第 27 卷 第 10 期
Vol. 27 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 10 月
Oct. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 10-0000-00

求不相交 QoS 路由的一种整数线性规划方法

倪明放, 高石云, 武欣嵘, 童 玮

(解放军理工大学 通信工程学院，南京 210007)

摘 要: 提出求解不相交 QoS 路由问题的一种整数线性规划方法. 首先, 利用一个 0-1 变量集合来表示不相交路由和路由的 QoS 需求; 然后, 通过拉格朗日乘子将集合中的复杂约束引入所导出的整数线性规划问题的目标函数中. 因为约束系数矩阵是全幺模矩阵, 所以这类整数线性规划问题能用单纯形法容易地求解, 从而可在求解线性规划问题的迭代过程中求出不相交 QoS 路由. 数值实验结果表明所提出方法的有效性.

关键词: QoS 路由；链路不相交路由；整数规划；全幺模矩阵

中图分类号: O221.4 **文献标志码:** A

Integer linear program method of finding link-disjoint paths for QoS routing

NI Ming-fang GAO Shi-yun WU Xin-rong TONG Wei

(Institute of Communications Engineering，PLA University of Science and Technology，Nanjing 210007，China. Correspondent：NI Ming-fang，E-mail：xitong316@163.com)

Abstract: An integer linear program method is developed to deal with the problem of finding link-disjoint paths for QoS routing. Firstly, a set of 0-1 variables is given to model link-disjoint paths and QoS constraints. Then the complicating constraints are included in the objective function of the integer linear program problem formulated by Lagrangian multipliers. The integer linear program problem can be solved rapidly by using simplex algorithm for the totally unimodular of the constraint matrix. Furthermore link-disjoint paths for QoS routing can be found in the iterate process of solving linear program problems. Numerical experiment results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: QoS routing；link-disjoint paths；integer programming；totally unimodular matrix

1 引 言

近年来, 关于不相交 QoS 路由问题的研究开始引起人们的关注[1-5]. QoS 路由的任务是在网络中寻找一条满足多个约束条件的路径向用户提供端到端的服务质量保证, 并且使网络资源的利用达到最优. 该问题是一个 NP-完全问题[6]. 不相交路由的作用可使在端到端的连接失败时迅速启用备用的不相交路由. 关于不相交路由的研究对提高网络容错能力、生存能力和网络系统的抗毁能力有重要的意义. 只求两条不相交路由问题的方法可见文献 [7-9]. 但是, 不相交 QoS 路由问题需要考虑多指标约束, 这属于 NP-完全问题[1]. 随着大规模多媒体网络的发展, 关于求不相交 QoS 路由问题的研究越来越显得特别重要.

与 QoS 路由问题相比, 不相交 QoS 路由问题取得的研究成果还比较少. 据调查, 最近出现关于不相交 QoS 路由问题的工作多数是关于不相交路由上所有链路的某一度量值的和取最优的问题[1, 5]. 文献 [5] 给出了基于 D.C 算法的求不相交 QoS 路由的整数线性规划方法. 所谓 D.C 算法是求解 D.C 规划的方法. D.C 规划中的目标函数和约束函数需要表示为两个凸函数的差 (D.C)[10]. D.C 算法是一种全局优化方法, 文献 [5] 给出的方法没有利用整数规划模型具有的结构特点. 对于大规模多媒体网络, 关于某一度量值最优且满足其他 QoS 要求的不相交路由的实时计算是非常困难的. 如果将满足 QoS 要求和路由不相交同时作为约束条件处理能够有效计算出多条路由, 则从应用角度上看是有价值的工作.

本文提出了求不相交 QoS 路由的一种整数线性

收稿日期: 2011-03-28；**修回日期:** 2011-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (70971136).

作者简介: 倪明放(1957−), 男, 教授, 博士生导师, 从事优化算法、整数规划等研究；高石云(1984−), 男, 硕士生, 从事优化理论及其应用的研究.

规划方法. 首先利用0-1变量, 给出路由不相交和路由满足QoS需求的整数线性约束集合表示; 其次, 根据整数线性约束集合具有的结构特点, 整数线性约束集合中的复杂约束通过拉格朗日乘子被引入到目标函数中, 导出具有约束系数矩阵是全幺模矩阵特点的整数线性规划问题, 从而这类整数线性规划问题能用单纯形法容易地求解; 然后, 不相交QoS路由在解线性规划问题的迭代过程中被求出; 最后给出了求不相交QoS路由的算法和数值实验, 实验结果表明本文方法的有效性. 本文是文献[11]在不相交QoS路由研究中的推广.

2 问题描述

设网络用无向图$G=(V,E)$, 其中: $V=\{v_i\}$为节点集, $E=\{e_{ij}\}$为链路集. 设$|V|=M$, $|E|=N$, 边$e_{ij}\in E$标识为$e_{ij}=(v_i,v_j)$, 表示从节点v_i到v_j之间的一条直通链路. 其中: $i,j=1,2,\cdots,M$, $j\neq i, v_i,v_j\in V$. 任意边$e_{ij}\in E$对应的QoS路由度量参数为$w_l(e_{ij})\geqslant 0$, $l=1,2,\cdots,L$, L表示QoS路由度量参数的数目.

对于给定路由度量参数需求$C_l, l=1,2,\cdots,L$, QoS路由就是找到一条由源节点s到目的节点t的路由p满足

$$\sum_{e_{ij}\in p} w_l(e_{ij})\leqslant C_l,\ l=1,2,\cdots,L. \tag{1}$$

为了不滥用记号, 路由p也表示构成p的所有链路的集合. 若这两条路由p_1与p_2的链路集合无相同的元素, 即$p_1\bigcap p_2=\varnothing$, 则称路由$p_1$与$p_2$不相交.

设从源节点s到目的节点t的k条不相交路由集合为D, 则求k条不相交QoS路由问题可归结为求满足以下整数线性约束的k条路由集合D:

$$\sum_{e_{ij}\in p} w_l(e_{ij})\leqslant C_l,\ k=1,2,\cdots,L; \tag{2}$$

$$p_1\bigcap p_2=\varnothing,\ \forall p_1,p_2\in D,\ p_1\neq p_2. \tag{3}$$

定义0-1整数变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\ e_{ij}\in\bigcup\limits_{p\in D} p;\\ 0,\ 其他.\end{cases} \tag{4}$$

那么由源节点s到目的节点t的k条不相交路径必须满足如下约束[5]:

$$\sum_{e_{si}\in E} x_{si}-\sum_{e_{js}\in E} x_{js}=k; \tag{5}$$

$$\sum_{e_{ij}\in E} x_{ij}-\sum_{e_{jh}\in E} x_{jh}=0,\ \forall v_j\in V\backslash\{v_s,v_t\}; \tag{6}$$

$$\sum_{e_{ti}\in E} x_{ti}-\sum_{e_{jt}\in E} x_{jt}=-k. \tag{7}$$

记

$$\sum_{e_{ij}\in D} w_l(e_{ij})\leqslant C_l,\ l=1,2,\cdots,L; \tag{8}$$

$$S=\{x_{ij}|x_{ij}=0或1, 且满足式(5)\sim(8)\}.$$

则求k条不相交QoS路由问题可归结为先求S, 然后根据式(4)确定k条不相交路由.

3 求k条不相交QoS路由问题的算法

定义 1[12] 设B是一个$m\times m$矩阵, 如果矩阵B中的元素是整数且行列式$|\det B|=1$, 则称B为幺模矩阵.

定义 2[12] 设A是一个$m\times n$矩阵, 如果A中任意一个子方阵的行列式的值恒等于0, 1或-1, 则称矩阵A为全幺模矩阵.

考虑如下整数线性规划问题P_1及其对应的松弛线性规划问题P_2, 即

$$\begin{aligned}P_1:\quad &\min\quad cx;\\ &\text{s.t.}\quad Ax=b,\ x\geqslant 0且为整数向量.\\ P_2:\quad &\min\quad cx;\\ &\text{s.t.}\quad Ax=b,\ x\geqslant 0.\end{aligned}$$

其中: A, c和b为已知的适当维数的向量或矩阵.

定理 1 如果A是全幺模矩阵, 则用单纯形法求解线性规划问题P_2即可得到整数线性规划问题P_1的最优解.

证明 定理1是显然成立的. 事实上, 单纯形法是通过线性规划的基本可行解逐步迭代得到最优解, 而A是全幺模矩阵保证了每个基本可行解都是整数解. □

为了利用定理1的结论, 对于给定的拉格朗日乘子$\lambda_l\geqslant 0$, $l=1,2,\cdots,L$, 构造如下整数线性规划模型$(L(\lambda))$:

$$\begin{aligned}&\min\quad \sum_{l=1}^{L}\lambda_l\Big(\sum_{e_{ij}\in E} w_l(e_{ij})x_{ij}-C_l\Big),\\ &\text{s.t.}\quad x_{ij}\in\{x_{ij}|x_{ij}=0或1, 且满足式(5)\sim(7)\}.\end{aligned}$$

定理 2 整数线性规划模型$L(\lambda)$可看成线性规划问题来求解.

证明 如果将整数线性规划模型$L(\lambda)$中的约束"$x_{ij}=0$或1"松弛为"$0\leqslant x_{ij}\leqslant 1$", 由于约束(5)~(7)的特殊性[12], 整数线性规划模型$L(\lambda)$松驰问题的约束矩阵是全幺模矩阵, 据定理1可知定理2的结论成立. □

定理 3 假设$x_{ij}(e_{ij}\in E)$为整数线性规划模型$L(\lambda)$的最优解, 且根据式(4)确定k条路由. 如果$x_{ij}(e_{ij}\in E)$满足式(2), 则这k条路由是k条由源节点s到目的节点t的不相交QoS路由.

根据定理 1 和定理 2, 整数线性规划模型 $L(\lambda)$ 是可以松驰为容易求解的线性规划问题. 因此, 求 k 条不相交 QoS 路由可使用迭代求解整数线性规划模型 $L(\lambda)$ 的方法. 拉格朗日乘子 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_L)$ 的调整可采用罚函数法的乘子更新方法[13], 即

$$\lambda^{k+1}=\begin{cases}\lambda^k, \Delta\lambda^k\leqslant 0;\\ \lambda^k+\alpha^k\Delta\lambda^k,\ \Delta\lambda^k>0.\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$\Delta\lambda^k=\sum_{e_{ij}\in E} w(e_{ij})x_{ij}^k-C,\ \alpha\in(1,4],\tag{10}$$

且 x_{ij}^k 是整数线性规划模型 $L(\lambda^k)$ 的最优解. 因此, 根据式 (4) 和 x_{ij}^k 可得到 k 条由源节点 s 到目的节点 t 的不相交 QoS 路由, 利用式 (8) 检查能否满足约束条件.

下面给出求 k 条不相交 QoS 路由算法:

Step 1: 设定最大迭代数为 T, $k=0$, 初始乘子 $\lambda_l^k=0, l=1,2,\cdots,L, \alpha\in(1,4]$.

Step 2: 用单纯形法求解整数线性规划问题 $L(\lambda^k)$ 得到最优解 x_{ij}^k.

Step 3: 计算

$$\Delta\lambda_l^k=\sum_{e_{ij}\in E} w_l(e_{ij})x_{ij}^k-C_l,\ l=1,2,\cdots,L.$$

检查 $\Delta\lambda_l^k$ 是否满足

$$\Delta\lambda_l^k\leqslant 0,\ l=1,2,\cdots,L.$$

如果满足, 由式 (4) 和 x_{ij}^k 得到 K 条不相交 QoS 路由, 停止计算; 否则, 进入下一步.

Step 4: 对于 $k<T$, 由式 (9) 更新乘子 λ_l^k, 令 $k=k+1$, 转 Step 2, 否则转下一步.

Step 5: 由式 (4) 和 x_{ij}^k 得到 K 条不相交路由, 修正路由以使其满足 QoS 需求, 停止计算.

注 1　在 Step 2 中, 当 $k=0$ 时, $L(\lambda^k)$ 的目标函数为 0, 只要求得可行解.

4　算法实验

例 1　以具有 10 个节点, 21 条边的网络为例说明上述算法过程, 如图 1 所示. 图 1 中圆括号里的数据分别表示费用和时延, 是在 [1, 10] 中随机取得的整数.

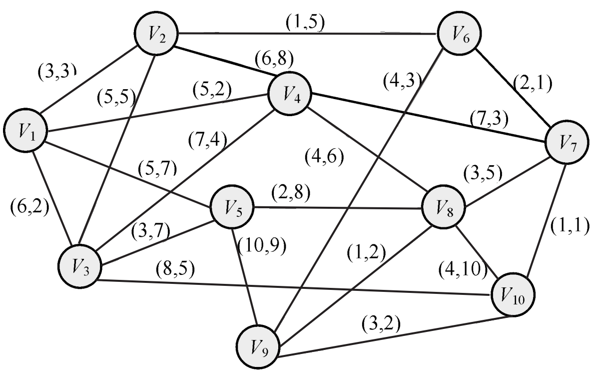

图 1　**随机生成的网络拓扑图**

设源点为 v_1, 目的点为 v_{10}, 取 $K=2$, 考虑费用和时延两个约束条件. QoS 路由费用的约束值设为 20, 时延的约束值设为 30, 根据算法有如下计算结果:

1) 设 $\lambda_l^0=0,\ l=1,2,\ \alpha=2$, 解线性规划得到链路集 $\{e_{13},e_{15},e_{58},e_{310},e_{810}\}$, 根据式 (4) 可得两条不相交路径为 $v_1\to v_3\to v_{10}$ 和 $v_1\to v_5\to v_8\to v_{10}$, 根据式 (10) 计算 $\Delta\lambda_l^k$, 可知费用和时延都不满足约束条件;

2) 根据式 (9) 计算 $\lambda_1^1=5,\ \lambda_2^1=1$, 解线性规划得到新的链路集 $\{e_{12},e_{13},e_{26},e_{67},e_{310},e_{710}\}$, 根据式 (4) 可得两条不相交路径为 $v_1\to v_3\to v_{10}$ 和 $v_1\to v_2\to v_6\to v_7\to v_{10}$, 根据式 (10) 计算 $\Delta\lambda_l^k$, 时延满足约束条件, 但费用不满足约束;

3) 再根据式 (9) 计算 $\lambda_1^2=7,\lambda_2^2=2$, 解线性规划得到链路集 $\{e_{12},e_{15},e_{26},e_{58},e_{67},e_{710},e_{89},e_{910}\}$, 对应的不相交路径是 $v_1\to v_2\to v_6\to v_7\to v_{10}$ 和 $v_1\to v_5\to v_8\to v_9\to v_{10}$, 根据式 (10) 计算 $\Delta\lambda_l^k$, 满足费用和时延约束, 从而得到可行解.

算法在 Intel(R) Pentium(R)4 2.93 GHz 的计算机上通过 MatlabR 2009 a 编程环境, 对 $M=40$, $N=$191,

表 1　**数值实验结果**

参数	实例编号	迭代次数	结果
$M=40, N=191, \alpha=2$	1	2	S
	2	3	S
	3	2	S
	4	2	S
	5	3	S
	6	2	S
	7	2	S
	8	2	S
	9	2	S
	10	2	S
$M=100, N=435, \alpha=2$	11	2	S
	12	2	S
	13	4	S
	14	3	S
	15	2	S
	16	3	S
	17	3	S
	18	4	S
	19	2	S
	20	3	S
$M=400, N=1\,703, \alpha=2$	21	3	S
	22	3	S
	23	10	R
	24	4	S
	25	3	S
	26	5	S
	27	3	S
	28	3	S
	29	5	S
	30	3	S

$L = 2$, $M = 100$, $N = 435$, $L = 2$和$M = 400$, $N = 1\,703$, $L = 2$的3组求2条由源节点s到目的节点t的不相交QoS路由的例子(每组10个)进行了数值实验. QoS路由时延为随机取于[1, 3]的整数值, QoS路由的费用为随机取于[1, 6]的整数值. QoS路由约束值C_l为随机取于$[0.005\tau, 0.025\tau]$的值, 其中

$$\tau = NM^{-1}\sum_{e_{ij}\in E} w_l(e_{ij}).$$

设最大迭代次数$T = 10$, 用字母"S", "R"分别表示"找到可行解"和"找到修正后的可行解". 表1给出了数值实验结果. 从表1可以看出, 在最大迭代次数为10的限制下, 有97%的例子能直接找到不相交QoS路由, 只有3%的例子中需要修正才得到不相交QoS路由, 算法的计算效果是很好的.

5 总 论

本文提出了求不相交QoS路由的一种整数线性规划方法. 利用0-1变量, 给出了求不相交QoS路由的整数线性约束集合; 其次, 根据整数线性约束集合具有的结构特点, 通过拉格朗日乘子将复杂约束引入到目标函数中, 使问题变成容易求解的约束系数矩阵是全幺模矩阵的整数线性规划问题; 接着, 不相交QoS路由在解线性规划问题的迭代过程中被求出; 最后, 给出了求不相交QoS路由的算法和数值实验. 数值实验表明所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Guo Y, Kuipers F A, Van Mieghem P. A link disjoint paths algorithm for reliable QoS routing[J]. Int J of Communication Systems, 2003, 16(9): 779-798.

[2] Gummadi K P, Pradeep M J, Murthy C S R. An efficient primary-segmented backup scheme for dependable real-time communication in multihop networks[J]. ACM/IEEE Trans on Networking, 2003, 11(1): 81-94.

[3] Lo C C, Chuang B W. A novel approach of backup path reservation for survivable high-speed networks[J]. IEEE Communications Magazine, 2003.

[4] Kodialam M, Lakshman T V. Restorable dynamic quality of service routing[J]. IEEE Communications Magazine, 2002: 72-81.

[5] Son T A, Hoai A L T, Khadraoui D. Solving QoS routing problems by DCA[J]. Intelligent Information and Database Systems, 2010, 5991/2010: 460-470.

[6] Korkmaz T, Krunz M. Multi-constrained optimal path selection[J]. Intelligent Information and Database Systems, Lecture Notes in Computer Science, 2010, 5991/2010: 460-470.

[7] Suurballe J W. Disjoint paths in a network[J]. Networks, 1974, 4: 125-145.

[8] Suurballe J W, Tarjan R E. A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths[J]. Networks, 1984, 14: 325-333.

[9] Bhandari R. Optimal diverse routing in telecom fiber networks[C]. Proc of IEEE INFOCOM'94. Toronto, 1994: 1498-1508.

[10] Horst R, Pardalos P M, Thoai N V. Introduction to global optimization[M]. Berlin: Springer, 2000.

[11] Mingfang Ni, Xinrong Wu, Yan Zheng, et al. A method based on penalty function and integer programming for QoS routing problem[C]. Ningbo, 2010: 2432-2434.

[12] Nemhauser G L, Wolsey L A. Integer and combinatorial optimization[M]. New York: John Willey & Sons, 1988: 540-546.

[13] Nocedal J, Wright S J. Numerical optimization[M]. New York: Springer, 1999.