制的优点是状态收敛速度相对较快,鲁棒性更好些,但初始时刻振荡超调较大,控制输入抖振过大,而切换控制本身存在滞后,容易造成系统不稳定。

#### 参考文献

- [1] Crocco L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors, part I: Fundamentals-low frequency instability with monopropellants[J]. Journal of the American Rocket Society, 1951, 21(2): 163-178.
- [2] 钱学森,宋健. 工程控制论(上)[M]. 北京:科学出版社, 1980:343-365.
- [3] Fiagbedzi Y A, Pearson A E. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems[J]. Automatica, 1987, 23(3):311-326.
- [4] Zheng F, Cheng M, Gao W B. Variable structure control of time-delay systems with a simulation study on stabilizing combustion in liquid propellant rocket motors[J]. Automatica, 1995, 31(7): 1031-1037.
- [5] 郑锋,程勉,高为炳. 时滞系统的变结构控制及其在火箭发动机燃烧过程镇定中的应用[J]. 自动化学报,1996,22(3):257-262. [Zheng Feng, Cheng Mian, Gao Wei-bing. Variable structure control of time-lag system and its application to the stabilization of combustion in rocket motors[J]. Acta Automatica Sinica, 1996, 22(3):257-262.]
- [6] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems[J]. International Journal of Control, 2001, 74(14):1447-1455.
- [7] Zheng F, Frank P M. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers[J]. Automatica, 2002, 38(3):487-497.
- [8] Chen W H, Zheng W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays[J]. Automatica, 2007, 43(1):95-104.
- [9] Jafarov E M. Robust stabilization of input-delayed systems with design example for rocket motor control[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal, 2008, 80(1): 59-65.
- [10] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequality in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [11] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. The 39th IEEE Conference on Decision Control, Sydney, Australia, 2000.
- [12] Petersen I R, Hollot C V. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-412.
- [13] Hale J K, Verduyn L S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

作者简介:李涛(1982-),男,博士研究生,主要从事时滞系统鲁棒稳定性与鲁棒镇定研究。

通信地址:陕西西安第二炮兵工程学院 301 室(710025)

电话:13772432527

E-mail:yingying4539893@sohu.com

(编辑:曹亚君)