文章编号: 1001-0920 (2012) 11-1621-06

离散时间 Lipschitz 非线性时变时滞系统 H_∞ 估计: Krein 空间方法

赵辉宏, 张承慧
(山东大学 控制科学与工程学院，济南 250061)

摘 要: 研究一类离散时间 Lipschitz 非线性时变时滞系统的 H_∞ 估计问题. 通过状态扩展方法, 将时变时滞系统转化为具有时变参数的无时滞系统. 结合 H_∞ 性能指标和 Lipschitz 非线性条件, 构造不定二次型并建立与 Krein 空间 H_2 估计的联系. 运用新息分析方法和 Krein 空间投影公式, 给出了 H_∞ 估计器存在的充分条件和基于 Riccati 方程的估计器递推算法. 最后, 通过仿真算例验证了所提出算法的有效性.

关键词: Lipschitz 非线性时变时滞系统；H_∞ 估计；Krein 空间；新息分析
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

H_∞ estimation for discrete-time Lipschitz nonlinear time-varying delay systems: Krein space approach

ZHAO Hui-hong, *ZHANG Cheng-hui*
(School of Control Science and Engineering，Shandong University，Ji'nan 250061，China．Correspondent：ZHANG Cheng-hui，E-mail：zchui@sdu.edu.cn)

Abstract: The H_∞ estimation problem is investigated for a class of discrete-time Lipschitz nonlinear time-varying delay systems. By using state augmentation approach, the time-varying delay system is converted into a delay free system with time-varying parameters. Combing H_∞ performance with Lipschitz nonlinear conditions, an indefinite quadratic form is constructed and a relation is built with Krein space H_2 estimation. By applying innovation analysis approach and Krein space projection formula, a sufficient condition for the existence of the H_∞ estimator is proposed and the estimator is derived in terms of Riccati difference equations. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is illustrated through a numerical example.

Key words: Lipschitz nonlinear time-varying delay systems；H_∞ estimation；Krein space；innovation analysis

1 引 言

非线性是实际控制系统中存在的普遍特性, 而信号估计是进行输出 (不完全状态) 反馈控制、信号处理、故障诊断等理论研究的必要条件, 因此, 非线性系统状态估计问题研究一直是控制理论领域的研究热点[1-4]. Lipschitz 非线性系统是一类同时包含可观测线性部分和 Lipschitz 非线性部分的非线性系统. 自从 1973 年 Thau 等[1]首次对其状态观测器研究以来, 该研究引起了国内外学者的广泛关注[1,5-7]. 近年来, 有大量关于时滞 Lipschitz 非线性系统的状态估计问题的研究出现, 主要有类 Lyapunov 函数[8]、滑模观测器[9]、H_∞ 滤波器[10-11]和 L_2-L_∞ 滤波器[11]等方法. 相对于具有定常时滞的 Lipschitz 非线性系统, 关于时变时滞 Lipschitz 非线性系统的状态估计研究还比较少[11-14]. 文献 [11-12] 研究了具有时变时滞的不确定 Lipschitz 非线性连续系统的鲁棒滤波问题, 但未考虑状态、时滞状态和未知扰动的联合估计问题; [13] 分别给出了离散时间 Lipschitz 非线性定常时滞系统和离散时间 Lipschitz 非线性时变时滞系统的观测器设计方法, 但未考虑所设计观测器的鲁棒性, 且其输出方程是线性的; [14] 利用 Lyapunov 函数、Finsler 引理和自由加权参数矩阵, 设计了非线性 H_∞ 和 L_2-L_∞ 滤波器, 但所考虑的输出方程是线性的. 综上所述, 关于 Lipschitz 非线性时变时滞系统的状态估计问题的研究还刚刚起步, 其理论和方法有待于进一

收稿日期: 2011-05-09；**修回日期:** 2011-08-04.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (61034007, 60774004)；山东省自然科学基金项目 (Z2007G01).
作者简介: 赵辉宏(1980−), 男, 博士生, 从事非线性时滞系统鲁棒估计和控制的研究；张承慧(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事工程优化控制、自适应控制等研究.

步发展和完善.

20世纪90年代, Babak Hassibi等[15]提出了一种Krein空间线性估计理论. 该方法的核心思想是: 根据Krein空间投影问题的解与Hilbert空间二次型最小化问题的解形式相同, 应用Krein空间Kalman滤波理论解决Hilbert空间二次型最小化问题. 由于H_∞滤波问题可转化为不定二次型最小值正定性问题, 文献[15]中的结果完美地解决了线性系统的H_∞滤波问题, 但其尚不能直接拓展到非线性系统领域. 本文研究了一类离散时间Lipschitz非线性时变时滞系统的H_∞状态、时滞状态和未知扰动的联合估计问题. 通过状态扩展, 将时滞系统转化为具有时变参数的无时滞系统; 基于H_∞性能指标和Lipschitz非线性条件, 构造不定二次型并建立与Krein空间线性估计理论[15]的联系; 运用新息分析方法[16]和Krein空间投影公式, 给出基于Riccati方程的H_∞估计器设计方案. 所得结果拓展了Krein空间线性估计理论的应用领域, 同时为离散时间Lipschitz非线性时变时滞系统H_∞估计问题提供了一种新的解决方法.

在下文中, 当Krein空间和Hilbert空间中的元素满足相同的约束时, 用$\boldsymbol{x}$表示Krein空间元素, 用x表示Hilbert空间元素.

2 问题描述

考虑如下离散时间非线性时变时滞系统:

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k_{d(k)})+B_ww(k)+\\ \qquad B_ff(x(k),x(k_{d(k)}),u(k));\\ y(k)=Cx(k)+C_dx(k_{d(k)})+D_ww(k)+\\ \qquad D_gg(x(k),x(k_{d(k)}),u(k));\\ z(k)=Lx(k)+L_dx(k_{d(k)})+L_ww(k);\\ x(\theta)=\varphi(\theta),\ \theta\in[-\bar{d},0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(k)\in\boldsymbol{R}^n$为系统状态; $u(k)\in\boldsymbol{R}^m$为控制输入; $w(k)\in\boldsymbol{R}^q$为满足$l_2[0,N]$的外部扰动; $y(k)\in\boldsymbol{R}^p$为测量输出; $z(k)\in\boldsymbol{R}^r$为待估计信号; $A, A_d, B_w, B_f, C, C_d, D_w, D_g, L, L_d$和$L_w$为具有适当维数的已知矩阵; $\varphi(\theta)$为初值函数; $k_{d(k)}=k-d(k)$; $d(k)$为已知系统时变时滞, 且$d(k)\in[\underline{d},\bar{d}]$, $\bar{d}\geqslant\underline{d}>0$; $f(\cdot):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\mapsto\boldsymbol{R}^{n_f}$, $g(\cdot):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\mapsto\boldsymbol{R}^{n_g}$为已知非线性向量函数, 且$\forall k\in[0,N]$, $\forall u(k)\in\boldsymbol{R}^m$, $\forall x,\hat{x},\tilde{x},\hat{\tilde{x}}\in\boldsymbol{R}^n$, 满足如下Lipschitz条件:

$$\begin{aligned} &f(0,0,u(k))=0,\\ &\|f(x,\tilde{x},u)-f(\hat{x},\hat{\tilde{x}},u)\|\leqslant\alpha\|F(x-\hat{x})+F_d(\tilde{x}-\hat{\tilde{x}})\|,\\ &\|g(x,\tilde{x},u)-g(\hat{x},\hat{\tilde{x}},u)\|\leqslant\beta\|G(x-\hat{x})+G_d(\tilde{x}-\hat{\tilde{x}})\|. \end{aligned} \tag{2}$$

其中: 标量$\alpha>0, \beta>0$为已知Lipschitz常数; F, F_d, G和G_d为适当维数的已知矩阵.

假设 1 假设矩阵D_g行满秩.

注 1 对于D_g不是行满秩的情形, 可将输出方程中$D_gg(\cdot)$等价表示为$\bar{D}_g\bar{g}(\cdot)$. 其中: $\bar{D}_g=[D_g\ \ I]$, $\bar{g}(\cdot)=[g^{\mathrm{T}}(\cdot)\ \ g_1^{\mathrm{T}}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$, 且$g_1(\cdot)\equiv0$. 显然, $\bar{g}(\cdot)$依然满足Lipschitz条件(2), 且$\bar{D}_g$行满秩.

本文研究的主要问题是: 给定标量$\gamma>0$, 基于测量输出序列$\{y(i)\}_{i=0}^k$, 求信号$z(k)$的一个估计$\breve{z}(k|k)=\mathcal{L}\{\{y(i)\}_{i=0}^k\}$, 使其满足

$$\sup_{(\varphi,w)\neq0}\frac{\varTheta(N)}{\varDelta(N)}<\gamma^2. \tag{3}$$

其中

$$\varTheta(N)=\sum_{k=0}^N\|\breve{z}(k|k)-z(k)\|^2,$$

$$\varDelta(N)=\sum_{i=-\bar{d}}^0\|\varphi(i)-\breve{\varphi}(i)\|^2_{\varPi^{-1}(i)}+\sum_{k=0}^N\|w(k)\|^2.$$

这里: $\varPi(i)$为给定正定矩阵, 反映初始状态估计$\breve{\varphi}(i)$关于初始状态$\varphi(i)$的不确定程度, 且不失一般性令$\breve{\varphi}(i)=0$.

3 主要结论

首先, 通过引入Kronecker delta函数δ_{ij} (即当$i\neq j$时, $\delta_{ij}=0$; 当$i=j$时, $\delta_{ij}=1$), 可将时变时滞系统(1)转化为如下定常时滞系统:

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+\sum\limits_{i=\underline{d}}^{\bar{d}}\delta_{id(k)}A_dx(k_i)+B_ww(k)+\\ \qquad B_ff\Big(x(k),\sum\limits_{i=\underline{d}}^{\bar{d}}\delta_{id(k)}x(k_i),u(k)\Big);\\ y(k)=Cx(k)+\sum\limits_{i=\underline{d}}^{\bar{d}}\delta_{id(k)}C_dx(k_i)+D_ww(k)+\\ \qquad D_gg\Big(x(k),\sum\limits_{i=\underline{d}}^{\bar{d}}\delta_{id(k)}x(k_i),u(k)\Big);\\ z(k)=Lx(k)+\sum\limits_{i=\underline{d}}^{\bar{d}}\delta_{id(k)}L_dx(k_i)+L_ww(k);\\ x(\theta)=\varphi(\theta),\ \theta\in[-\bar{d},0]. \end{cases} \tag{4}$$

然后, 应用经典的定常时滞系统状态扩维方法, 可将系统(4)转化为如下具有时变参数的无时滞系统:

$$\begin{cases} x_a(k+1)=A_a(k)x_a(k)+B_{a,w}w(k)+\\ \qquad B_{a,f}f(x_a(k),u(k)),\\ y(k)=C_a(k)x_a(k)+D_ww(k)+\\ \qquad D_gg(x_a(k),u(k)),\\ z(k)=L_a(k)x_a(k)+L_ww(k),\\ x_a(0)=\varphi_a(0). \end{cases} \tag{5}$$

其中

$x_a(k)=[\,x^{\mathrm T}(k)\ \ x^{\mathrm T}(k-1)\ \ \cdots\ \ x^{\mathrm T}(k-\bar d)\,]^{\mathrm T}$;

$\varphi_a(0)=[\,\varphi^{\mathrm T}(0)\ \ \varphi^{\mathrm T}(-1)\ \ \cdots\ \ \varphi^{\mathrm T}(-\bar d)\,]^{\mathrm T}$;

$B_{a,w}=[\,B_w^{\mathrm T}\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\,]^{\mathrm T}$;

$$A_a(k)=\begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & \phi(\underline{d}) & \cdots & \phi(\bar d-1) & \phi(\bar d)\\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix};$$

$\phi(j)=\delta_{jd(k)}A_d,\ j\in[\underline{d},\bar d]$;

$C_a(k)=[\,C\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \vartheta(\underline{d})\ \ \cdots\ \ \vartheta(\bar d-1)\ \ \vartheta(\bar d)\,]$;

$\vartheta(j)=\delta_{jd(k)}C_d,\ j\in[\underline{d},\bar d]$;

$B_{a,f}$ 可由 B_f 代替 $B_{a,w}$ 中的 B_w 获得; $L_a(k)$ 可由 L 和 L_d 分别代替 $C_a(k)$ 中的 C 和 C_d 获得.

注 2 关于系统中非线性部分的状态扩展问题, 可通过引入参数矩阵的方法解决. 例如: 若 $f(\cdot)=\cos(x^{\mathrm T}(k)x(k_{d(k)}))$, 则本文可引入矩阵

$$M_1=[\,I\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0\,],$$

$$M_2(k)=$$

$$[\,0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \delta_{\underline{d}d(k)}I\ \ \delta_{(\underline{d}+1)d(k)}I\ \ \cdots\ \ \delta_{\bar d d(k)}I\,],$$

将其表示为 $\cos((M_1x_a(k))^{\mathrm T}(M_2(k)x_a(k)))$ 的形式.

进一步, 给出如下符号定义:

$$\begin{aligned}&w_f(k)=f(x_a(k),u(k))-f(\breve x_a(k|k),u(k)),\\&w_g(k)=g(x_a(k),u(k))-g(\breve x_a(k),u(k)),\\&\breve z_f(k|k)=F_a(k)\breve x_a(k|k),\\&\breve z_g(k)=G_a(k)\breve x_a(k),\\&v_f(k)=\breve z_f(k|k)-F_a(k)x_a(k),\\&v_g(k)=\breve z_g(k)-G_a(k)x_a(k),\\&v_z(k)=\breve z(k|k)-z(k).\end{aligned}\tag{6}$$

其中: $F_a(k)$ 可由 F 和 F_d 分别代替 $C_a(k)$ 中的 C 和 C_d 获得; $G_a(k)$ 可由 G 和 G_d 分别代替 $C_a(k)$ 中的 C 和 C_d 获得.

注 3 式 (6) 中 $\breve x_a(k|k)$ 和 $\breve x_a(k)$ 分别表示状态向量 $x_a(k)$ 基于输出序列 $\{y(i)\}_{i=0}^{k}$ 和 $\{y(i)\}_{i=0}^{k-1}$ 的估计值. 因此, 在本文所设计的递推算法中, 假设在 k 时刻 $f(\breve x_a(k|k),u(k))$ 和 $g(\breve x_a(k+1),u(k+1))$ 为已知输入项是合理的.

根据文献 [15], 可将问题 (3) 等价为

$$J_N=\varDelta(N)-\gamma^{-2}\varTheta(N)>0,\ \forall(\varphi,w)\neq 0.\tag{7}$$

考虑到 Lipschitz 条件 (2), 定义一个新的不定二次型:

$$\begin{aligned}J_N^*=&J_N+\sum_{k=0}^{N}\|w_f(k)\|^2-\alpha^2\sum_{k=0}^{N}\|v_f(k)\|^2+\\&\sum_{k=0}^{N+1}\|w_g(k)\|^2-\beta^2\sum_{k=0}^{N+1}\|v_g(k)\|^2.\end{aligned}\tag{8}$$

由式 (2) 中的 Lipschitz 条件和 (6) 中的符号定义可知 $J_N^*\leqslant J_N$. 进一步, 若 $\forall(\varphi,w)\neq 0$, 存在 $\{\breve z(k|k)\}_{k=0}^{N}$, $\{\breve z_f(k|k)\}_{k=0}^{N}$ 和 $\{\breve z_g(k)\}_{k=0}^{N+1}$ 使 $J_N^*>0$, 则有 $J_N>0$. 因此, 本文首先求出不定二次型 J_N^* 关于 (φ,w) 的最小值 $\min J_N^*$; 进而寻求估计 $\{\breve z(k|k)\}_{k=0}^{N}$, $\{\breve z_f(k|k)\}_{k=0}^{N}$ 和 $\{\breve z_g(k)\}_{k=0}^{N+1}$ 使 $\min J_N^*>0$ 来设计满足性能指标 (3) 的 H_∞ 估计器. 而不定二次型最小值问题可通过 Krein 空间投影方法求解[15].

首先, 引入如下 Krein 空间随机系统:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol x_a(k+1)=A_a(k)\boldsymbol x_a(k)+B_{a,w}\boldsymbol w(k)+\\&\qquad B_{a,f}f(\breve{\boldsymbol x}_a(k|k),\boldsymbol u(k))+B_{a,f}\boldsymbol w_f(k),\\&\boldsymbol y(k)=C_a(k)\boldsymbol x_a(k)+D_w\boldsymbol w(k)+D_g\boldsymbol w_g(k)+\\&\qquad D_gg(\breve{\boldsymbol x}_a(k),\boldsymbol u(k)),\\&\breve{\boldsymbol z}(k|k)=L_a(k)\boldsymbol x_a(k)+L_w\boldsymbol w(k)+\boldsymbol v_z(k),\\&\breve{\boldsymbol z}_f(k|k)=F_a(k)\boldsymbol x_a(k)+\boldsymbol v_f(k),\\&\breve{\boldsymbol z}_g(k+1)=G_a(k+1)\boldsymbol x_a(k+1)+\boldsymbol v_g(k+1).\end{aligned}\right.\tag{9}$$

其中: $\boldsymbol x_a(0),\boldsymbol w(k),\boldsymbol w_f(k),\boldsymbol w_g(k),\boldsymbol v_z(k),\boldsymbol v_f(k)$ 和 $\boldsymbol v_g(k)$ 为 Krein 空间均值为零的互不相关白噪声向量, 方差分别为

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol x_a(0),\boldsymbol x_a(0)\rangle=\varPi_a(0)=\mathrm{diag}\{\varPi(0),\cdots,\varPi(-\bar d)\},\\&\langle\boldsymbol w(i),\boldsymbol w(j)\rangle=I\delta_{ij},\\&\langle\boldsymbol w_f(i),\boldsymbol w_f(j)\rangle=I\delta_{ij},\\&\langle\boldsymbol w_g(i),\boldsymbol w_g(j)\rangle=I\delta_{ij},\\&\langle\boldsymbol v_z(i),\boldsymbol v_z(j)\rangle=-\gamma^2I\delta_{ij},\\&\langle\boldsymbol v_f(i),\boldsymbol v_f(j)\rangle=-\alpha^{-2}I\delta_{ij},\\&\langle\boldsymbol v_g(i),\boldsymbol v_g(j)\rangle=-\beta^{-2}I\delta_{ij}.\end{aligned}$$

注 4 系统 (9) 中的 $\breve{\boldsymbol z}(k|k)$, $\breve{\boldsymbol z}_f(k|k)$ 和 $\breve{\boldsymbol z}_g(k)$ 为本文引入的虚拟输入项, 它们可通过下文中的递推算法获得.

令 $\breve{\boldsymbol z}_m(k|k)=[\,\breve{\boldsymbol z}^{\mathrm T}(k|k)\ \ \breve{\boldsymbol z}_f^{\mathrm T}(k|k)\,]^{\mathrm T}$, 则有

$$\breve{\boldsymbol z}_m(k|k)=L_m(k)\boldsymbol x_a(k)+L_{m,w}w(k)+\boldsymbol v_m(k).\tag{10}$$

其中

$$L_m(k)=[\,L_a^{\mathrm T}(k)\ \ F_a^{\mathrm T}(k)\,]^{\mathrm T},\ L_{m,w}=[\,L_w^{\mathrm T}\ \ 0\,]^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol v_m(k)=[\,\boldsymbol v_z^{\mathrm T}(k)\ \ \boldsymbol v_f^{\mathrm T}(k)\,]^{\mathrm T}.$$

定义 1 对于 $\forall k\in[0,N]$, $\hat{\boldsymbol y}(k)$ 表示 $\boldsymbol y(k)$ 在线性空间 $\mathcal L\{\{\boldsymbol y(i),\breve{\boldsymbol z}_m(i|i),\breve{\boldsymbol z}_g(i)\}_{i=0}^{k-1},\breve{\boldsymbol z}_g(k)\}$ 上的 Krein

空间投影; $\hat{\boldsymbol{z}}_m(k|k)$ 表示 $\check{\boldsymbol{z}}_m(k|k)$ 在线性空间 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\check{\boldsymbol{z}}_g(i)\}_{i=0}^{k-1},\check{\boldsymbol{z}}_g(k),\boldsymbol{y}(k)\}$ 上的 Krein 空间投影; $\hat{\boldsymbol{z}}_g(k+1)$ 表示 $\check{\boldsymbol{z}}_g(k+1)$ 在线性空间 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\check{\boldsymbol{z}}_g(i)\}_{i=0}^{k}\}$ 上的 Krein 空间投影.

进一步, 引入如下随机变量及其方差矩阵:

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{y}}(i)=\boldsymbol{y}(i)-\hat{\boldsymbol{y}}(i),\ R_{\tilde{y}}(i)=\langle\tilde{\boldsymbol{y}}(i),\tilde{\boldsymbol{y}}(i)\rangle,\\&\tilde{\boldsymbol{z}}_m(i|i)=\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i)-\hat{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\\&R_{\tilde{z}_m}(i|i)=\langle\tilde{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\tilde{\boldsymbol{z}}_m(i|i)\rangle,\\&\tilde{\boldsymbol{z}}_g(i)=\check{\boldsymbol{z}}_g(i)-\hat{\boldsymbol{z}}_g(i),\ R_{\tilde{z}_g}(i)=\langle\tilde{\boldsymbol{z}}_g(i),\tilde{\boldsymbol{z}}_g(i)\rangle.\end{aligned}\tag{11}$$

引理 1 $\{\tilde{\boldsymbol{z}}_g(i),\tilde{\boldsymbol{y}}(i),\tilde{\boldsymbol{z}}_m(i|i)\}_{i=0}^{k}$ 为新息序列, 且构成的线性空间等价于

$$\mathcal{L}\{\{\check{\boldsymbol{z}}_g(i),\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i)\}_{i=0}^{k}\}.$$

证明 根据文献 [16] 中的引理 2.2.1, 由定义 1 易证引理 1 成立. □

定理 1 考虑系统 (1), 给定标量 $\gamma>0$ 以及正定矩阵 $\Pi(i),i\in[-\bar{d},0]$), 则当且仅当如下不等式成立时, J_N^* 有最小值:

$$\begin{aligned}&R_{\tilde{y}}(k)>0,\ \forall k\in[0,N];\\&R_{\tilde{z}_m}(k|k)<0,\ \forall k\in[0,N];\\&R_{\tilde{z}_g}(k+1)<0,\ \forall k\in[-1,N].\end{aligned}\tag{12}$$

且 J_N^* 的最小值可由下式给出:

$$\begin{aligned}\min\ J_N^*=&\sum_{k=0}^{N}\tilde{y}^{\mathrm{T}}(k)R_{\tilde{y}}^{-1}(k)\tilde{y}(k)+\\&\sum_{k=0}^{N}\tilde{z}_m^{\mathrm{T}}(k|k)R_{\tilde{z}_m}^{-1}(k|k)\tilde{z}_m(k|k)+\\&\sum_{k=0}^{N+1}\tilde{z}_g^{\mathrm{T}}(k)R_{\tilde{z}_g}^{-1}(k)\tilde{z}_g(k).\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}&\tilde{y}(k)=y(k)-\hat{y}(k),\\&\tilde{z}_m(k|k)=\check{z}_m(k|k)-\hat{z}_m(k|k),\\&\tilde{z}_g(k)=\check{z}_g(k)-\hat{z}_g(k).\end{aligned}\tag{14}$$

这里: $\hat{y}(k)$ 可由 $\boldsymbol{y}(k)$ 在

$$\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\check{\boldsymbol{z}}_g(i)\}_{i=0}^{k-1},\check{\boldsymbol{z}}_g(k)\}$$

上的 Krein 空间投影获得; $\hat{z}_m(k|k)$ 可由 $\check{\boldsymbol{z}}_m(k|k)$ 在

$$\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\check{\boldsymbol{z}}_g(i)\}_{i=0}^{k-1},\check{\boldsymbol{z}}_g(k),\boldsymbol{y}(k)\}$$

上的 Krein 空间投影获得; $\hat{z}_g(k+1)$ 可由 $\check{\boldsymbol{z}}_g(k+1)$ 在 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}(i),\check{\boldsymbol{z}}_m(i|i),\check{\boldsymbol{z}}_g(i)\}_{i=0}^{k}\}$ 上的 Krein 空间投影获得.

证明 首先, 给出如下符号定义:

$$R(k)=\langle\tilde{\boldsymbol{y}}_z(k),\tilde{\boldsymbol{y}}_z(k)\rangle,\ Q_v(k)=\langle\boldsymbol{v}(k),\boldsymbol{v}(k)\rangle.$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{y}}_z(k)=\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{z}}_g(k+1),\ k=-1;\\ [\ \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(k)\ \ \tilde{\boldsymbol{z}}_m^{\mathrm{T}}(k|k)\ \ \tilde{\boldsymbol{z}}_g^{\mathrm{T}}(k+1)\ ]^{\mathrm{T}},\ k\geqslant 0.\end{cases}\\&\boldsymbol{v}(k)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_g(k+1),\ k=-1;\\ [\ D_g\boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}(k)\ \ \boldsymbol{v}_m^{\mathrm{T}}(k)\ \ \boldsymbol{v}_g^{\mathrm{T}}(k+1)\ ]^{\mathrm{T}},\ k\geqslant 0.\end{cases}\end{aligned}\tag{15}$$

由文献 [15] 可知, 当且仅当 $R(k)$ 和 $Q_v(k)$ 对于任意的 $k\in[0,N]$ 都具有相同的惯性指数时, J_N^* 有最小值, 且可由下式给出:

$$J_N^*=\sum_{k=-1}^{N}\tilde{y}_z^{\mathrm{T}}(k)R^{-1}(k)\tilde{y}_z(k),$$

其中 $\tilde{y}_z(k)$ 可通过由 Hilbert 空间元素代替 $\tilde{\boldsymbol{y}}_z(k)$ 中相应的 Krein 空间元素获得.

进一步, 由定义 1, 引理 1 及式 (15) 可知

$$R(k)=\begin{cases}R_{\tilde{z}_g}(k+1),\ k=-1;\\ \mathrm{diag}\{R_{\tilde{y}}(k),R_{\tilde{z}_m}(k|k),R_{\tilde{z}_g}(k+1)\},\ k\geqslant 0.\end{cases}$$

$$Q_v(k)=\begin{cases}-\beta^{-2}I,\ k=-1;\\ \mathrm{diag}\{D_gD_g^{\mathrm{T}},Q_{v_m}(k),-\beta^{-2}I\},\ k\geqslant 0.\end{cases}$$

$$Q_{v_m}(k)=\mathrm{diag}\{-\gamma^2I,-\alpha^{-2}I\}.$$

因此, 当且仅当式 (12) 成立时, J_N^* 有最小值, 且可由式 (13) 给出. □

注 5 在一般情形下, 利用 Krein 空间方法解决离散系统 H_∞ 估计问题时, 需要对新息方差矩阵进行三角分解[15]. 当系统存在多个输出通道时, 此类计算往往比较复杂. 而由于式 (13) 中的 $\tilde{y}(k)$, $\tilde{z}_m(k|k)$ 和 $\tilde{z}_g(k)$ 互不相关, 无需进行矩阵三角分解计算, 使得在进行 H_∞ 估计器设计时, 本文结论较文献 [15] 更加直观简易.

记

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}_1(i)=[\ \check{\boldsymbol{z}}_g^{\mathrm{T}}(i)\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(i)\quad \check{\boldsymbol{z}}_m^{\mathrm{T}}(i|i)\ ]^{\mathrm{T}},\\&\boldsymbol{y}_2(i)=[\ \check{\boldsymbol{z}}_g^{\mathrm{T}}(i)\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(i)\ ]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{y}_3(i)=\check{\boldsymbol{z}}_g(i).\end{aligned}\tag{16}$$

定义 2 对于 $\forall k\in[0,N]$, $\hat{\boldsymbol{h}}(k,1)$ 表示变量 $\boldsymbol{h}(k)$ 在 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}_1(j)\}_{j=0}^{k-1}\}$ 上的 Krein 空间投影; $\hat{\boldsymbol{h}}(k,2)$ 表示变量 $\boldsymbol{h}(k)$ 在 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}_1(j)\}_{j=0}^{k-1},\boldsymbol{y}_3(k)\}$ 上的 Krein 空间投影; $\hat{\boldsymbol{h}}(k,3)$ 表示变量 $\boldsymbol{h}(k)$ 在 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}_1(j)\}_{j=0}^{k-1},\boldsymbol{y}_2(k)\}$ 上的 Krein 空间投影.

记

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{y}}_1(i,1)=\boldsymbol{y}_1(i)-\hat{\boldsymbol{y}}_1(i,1)\\&R_{\tilde{y}_1}(i,1)=\langle\tilde{\boldsymbol{y}}_1(i,1),\tilde{\boldsymbol{y}}_1(i,1)\rangle.\end{aligned}$$

显然, $\{\tilde{\boldsymbol{y}}_1(i,1)\}_{i=0}^{k}$ 为新息序列, 且构成的线性空间等价于 $\mathcal{L}\{\{\boldsymbol{y}_1(i)\}_{j=0}^{k}\}$.

根据 Krein 空间投影公式, 给出如下递推计算过程.

1) $\hat{\boldsymbol{x}}_a(i,1)$ $(i\in[0,k])$ 可通过下式进行递推计算:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_a(i+1,1)=A_a(i)\hat{\boldsymbol{x}}_a(i,1)+B_{a,f}f(\check{\boldsymbol{x}}_a(i|i),\boldsymbol{u}(i))+K(i,1)\tilde{\boldsymbol{y}}_1(i,1),$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}_a(0,1)=0. \tag{17}$$

其中

$$K(i,1)=(A_a(i)P_a(i,1)C_1^{\rm T}(i)+B_{a,w}D_1^{\rm T})R_{\tilde{y}_1}^{-1}(i,1),$$
$$C_1(i)=[\,G_a^{\rm T}(i)\quad C_a^{\rm T}(i)\quad L_a^{\rm T}(i)\quad F_a^{\rm T}(i)\,]^{\rm T},$$
$$D_1=[\,0\quad D_w^{\rm T}\quad L_w^{\rm T}\quad 0\,]^{\rm T},$$
$$P_a(i,1)=\langle \boldsymbol{x}_a(i)-\hat{\boldsymbol{x}}_a(i,1),\boldsymbol{x}_a(i)-\hat{\boldsymbol{x}}_a(i,1)\rangle,$$
$$R_{\tilde{y}_1}(i,1)=C_1(i)P_a(i,1)C_1^{\rm T}(i)+D_1D_1^{\rm T}+Q_{v_1}(i),$$
$$Q_{v_1}(i)={\rm diag}\{-\beta^{-2}I,D_gD_g^{\rm T},-\gamma^2I,-\alpha^{-2}I\}. \tag{18}$$

这里 $P_a(i,1)$ $(i\in[0,k])$ 满足如下差分 Riccati 方程:

$$P_a(i+1,1)=A_a(i)P_a(i,1)A_a^{\rm T}(i)+B_{a,w}B_{a,w}^{\rm T}+B_{a,f}B_{a,f}^{\rm T}-K(i,1)R_{\tilde{y}_1}(i,1)K^{\rm T}(i,1),$$
$$P_a(0,1)=\varPi_a(0). \tag{19}$$

显然, 由定义 1 和系统 (9) 可知

$$\hat{\boldsymbol{z}}_g(k)=G_a(k)\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,1), \tag{20a}$$
$$R_{\tilde{z}_g}(k)=G_a(k)P_a(k,1)G_a^{\rm T}(k)-\beta^{-2}I. \tag{20b}$$

2) 由定义 2 可知, $\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,2)$ 可通过下式进行计算:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,2)=\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,1)+K(k,2)\tilde{\boldsymbol{z}}_g(k), \tag{21}$$

其中

$$K(k,2)=P_a(k,1)G_a^{\rm T}(k)R_{\tilde{z}_g}^{-1}(k). \tag{22}$$

于是, 由定义 1, 定义 2 及系统 (9) 可知

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k)=C_a(k)\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,2)+D_gg(\check{\boldsymbol{x}}_a(k),\boldsymbol{u}(k)), \tag{23a}$$
$$R_{\tilde{y}}(k)=C_a(k)P_a(k,1)C_a^{\rm T}(k)+D_wD_w^{\rm T}+D_gD_g^{\rm T}-C_a(k)K(k,2)R_{\tilde{z}_g}(k)K^{\rm T}(k,2)C_a^{\rm T}(k). \tag{23b}$$

3) 同理, $\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,3)$ 可通过下式计算:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,3)=\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,1)+K(k,3)\tilde{\boldsymbol{y}}_2(k). \tag{24}$$

其中

$$K(k,3)=P_a(k,1)C_2^{\rm T}(k)R_{\tilde{y}_2}^{-1}(k),$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2(k)=\boldsymbol{y}_2(k)-\hat{\boldsymbol{y}}_2(k,1),$$
$$R_{\tilde{y}_2}(k)=\langle\tilde{\boldsymbol{y}}_2(k),\tilde{\boldsymbol{y}}_2(k)\rangle=C_2(k)P_a(k,1)C_2^{\rm T}(k)+D_2D_2^{\rm T}+Q_{v_2}(k),$$
$$C_2(k)=[\,G_a^{\rm T}(k)\quad C_a^{\rm T}(k)\,]^{\rm T},\ D_2=[\,0\quad D_w^{\rm T}\,]^{\rm T},$$
$$Q_{v_2}(k)={\rm diag}\{-\beta^{-2}I,D_gD_g^{\rm T}\}. \tag{25}$$

进一步, $\hat{\boldsymbol{w}}(k,3)$ 可通过下式计算:

$$\hat{\boldsymbol{w}}(k,3)=D_2^{\rm T}R_{\tilde{y}_2}^{-1}(k)\tilde{\boldsymbol{y}}_2(k). \tag{26}$$

于是, 根据定义 1, 定义 2 及式 (10) 可知

$$\hat{\boldsymbol{z}}_m(k|k)=L_m(k)\hat{\boldsymbol{x}}_a(k,3)+L_{m,w}\hat{\boldsymbol{w}}(k,3), \tag{27a}$$
$$R_{\tilde{z}_m}(k|k)=L_m(k)P_a(k,1)L_m^{\rm T}(k)+Q_{v_m}(k)+L_{m,w}L_{m,w}^{\rm T}-\bar{K}(k,3)R_{\tilde{y}_2}(k)\bar{K}^{\rm T}(k,3), \tag{27b}$$
$$\bar{K}(k,3)=L_m(k)K(k,3)+L_{m,w}D_2^{\rm T}R_{\tilde{y}_2}^{-1}(k), \tag{27c}$$
$$Q_{v_m}(k)={\rm diag}\{-\gamma^2I,-\alpha^{-2}I\}. \tag{27d}$$

根据上述分析, 可得如下定理:

定理 2　考虑系统 (1) 和 Lipschitz 非线性条件 (2), 给定标量 $\gamma>0$ 和正定矩阵 $\varPi(i)$, $i\in[-\bar{d},0]$. 当如下条件成立时, 满足性能指标 (3) 的 H_∞ 估计器存在:

$$R_{\tilde{y}}(k)>0,\ \forall k\in[0,N];$$
$$R_{\tilde{z}_m}(k|k)<0,\ \forall k\in[0,N];$$
$$R_{\tilde{z}_g}(k+1)<0,\ \forall k\in[-1,N]. \tag{28}$$

其中: $R_{\tilde{y}}(k)$, $R_{\tilde{z}_m}(k|k)$ 和 $R_{\tilde{z}_g}(k+1)$ 可分别由式 (23b), (27b) 和 (20b) 计算. 此时, 一个可接受的 $\gamma>0$ 水平 H_∞ 估计器可由下式给出:

$$\check{z}(k|k)=E\hat{z}_m(k|k), \tag{29}$$

其中: $E=[\,I\quad 0\,]$, $\hat{z}_m(k|k)$ 可由式 (27a) 计算.

证明　由定理 1 可知, 当且仅当式 (12) 成立时, J_N^* 有最小值, 且最小值由式 (13) 给出. 注意到, 任意满足 J_N^* 的估计器都是一个可接受的 $\gamma>0$ 水平 H_∞ 估计器. 因此, 本文可令 $\check{z}_m(k|k)=\hat{z}_m(k|k)$ 和 $\check{z}_g(k)=\hat{z}_g(k)$, 由此得到一个满足性能指标 (3) 的 H_∞ 估计器. □

4 算　例

考虑系统 (1), 各参数矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}0.7&0\\0&0.2\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-0.1&0\\0&0.3\end{bmatrix},$$
$$B_w=[\,0.9\ \ 1.4\,]^{\rm T},\ B_f=[\,0.8\ \ 0\,]^{\rm T},$$
$$C=[\,1.2\ \ 0.5\,],\ C_d=[\,-0.3\ \ 0.2\,],$$
$$D_g=0.5,\ D_w=0.7,\ L=[\,0\ \ 0.9\,],$$
$$L_d=[\,0.7\ \ 0\,],\ L_w=0.4,\ F=[\,-0.1\ \ 0.2\,],$$
$$F_d=[\,0.4\ \ 0\,],\ G=[\,0.1\ \ 0\,],\ G_d=[\,0.5\ \ 0.3\,].$$

令

$$f(x(k),x(k_{d(k)}),u(k))=\sin(Fx(k)+F_dx(k_{d(k)})),$$
$$g(x(k),x(k_{d(k)}),u(k))=\cos(Gx(k)+G_dx(k_{d(k)})).$$

于是有 $\alpha=1$, $\beta=1$. 假设时变时滞

$$d(k)={\rm sgn}(\sin k)+2,$$

显然有 $d(k)\in[1,3]$. 取 $\gamma=2$, 初值及其估计为

$$\varphi(\theta)=[\,-0.2\theta \quad 0.1\theta\,]^{\mathrm{T}},\ \breve{\varphi}(\theta)=[\,0 \quad 0\,]^{\mathrm{T}},$$

其中 $\theta\in[-3,0]$. 扰动 $w(k)$ 是能量为 0.01 的白噪声信号, 如图 1 所示.

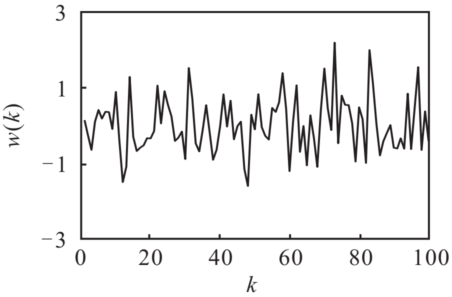

图 1　外部扰动 $w(k)$

本例将对本文所提出的算法与文献 [15] 中的 Krein 空间线性估计方法进行仿真比较. 由于 [15] 中算法仅针对线性系统, 在应用该算法时, 本文将系统 (5) 中的非线性项 $f(x_a(k),u(k))$ 和 $g(x_a(k),u(k))$ 作为扰动输入项. 图 2 给出了信号 $z(k)$、本文算法和文献 [15] 中算法对 $z(k)$ 的估计; 图 3 给出了本文算法对 $z(k)$ 的估计误差绝对值 $|e_a(k)|$ 和文献 [15] 中算法对 $z(k)$ 的估计误差绝对值 $|e_b(k)|$. 由图 2 和图 3 可知, 对于离散时间 Lipschitz 非线性系统, 本文算法较 [15] 中算法具有更准确的估计性能.

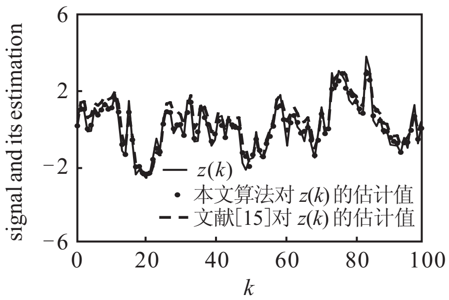

图 2　信号 $z(k)$ 和两种算法对 $z(k)$ 的估计

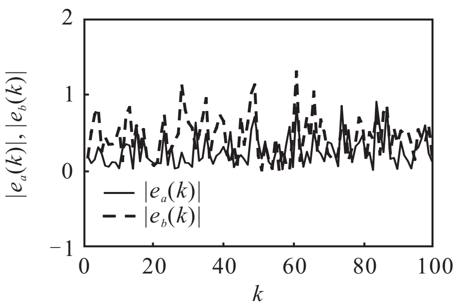

图 3　两种算法对 $z(k)$ 的估计误差绝对值 $|e_a(k)|$ 与 $|e_b(k)|$

矩阵 $R_{\tilde{y}}(k)$, $R_{\tilde{z}_g}(k)$ 和 $R_{\tilde{z}_m}(k|k)$ 的特征值如图 4 所示. 其中: $R_{\tilde{y}}(k)$ 的特征值为 Ry, $R_{\tilde{z}_g}(k)$ 的特征值为 Rzg, $R_{\tilde{z}_m}(k|k)$ 的特征值为 Rzm1 和 Rzm2. 由图 4 可知, 当 $\gamma=2$ 时, 本文所设计的估计器满足定理 2 中条件 (28).

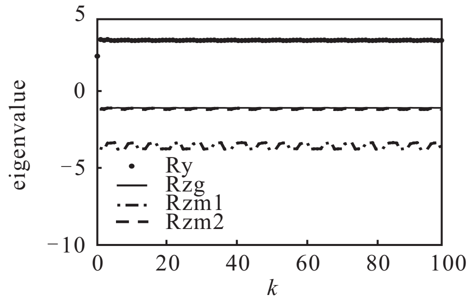

图 4　3 个矩阵的特征值

5　结　论

本文针对一类离散时间 Lipschitz 非线性时变时滞系统, 提出一种 H_∞ 估计方法. 该方法是对 Krein 空间线性估计理论[15]的进一步改进和应用. 通过状态扩展方法和引入 Kronecker delta 函数, 将时变时滞系统等价为具有时变参数的无时滞系统. 利用 H_∞ 性能指标和 Lipschitz 非线性条件, 将 Lipschitz 非线性系统 H_∞ 估计问题转化为 Krein 空间具有多个虚拟输出的随机系统 H_2 估计问题. 基于新息分析和投影公式, 得到估计器存在的充分条件和基于 Riccati 方程的估计器递推公式. 所设计的估计器是递推的, 可实现在线计算, 便于工程应用.

参考文献(References)

[1] Thau F E. Observing the state of non-linear dynamic systems[J]. Int J of Control, 1973, 17(3): 471-479.

[2] Reif K, Sonnemann F, Unbehauen R. An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability[J]. Automatica, 1998, 34(9): 1119-1123.

[3] Zhang J, Feng G, Xu H B. Observer design for nonlinear discrete-time systems: Immersion and dynamic observer error linearization techniques[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(5): 504-514.

[4] Kravaris C, Sotiropoulos V, Georgiou C, et al. Nonlinear observer design for state and disturbance estimation[J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(11/12): 730-735.

[5] Raoufi R, Marquez H J, Zinober A S I. H_∞ sliding mode observers for uncertain nonlinear Lipschitz systems with fault estimation synthesis[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(16): 1785-1801.

[6] Abbaszadeh M, Marquez H J. Dynamical robust H_∞ filtering for nonlinear uncertain systems: An LMI approach[J]. J of the Franklin Institute, 2010, 347(7): 1227-1241.

[7] 刘艳红, 李春文, 王玉振, 等. Lipschitz 广义非线性系统观测器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 205-209. (Liu Y H, Li C W, Wang Y Z, et al. Observer design for Lipschitz nonlinear singular systems[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(2): 205-209.)

(下转第1632页)