

观测站位置状态扰动下 Taylor 级数迭代定位方法及性能分析

王 鼎

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

摘要: 针对具有一般普适意义的定位方程, 给出观测站位置状态扰动下基于 Taylor 级数迭代的目标定位方法, 并推导其理论性能。分别在“无校正源(情况 a)”和“有校正源(情况 b)”两种条件下进行算法推导和理论分析。针对情况(a), 给出两种 Taylor 级数迭代公式, 并证明两种方法的定位性能趋于一致, 均能够达到相应克拉美罗界; 针对情况(b), 首先给出基于差分校正的 Taylor 级数迭代公式, 针对其不足提出一种基于两步最优融合的 Taylor 级数迭代公式, 并证明其理论性能可达到相应克拉美罗界。最后, 设计两种无源定位实验场景用以验证算法设计与理论分析的有效性。

关键词: 无源定位; 克拉美罗界; 校正源; 差分校正定位; 两步最优融合定位; Taylor 级数迭代

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2013)12-1634-10

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.12.014

The Taylor-Series Location and Its Performance Analysis with Erroneous Observer Positions

WANG Ding

(Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University,
Zhengzhou 450002, China)

Abstract: In this paper, a Taylor-series location method and its performance analysis are presented in presence of sensor position errors for general measurement equations. Two cases in the absence of calibration sources (a) and in the presence of calibration sources (b) are discussed. For the case (a), two Taylor-series iteration formulas are given, and their theoretical performances are proven to be consistent with each other, and equal to the corresponding Cramér-Rao bound (CRB). For the case (b), the Taylor-series location formula based on the difference calibration (DC) location is derived. Aiming to the shortcoming of the DC location technique, the Taylor-series iterative method based on two-step optimal fusion is proposed, whose theoretical performance is proven to reach to the corresponding CRB. Finally, some simulation experiments for two passive location scenarios are conducted to verify the effectiveness of the location algorithms and the performance analysis in this paper.

Key words: Passive location; Cramér-Rao bound (CRB); Calibration sources; Difference calibration (DC) location; Two-step optimal fusion location; Taylor-series iteration

0 引言

无源定位系统^[1-17]利用若干位置状态精确已知的观测站接收来自辐射源的信号, 并从中挖掘出

可用于定位的参数信息, 典型的参数包括: 接收信号强度 (Received Signal Strength, RSS)^[2], 到达时间 (Time of Arrival, TOA)^[3-4], 到达时间差 (Time Difference of Arrival, TDOA)^[5-8], 到达角度 (Angle of

Arrival, AOA)^[9-10], 到达频率差 (Frequency Difference of Arrival, FDOA)^[11-14] 等。基于上述观测信息的目标定位算法已相继提出, 其中既包括迭代类算法 (Taylor 级数迭代算法^[6,9,13]、约束加权最小二乘 (Constrained Weighted Least Squares, CWLS) 算法^[2,4,14]、约束总体最小二乘 (Constrained Total Least Squares, CTLS) 算法^[8]、结构总体最小二乘 (Structured Total Least Squares, STLS) 算法^[10]、基于凸优化的定位算法^[7] 等), 也包括能够直接给出目标位置状态闭式解的定位方法^[3,5,11-12]。尽管上述方法可以取得较好的定位性能, 但很多算法只适用于特定的观测方程, 普适性不强。需要指出的是, 仅有 Taylor 级数迭代法可适用于任意观测方程, 具有推广性, 因此本文将重点针对该类方法进行理论研究。

大多数无源定位算法都假设观测站位置状态信息精确已知, 但实际中的观测站位置状态往往会存在扰动误差, 这种扰动会影响算法性能。文献[12]基于 TDOA 和 FDOA 的观测方程, 对观测站位置状态扰动影响进行了定量的理论推导。一般而言, 存在两种方法可克服观测站位置状态扰动的影响, 一种方法是将观测站位置状态扰动量的统计特性融入到定位算法中^[3,5-6,9,12-13], 从而提高算法对扰动的鲁棒性; 另一种方法是在目标辐射源附近放置若干位置状态精确已知的校正源^[15-17], 用来弥补观测站位置状态扰动带来的信息损失。最简单有效的利用校正源的方法是差分校正 (Difference Calibration, DC) 技术^[15]。一般来说, 当校正源接近目标时, DC 定位技术可以很好地抑制观测站位置状态扰动的影响, 该方法已在 GPS 定位系统中得到广泛应用。然而, 该方法未必能获得性能最优的定位精度, 尤其是当校正源远离目标时^[15]。

综上所述, 本文在观测站位置状态扰动条件下, 针对一般普适意义的定位方程, 推导相应的 Taylor 级数迭代公式及其理论性能。文中在“无校正源 (情况 a)”和“有校正源 (情况 b)”两种条件下进行讨论。针对情况 (a), 文中从不同角度给出两类 Taylor 级数迭代方法, 并证明两类方法的定位性能均能够达到相应克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB); 针对情况 (b), 文中首先给出基于 DC 定位的 Taylor 级数迭代公式, 针对 DC 定位的不足提出一种基于两步最优融合的 Taylor 级数迭代公式, 并证明

其理论定位性能可达到相应 CRB。

在给出正文前, 这里约定若干符号: (1) $\text{tr}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的迹; (2) 定义 $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{a}$; (3) \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积; (4) $\mathbf{1}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶全 1 矩阵。

1 目标定位模型与相关假设

1.1 基本定位模型与相关假设

考虑基于 M 个观测站的定位系统, 决定第 m 个观测站的真实位置状态向量为 \mathbf{s}_m^o ($1 \leq m \leq M$), 并令其维数为 K , 假设目标的真实位置状态向量为 \mathbf{t}^o , 并令其维数为 L 。通过获得关于辐射源的各种参数信息可建立目标位置状态向量与观测站位置状态向量之间的代数方程, 不妨将其表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^o &= \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ &= [h_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o), h_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o), \dots, h_N(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)]^T \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{s}^o = [s_1^{oT}, s_2^{oT}, \dots, s_M^{oT}]^T$ 表示关于全部观测站的真实位置状态向量。若令 \mathbf{f}^o 的维数为 N , 为了获得目标的位置状态向量, 显然需要满足 $N \geq L$ 。

显然, 实际中得到的观测向量 \mathbf{f} 总是在其真实值 \mathbf{f}^o 的基础上加上随机扰动, 即有

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^o + \mathbf{n} = \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) + \mathbf{n} \quad (2)$$

式中 \mathbf{n} 表示观测误差, 这里假设它为零均值高斯分布, 其协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\}$ 。另一方面, 实际中获得的观测站位置状态向量 \mathbf{s}_m 也往往是在其真实值 \mathbf{s}_m^o 的基础上加上随机扰动, 即有

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{s}_m^o + \tilde{\mathbf{s}}_m, \quad (1 \leq m \leq M) \quad (3)$$

式中 $\tilde{\mathbf{s}}_m$ 表示观测站位置状态的扰动误差向量, 并令 $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{s}}_1^{oT}, \tilde{\mathbf{s}}_2^{oT}, \dots, \tilde{\mathbf{s}}_M^{oT}]^T$ 表示关于全部观测站位置状态的扰动误差向量, 同样假设它为零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}^T\}$ 。

1.2 基于校正源的观测模型与相关假设

不妨设置 P 个校正源, 第 p 个校正源的真实位置状态向量为 \mathbf{r}_p^o ($1 \leq p \leq P$) (精确已知), 其维数同样为 L 。显然, 实际中同样可以获得关于校正源的各种参数信息, 从而建立校正源位置状态向量与观测站位置状态向量之间的代数方程。类似于式 (1), 关于第 p 个校正源观测量的代数方程可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_p^o &= \mathbf{h}(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o) \\ &= [h_1(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o), h_2(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o), \dots, h_N(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o)]^T \end{aligned} \quad (4)$$

类似地,在实际中得到的观测向量 \mathbf{g}_p 总是在其真实值 \mathbf{g}_p^o 的基础上加上随机扰动,即有

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{g}_p^o + \mathbf{m}_p = \mathbf{h}(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o) + \mathbf{m}_p, \quad (1 \leq p \leq P) \quad (5)$$

式中 \mathbf{m}_p 表示观测误差。这里不妨将关于全部校正源的位置状态向量、观测向量以及误差向量合并表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T, \dots, \mathbf{g}_P^T]^T, \\ \mathbf{g}^o &= [\mathbf{g}_1^{oT}, \mathbf{g}_2^{oT}, \dots, \mathbf{g}_P^{oT}]^T, \\ \mathbf{m} &= [\mathbf{m}_1^T, \mathbf{m}_2^T, \dots, \mathbf{m}_P^T]^T \\ \mathbf{r}^o &= [\mathbf{r}_1^{oT}, \mathbf{r}_2^{oT}, \dots, \mathbf{r}_P^{oT}]^T, \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) + \mathbf{m} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) = [\mathbf{h}^T(\mathbf{r}_1^o, \mathbf{s}^o), \mathbf{h}^T(\mathbf{r}_2^o, \mathbf{s}^o), \dots, \mathbf{h}^T(\mathbf{r}_P^o, \mathbf{s}^o)]^T$ 。此外,同样假设误差向量 \mathbf{m} 为零均值高斯分布,并且其协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_3 = E\{\mathbf{m}\mathbf{m}^T\}$ 。

2 目标定位方差的 CRB

本节将推导目标位置状态向量估计方差的

CRB,并分两种情况进行讨论:(a) 没有校正源;(b) 存在校正源。

2.1 情况(a)

此时的观测向量包括 \mathbf{f} 和 \mathbf{s} ,而决定观测向量中的未知向量包括 \mathbf{t}^o 和 \mathbf{s}^o ,其概率密度函数为

$$\begin{aligned} p^{(a)}(\mathbf{f}, \mathbf{s}; \mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) &= \tau^{(a)} \exp(-(\mathbf{s} - \mathbf{s}^o)^T \mathbf{Q}_2^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^o)/2) \times \\ &\exp(-(\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))/2) \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\tau^{(a)}$ 表示常数因子,于是关于未知向量的 FISM 信息矩阵可分块表示为

$$\text{FISM}^{(a)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(a)} & \mathbf{Y}^{(a)} \\ \mathbf{Y}^{(a)T} & \mathbf{Z}^{(a)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ \mathbf{Y}^{(a)} = \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ \mathbf{Z}^{(a)} = \mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{t}^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{t}^o} & \frac{\partial h_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{t}^o} & \dots & \frac{\partial h_N(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{t}^o} \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{N \times L} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{s}^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{s}^o} & \frac{\partial h_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{s}^o} & \dots & \frac{\partial h_N(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{s}^o} \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{N \times MK} \end{cases} \quad (10)$$

于是关于 \mathbf{t}^o 和 \mathbf{s}^o 的 CRB 矩阵为

$$\begin{cases} \mathbf{CRB}^{(a)}(\mathbf{t}^o) = (\mathbf{X}^{(a)})^{-1} + (\mathbf{X}^{(a)})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)} (\mathbf{Z}^{(a)} - \mathbf{Y}^{(a)T} (\mathbf{X}^{(a)})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)T} (\mathbf{X}^{(a)})^{-1} \\ \mathbf{CRB}^{(a)}(\mathbf{s}^o) = (\mathbf{Z}^{(a)})^{-1} + (\mathbf{Z}^{(a)})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)T} (\mathbf{X}^{(a)} - \mathbf{Y}^{(a)} (\mathbf{Z}^{(a)})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)T})^{-1} \mathbf{Y}^{(a)} (\mathbf{Z}^{(a)})^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

2.2 情况(b)

此时的观测向量包括 \mathbf{f} 、 \mathbf{s} 和 \mathbf{g} ,而决定观测向量中的未知向量包括 \mathbf{t}^o 和 \mathbf{s}^o ,其概率密度函数为

$$\begin{aligned} p^{(b)}(\mathbf{f}, \mathbf{s}, \mathbf{g}; \mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) &= \tau^{(b)} \exp(-(\mathbf{s} - \mathbf{s}^o)^T \mathbf{Q}_2^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^o)/2) \times \\ &\exp(-(\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))/2) \times \\ &\exp(-(\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^T \mathbf{Q}_3^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))/2) \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\tau^{(b)}$ 表示常数因子,于是关于未知向量的 FISM 信息矩阵可分块表示为

$$\text{FISM}^{(b)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(b)} & \mathbf{Y}^{(b)} \\ \mathbf{Y}^{(b)T} & \mathbf{Z}^{(b)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(b)} = \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) = \mathbf{X}^{(a)} \\ \mathbf{Y}^{(b)} = \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) = \mathbf{Y}^{(a)} \\ \mathbf{Z}^{(b)} = \mathbf{Z}^{(a)} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) &= \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)}{\partial \mathbf{s}^o} \\
 &= [\mathbf{H}_2^T(\mathbf{r}_1^o, \mathbf{s}^o) \quad \mathbf{H}_2^T(\mathbf{r}_2^o, \mathbf{s}^o) \quad \cdots \quad \mathbf{H}_2^T(\mathbf{r}_p^o, \mathbf{s}^o)]^T \in \mathbf{R}^{NP \times MK}
 \end{aligned} \tag{15}$$

于是关于 \mathbf{t}^o 和 \mathbf{s}^o 的 CRB 矩阵为

$$\begin{cases} \mathbf{CRB}^{(b)}(\mathbf{t}^o) = (\mathbf{X}^{(b)})^{-1} + (\mathbf{X}^{(b)})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)} (\mathbf{Z}^{(b)} - \mathbf{Y}^{(b)T} (\mathbf{X}^{(b)})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)T} (\mathbf{X}^{(b)})^{-1} \\ \mathbf{CRB}^{(b)}(\mathbf{s}^o) = (\mathbf{Z}^{(b)})^{-1} + (\mathbf{Z}^{(b)})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)T} (\mathbf{X}^{(b)} - \mathbf{Y}^{(b)} (\mathbf{Z}^{(b)})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)T})^{-1} \mathbf{Y}^{(b)} (\mathbf{Z}^{(b)})^{-1} \end{cases} \tag{16}$$

根据式 (11) 和式 (16) 知 $\mathbf{CRB}^{(b)}(\mathbf{t}^o) \leq \mathbf{CRB}^{(a)}(\mathbf{t}^o)$, 即通过引入位置状态精确已知的校正源有助于降低目标定位方差的下界。

3 Taylor 级数迭代公式及其理论性能分析

3.1 情况 (a)

本小节将给出两种抑制观测站位置状态扰动影

响的 Taylor 级数迭代公式 (分别称为 Taylor-a1 和 Taylor-a2), 并推导相应的理论定位性能。

3.1.1 Taylor-a1 迭代公式及其理论性能分析

Taylor-a1 的基本思想是将观测站位置状态扰动的统计特性直接融入到迭代中。假设第 k 次迭代结果为 $\mathbf{t}_k^{(a1)}$, 则第 $k+1$ 次迭代结果可通过求解如下加权线性最小二乘估计器获得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{k+1}^{(a1)} &= \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{L \times 1}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) (\mathbf{x} - \mathbf{t}_k^{(a1)}) - (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))\|_{(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))^{-1}}^2 \\
 &= \mathbf{t}_k^{(a1)} + (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))^{-1} \\
 &\quad \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}_k^{(a1)}, \mathbf{s}))
 \end{aligned} \tag{17}$$

下面推导 Taylor-a1 的理论性能, 若令其迭代收敛值为 $\mathbf{t}^{(a1)}$, 即 $\mathbf{t}^{(a1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{t}_k^{(a1)}$, 则根据式 (17) 可得

$$\mathbf{O} = \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^{(a1)}, \mathbf{s}) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^{(a1)}, \mathbf{s}) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^{(a1)}, \mathbf{s}))^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^{(a1)}, \mathbf{s})) \tag{18}$$

再根据一阶误差分析方法可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}^{(a1)} - \mathbf{t}^o &\approx (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \\
 &\quad \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} (\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) (\mathbf{s}^o - \mathbf{s}) + \mathbf{n})
 \end{aligned} \tag{19}$$

由此可知 Taylor-a1 的估计方差矩阵为

$$\mathbf{MSE}^{(a1)}(\mathbf{t}^o) = (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \tag{20}$$

命题 1. 若 $\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)$ 列满秩, $\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)$ 行满秩, 则有 $\mathbf{MSE}^{(a1)}(\mathbf{t}^o) = \mathbf{CRB}^{(a)}(\mathbf{t}^o)$ 。

命题 1 的证明见附录 A。命题 1 表明 Taylor-a1 的估计方差矩阵即为相应的 CRB 矩阵。

3.1.2 Taylor-a2 迭代公式及其理论性能分析

尽管 Taylor-a1 的估计方差能够达到相应的 CRB, 但无法给出观测站位置状态向量更为精确的

估计, 为此需要将观测站位置状态向量也参与迭代^[6,9,13], 这也是 Taylor-a2 的基本思想。

假设第 k 次迭代得到目标位置状态向量的结果为 $\mathbf{t}_k^{(a2)}$, 观测站位置状态向量的结果为 $\mathbf{s}_k^{(a2)}$, 于是第 $k+1$ 次迭代的结果可通过求解如下加权线性最小二乘估计器获得

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{k+1}^{(a2)} \\ \mathbf{s}_{k+1}^{(a2)} \end{bmatrix} &= \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{L \times 1} \\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{MK \times 1}}}{\operatorname{argmin}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) & \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \\ \mathbf{O}_{MK \times L} & \mathbf{I}_{MK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{t}_k^{(a2)} \\ \mathbf{y} - \mathbf{s}_k^{(a2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(a2)} \end{bmatrix} \right\|_{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{O}_{N \times MK} \\ \mathbf{O}_{MK \times N} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix}}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_k^{(a2)} \\ \mathbf{s}_k^{(a2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) & \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) & \mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{O}_{L \times MK} \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}_k^{(a2)}, \mathbf{s}_k^{(a2)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(a2)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

下面推导 Taylor-a2 理论性能, 若令迭代收敛值为 $\mathbf{t}^{(a2)}$ 和 $\mathbf{s}^{(a2)}$, 即 $\mathbf{t}^{(a2)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{t}_k^{(a2)}$ 和 $\mathbf{s}^{(a2)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{s}_k^{(a2)}$ 则根据式(21)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^{(a2)}, \mathbf{s}^{(a2)})\mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{O}_{L \times MK} \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^{(a2)}, \mathbf{s}^{(a2)})\mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}^{(a2)}, \mathbf{s}^{(a2)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}^{(a2)} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (22)$$

再根据一阶误差分析方法可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(a2)} - \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^{(a2)} - \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{O}_{L \times MK} \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \tilde{\mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

由此可知 Taylor-a2 的估计方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{MSE}^{(a2)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(a)} & \mathbf{Y}^{(a)} \\ \mathbf{Y}^{(a)T} & \mathbf{Z}^{(a)} \end{bmatrix} = \text{CRB}^{(a)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

根据式(24)可知, Taylor-a2 给出的目标位置状态向量估计方差和观测站位置状态向量估计方差都可以达到相应的 CRB。比较 Taylor-a1 和 Taylor-a2 可知它们在定位精度上是一致的, 都可以达到相应的 CRB, 但 Taylor-a2 的优势在于它可以给出更为精确的观测站位置状态向量估计值。

3.2 情况(b)

本小节首先给出一种基于 DC 定位的 Taylor 级数迭代公式(称为 Taylor-b1), 并推导其理论性能。鉴于 DC 定位性能难以达到相应 CRB(尤其当校正源远离目标时), 文中提出一种定位性能可达到相应 CRB 的 Taylor 级数迭代公式(称为 Taylor-b2), 并从理论上证明其最优性。

3.2.1 Taylor-b1 迭代公式及其理论性能分析

DC 定位的基本思想是将目标辐射源的观测方

程与校正源的观测方程直接相减, 从而得到如下新的观测方程

$$\mathbf{df}_p = \mathbf{f} - \mathbf{g}_p = \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{h}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) + \mathbf{n} - \mathbf{m}_p \quad (25)$$

若令 $\mathbf{df} = [\mathbf{df}_1^T \ \mathbf{df}_2^T \ \dots \ \mathbf{df}_p^T]^T$, 则有

$$\mathbf{df} = \mathbf{1}_{p \times 1} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{g} = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) + \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{m} \quad (26)$$

式中 $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) = \mathbf{1}_{p \times 1} \otimes \mathbf{h}(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)$ 和 $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{1}_{p \times 1} \otimes \mathbf{n}$ 。

下面将针对观测方程式(26), 基于 Taylor-a2 的迭代方式, 联合给出估计目标位置状态向量和观测站位置状态向量的迭代公式。假设第 k 次迭代的结果分别为 $\mathbf{t}_k^{(b1)}$ 和 $\mathbf{s}_k^{(b1)}$, 则第 $k+1$ 次迭代的结果可通过求解如下加权线性最小二乘估计器获得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{k+1}^{(b1)} \\ \mathbf{s}_{k+1}^{(b1)} \end{bmatrix} &= \underset{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{L \times 1} \\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{MK \times 1}}}{\text{argmin}} \left\| \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) & \bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \\ \mathbf{O}_{MK \times L} & \mathbf{I}_{MK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{t}_k^{(b1)} \\ \mathbf{y} - \mathbf{s}_k^{(b1)} \end{bmatrix} \right\| \\ &\quad \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{df} - \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(b1)} \end{bmatrix} \right\|_{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{13}^{-1} & \mathbf{O}_{NP \times MK} \\ \mathbf{O}_{MK \times NP} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_k^{(b1)} \\ \mathbf{s}_k^{(b1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)})\mathbf{Q}_{13}^{-1}\bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \\ (\bar{\mathbf{H}}_2^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)}))\mathbf{Q}_{13}^{-1}\bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \mathbf{Q}_{13}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)})) \\ & \mathbf{Q}_2^{-1} + (\bar{\mathbf{H}}_2^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)})) \mathbf{Q}_{13}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)})) \end{aligned} \right]^{-1} \cdot \\ & \left[\begin{array}{cc} \bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \mathbf{Q}_{13}^{-1} & \mathbf{O}_{L \times MK} \\ (\bar{\mathbf{H}}_2^T(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) - \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)})) \mathbf{Q}_{13}^{-1} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} d\mathbf{f} - \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b1)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(b1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $\bar{\mathbf{H}}_l(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) = \mathbf{1}_{P \times 1} \otimes \mathbf{H}_l(\mathbf{t}_k^{(b1)}, \mathbf{s}_k^{(b1)}) (l = 1, 2), \mathbf{Q}_{13} = \mathbf{1}_{P \times P} \otimes \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_3$ 。

类似于对 Taylor-a2 的理论性能分析可知 Taylor-b1 的估计方差矩阵为

$$\text{MSE}^{(b1)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) = \left[\begin{array}{cc} \bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_{13}^{-1} \bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_{13}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)) \\ (\bar{\mathbf{H}}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)) \mathbf{Q}_{13}^{-1} \bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) & \mathbf{Q}_2^{-1} + (\bar{\mathbf{H}}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)) \mathbf{Q}_{13}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)) \end{array} \right]^{-1} \quad (28)$$

命题 2. 若 $\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)$ 列满秩, $\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)$ 行满秩, 则有 $\text{MSE}^{(b1)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) \geq \text{CRB}^{(b)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right)$ 。

命题 2 的证明类似于文献[15], 限于篇幅这里不再阐述。命题 2 表明 DC 定位的性能难以达到相应 CRB。事实上, DC 定位要想获得好的定位精度需要校正源位置状态接近目标, 这是因为

$$\lim_{\mathbf{r}^o \rightarrow \mathbf{t}^o} \text{MSE}^{(b1)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}^o \\ \mathbf{s}^o \end{bmatrix} \right) = \left[\begin{array}{cc} (\bar{\mathbf{H}}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_{13}^{-1} \bar{\mathbf{H}}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_2 \end{array} \right] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1}^{(b2)} &= \underset{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{MK \times 1}}{\text{argmin}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)}) \\ \mathbf{I}_{MK} \end{bmatrix} (\mathbf{s}^o - \mathbf{s}_k^{(b2)}) - \begin{bmatrix} \mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)}) \\ \mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(b2)} \end{bmatrix} \right\|_{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_3^{-1} & \mathbf{O}_{NP \times MK} \\ \mathbf{O}_{MK \times NP} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{bmatrix}}^2 \\ &= \mathbf{s}_k^{(b2)} + (\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)}) \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)}))^{-1} (\mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)}) \mathbf{Q}_3^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}_k^{(b2)})) + \mathbf{Q}_2^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_k^{(b2)})) \end{aligned} \quad (30)$$

若令其迭代收敛值为 $\mathbf{s}^{(b2)}$, 则类似于对 Taylor-a2 的理论性能分析可知 $\mathbf{s}^{(b2)}$ 的估计方差矩阵为

$$\text{MSE}^{(b2)}(\mathbf{s}^o) = (\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o) \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{k+1}^{(b2)} &= \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{L \times 1}}{\text{argmin}} \left\| \mathbf{H}_1(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}) (\mathbf{x} - \mathbf{t}_k^{(b2)}) - (\mathbf{f} - \mathbf{h}(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)})) \right\|_{(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}) (\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^{(b2)}) \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^{(b2)}))^{-1} \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}))^{-1}}^2 \\ &= \mathbf{t}_k^{(b2)} + (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}) (\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^{(b2)}) \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^{(b2)}))^{-1} \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}))^{-1} \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}_k^{(b2)}, \mathbf{s}^{(b2)}))^{-1} \end{aligned}$$

从式(29)中可以看出, 当校正源位置状态与目标位置状态完全一致时, 观测站位置状态扰动的影响可以完全消除, 这也是 DC 定位的一个重要优势。然而, 由于实际中的目标位置状态是未知的, 因此通常很难保证校正源的位置状态与目标的位置状态接近。

3.2.2 Taylor-b2 迭代公式及其理论性能分析

这里将给出基于两步最优融合的 Taylor 级数迭代公式。首先考虑观测站位置状态向量的估计。假设第 k 次迭代的结果为 $\mathbf{s}_k^{(b2)}$, 于是第 $k + 1$ 次迭代的结果可通过求解如下加权线性最小二乘估计器获得

接着, 利用第一步迭代结果及其统计特性来估计目标位置状态向量。假设第 k 次迭代的结果为 $\mathbf{t}_k^{(b2)}$, 则第 $k + 1$ 次迭代的结果可通过求解如下加权线性最小二乘估计器获得

$$s^{(b2)})^{-1}H_1(t_k^{(b2)}, s^{(b2)})^{-1} \times H_1^T(t_k^{(b2)}, s^{(b2)})(Q_1 + H_2(t_k^{(b2)}, s^{(b2)})(Q_2^{-1} + H_3^T(r^o, s^{(b2)})Q_3^{-1}H_3(r^o, s^{(b2)}))^{-1}H_2^T(t_k^{(b2)}, s^{(b2)}))^{-1}(f - h(t_k^{(b2)}, s^{(b2)})) \quad (32)$$

若令其迭代收敛值为 $t^{(b2)}$, 则类似于对 Taylor-a1 的性能分析可知 $t^{(b2)}$ 的估计方差矩阵为

$$MSE^{(b2)}(t^o) = (H_1^T(t^o, s^o)(Q_1 + H_2(t^o, s^o)(Q_2^{-1} + H_3^T(r^o, s^o)Q_3^{-1}H_3(r^o, s^o))^{-1}H_2^T(t^o, s^o))^{-1}H_1(t^o, s^o))^{-1} \quad (33)$$

命题 3. 若 $H_1(t^o, s^o)$ 列满秩, $H_2(t^o, s^o)$ 行满秩, 则有 $MSE^{(b2)}(t^o) = CRB^{(b)}(t^o)$ 。

命题 3 的证明见附录 B。命题 3 表明 Taylor-b2 的定位性能能够达到相应的 CRB。

4 仿真实验

4.1 联合 TDOA 信息和 AOA 信息的定位仿真实验

本小节的仿真实验是在没有校正源的条件下进行, 相应的定位方程为

$$\begin{cases} \Delta T_k^o = (\|t^o - s_k^o\| - \|t^o - s_1^o\|)/c \\ \theta_k^o = \arctan((t^o(1) - s_k^o(1))/(t^o(2) - s_k^o(2))) \\ \beta_k^o = \arctan((t^o(3) - s_k^o(3))/\|t^o(1:2) - s_k^o(1:2)\|) \end{cases} \quad (34)$$

式中 ΔT_k^o , θ_k^o 和 β_k^o 分别表示时差, 方位角和仰角, c 为光速。

假设有 6 个观测站, 观测站的三维坐标见表 1, 静止目标的三维坐标为 (2000m, 2500m, 3000m)。假设 TDOA 和 AOA 的估计误差均为独立高斯噪声, 其方差分别为 $\sigma_{\text{时差}}^2 = 10^{-4}/c^2$ 和 $\sigma_{\text{角度}}^2 = 2.5 \times 10^{-7}$ (按弧度计算), 观测站三维坐标扰动方差为 $\sigma_{\text{坐标}}^2 = \delta^2$ (δ 为变量, 并称为观测站位置状态扰动标准差)。图 1 给出目标定位均方根误差随 δ 的变化曲线, 图中给出 Taylor-a1、Taylor-a2 以及不考虑观测站位置状态扰动的 Taylor 级数迭代法的定位均方根误差的仿真值(离散点)和理论值(曲线), 并且与第 2.1 节推导的 CRB 进行比较(CRB-a 对应情况(a))。

表 1 观测站三维坐标的数值列表(单位:m)

Table 1 The 3-D coordinate of the observers (m)

观测站序号	1	2	3	4	5	6
x	300	400	300	350	-100	200
y	100	150	500	200	-100	-300
z	150	100	200	100	-100	-200

从图 1 中可以看出, Taylor-a1 和 Taylor-a2 定位

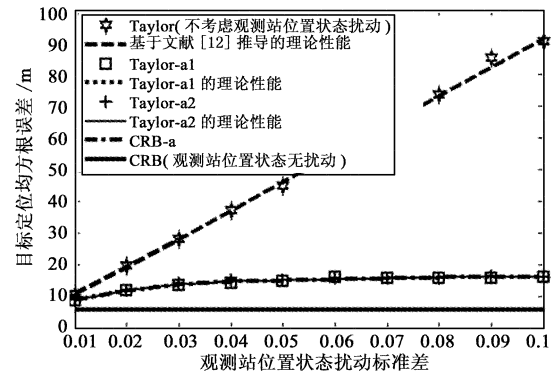


图 1 目标定位均方根误差随 δ 的变化曲线

Fig. 1 Curves of location RMSE changing with δ

性能的仿真值与理论值都能够很好的吻合, 并且 Taylor-a1 和 Taylor-a2 的定位性能是一致的(均为 CRB-a), 而且都优于不考虑观测站位置状态扰动的 Taylor 级数迭代法, 从而说明 Taylor-a1 和 Taylor-a2 均能够很好的抑制观测站位置状态扰动的影响。

下面固定观测站位置状态扰动标准差为 $\delta = 0.03$, 而改变目标辐射源的 TDOA 信息和 AOA 信息的估计方差 $\sigma_{\text{时差}}^2$ 和 $\sigma_{\text{角度}}^2$, 并且保持它们之间的数值关系为 $\sigma_{\text{角度}} = 0.05 \times c \times \sigma_{\text{时差}}$, 其它仿真条件同上。图 2 给出上述 Taylor 级数方法的目标定位均方根误差随着 $\sigma_{\text{时差}}$ 的变化曲线。

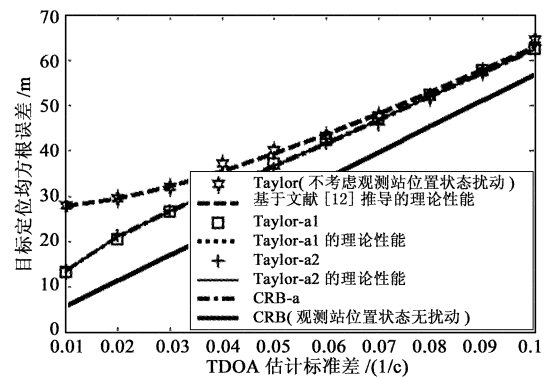


图 2 目标定位均方根误差随 $\sigma_{\text{时差}}$ 的变化曲线

Fig. 2 Curves of location RMSE changing with $\sigma_{\text{时差}}$

从图 2 中可以得到类似于图 1 中的结论, 这里不再重复叙述。此外, 从图 2 中还可以看出, 随着参数估计方差的增加, Taylor-a1 和 Taylor-a2 的定位性能与不考虑观测站位置状态扰动的 Taylor 级数迭代法的性能逐渐接近, 这是因为随着参数估计方差的

$$\begin{cases} \Delta T_k^o = (\|\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_k^o\| - \|\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_1^o\|) / c \\ \Delta F_k^o = f((\dot{\mathbf{t}}^o - \dot{\mathbf{s}}_k^o)^T(\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_k^o) / \|\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_k^o\| - (\dot{\mathbf{t}}^o - \dot{\mathbf{s}}_1^o)^T(\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_1^o) / \|\mathbf{t}^o - \mathbf{s}_1^o\|) / c \end{cases} \quad (35)$$

式中 ΔT_k^o 和 ΔF_k^o 分别表示时差和频差, f 为频率。

这里仍假设有 6 个观测站, 观测站的三维坐标同表 1, 但是观测站处于运动状态, 其三维速度的数值见表 2, 静止目标的三维坐标为 (2000m, 2500m, 3000m)。此外, 假设存在两个位置状态精确已知的校正源, 这里讨论三种条件: 条件 (I) 假设两个校正源接近目标辐射源, 其坐标分别为 (1400m, 3000m, 2600m) 和 (2400m, 1800m, 3500m); 条件 (II) 假设一个校正源接近目标辐射源、另一个校正源远离目标辐射源, 其坐标分别为 (1400m, 3000m, 2600m) 和 (300m, -200m, -400m); 条件 (III) 假设两个校正源远离目标辐射源, 其坐标分别为 (-500m, -300m, 200m) 和 (300m, -200m, -400m)。假设 TDOA 和 FDOA 的估计误差均为独立高斯噪声, 其方差分别为 $\sigma_{\text{时差}}^2 = 10^{-4}/c^2$ 和 $\sigma_{\text{频率}}^2 = 10^{-5}f^2/c^2$, 并且下文均假设目标源参数估计方差与校正源参数估计方差相同, 观测站坐标和速度扰动同样为独立高斯噪声, 方差分别为 $\sigma_{\text{坐标}}^2 = \delta^2$ 和 $\sigma_{\text{速度}}^2 = 0.01 \times \delta^2$ (δ 为变量, 并称其为观测站位置状态扰动标准差)。图 3 分别给出上述三种条件下的目标定位均方根误差随 δ 的变化曲线, 图中给出 Taylor-b1 (即 DC 定位) 和 Taylor-b2 (即两步最优融合定位) 的定位均方根误差的仿真值 (离散点) 和理论值 (曲线), 并且与相应的 CRB 进行比较 (CRB-b 对应情况 (b))。

表 2 观测站三维速度的数值列表 (单位: m/s)

Table 2 The 3-D velocity of the observers (m/s)

观测站序号	1	2	3	4	5	6
\dot{x}	30	-30	10	10	-20	20
\dot{y}	-20	10	-20	20	10	-10
\dot{z}	20	20	10	30	10	10

从图 3 中可以看出: (1) 当两个校正源都离目标辐射源较近时, 两种 Taylor 级数方法的定位性能较为接近, 当 δ 较小时, Taylor-b2 的性能略优, 而随

增加, 观测站位置状态扰动的影响逐渐减弱, 此时三种 Taylor 级数方法的定位性能将趋于一致。

4.2 联合 TDOA 信息和 FDOA 信息定位仿真实验

本小节的仿真实验是在校正源存在的情况下进行, 相应的定位方程为

着 δ 的增加, 两种方法的性能几乎相当, 并且都能够逼近相应的 CRB-b, 此外, 它们的定位性能均远优于没有校正源情况下的 CRB-a, 这说明 DC 定位在校正源接近目标时可以很好的抑制观测站位置状态扰动的影响。(2) 当一个校正源离目标辐射源较近、另一个离目标辐射源较远时, 两种 Taylor 级数方法的定位性能差距有所增加, 但仍较为接近, 并且仍都远优于 CRB-a。(3) 当两个校正源都离目标辐射源较远时, Taylor-b1 的定位性能将大大降低, 甚至已经差于 CRB-a, 也就是说, 此时通过 DC 的方式利用

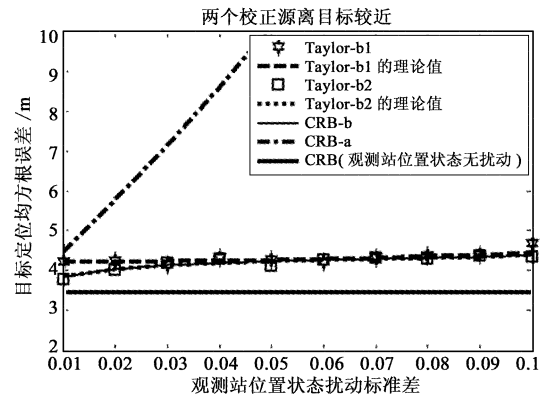


图 3(a) 条件 (I)

Fig. 3(a) Condition (I)

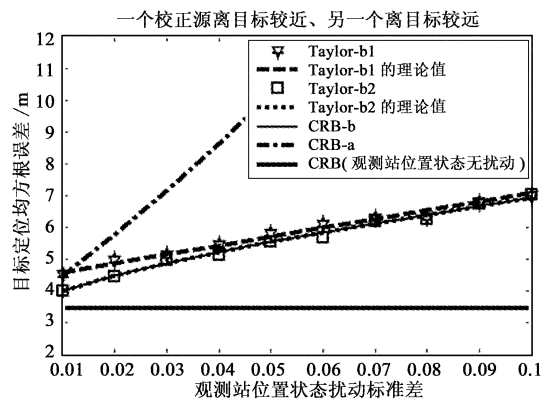


图 3(b) 条件 (II)

Fig. 3(b) Condition (II)

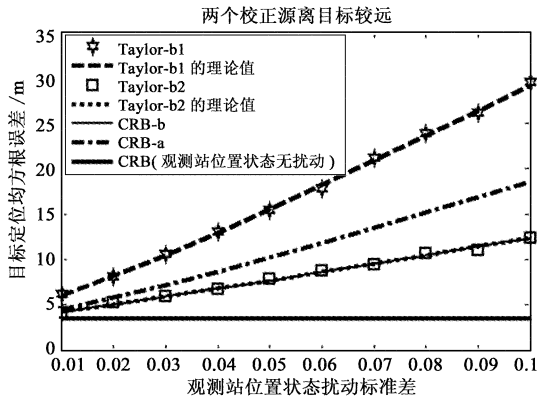


图 3(c) 条件(III)

Fig. 3(c) Condition (III)

图 3 目标定位均方根误差随 δ 的变化曲线Fig. 3 Curves of location RMSE changing with δ

校正源反而会带来负面效应,但 Taylor-b2 的定位性能仍能够稳健的逼近 CRB-b,从而说明 Taylor-b2 的最优性。(4) 横向比较 Taylor-b2 的定位性能可知,校正源越接近目标, Taylor-b2 的定位性能也越优,因此,实际中无论采用哪种方法,总是希望校正源越接近目标越好。(5) 两种 Taylor 级数方法定位性能的仿真值与理论值都能够很好的吻合,并且 Taylor-b2 的定位性能即为 CRB-b,而 Taylor-b1 的定位性能总是差于 CRB-b。

$$(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_2\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} = \mathbf{Q}_1^{-1} - \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1} \quad (36)$$

将式(36)代入式(20)可得

$$\begin{aligned} \text{MSE}^{(a1)}(\mathbf{t}^o) &= (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_2\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \\ &= (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \\ &\quad \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^{(a)} - \mathbf{Y}^{(a)}(\mathbf{Z}^{(a)})^{-1}\mathbf{Y}^{(a)T})^{-1} = \mathbf{CRB}^{(a)}(\mathbf{t}^o) \end{aligned} \quad (37)$$

根据式(37)可知命题1成立。

附录 B — 命题 3 的证明

根据矩阵求逆公式可得

$$\begin{aligned} &(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \\ &= \mathbf{Q}_1^{-1} - \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) + \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

将式(38)代入式(33)可得

$$\begin{aligned} \text{MSE}^{(b2)}(\mathbf{t}^o) &= (\mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \\ &\quad \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o))^{-1} \\ &= \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) - \mathbf{H}_1^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_2(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) + \\ &\quad \mathbf{H}_3^T(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{H}_3(\mathbf{r}^o, \mathbf{s}^o))^{-1}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o)\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{H}_1(\mathbf{t}^o, \mathbf{s}^o) \\ &= (\mathbf{X}^{(b)} - \mathbf{Y}^{(b)}\mathbf{Z}^{(b)-1}\mathbf{Y}^{(b)T})^{-1} = \mathbf{CRB}^{(b)}(\mathbf{t}^o) \end{aligned} \quad (39)$$

需要指出的是,上述数值实验中的 Taylor 级数迭代算法初值均是在真值上加上较大的随机扰动,实验结论表明文中 Taylor 级数迭代对初值影响并不大,而且只要迭代收敛,其定位性能基本趋于一致。

5 结论

本文针对观测站位置状态扰动的影响,在“无校正源(情况 a)”和“有校正源(情况 b)”两种条件下推导相应的 Taylor 级数迭代公式及其理论性能。针对情况(a),文中给出两类 Taylor 级数迭代公式,并证明两类方法的定位性能趋于一致,均能够达到相应 CRB;针对情况(b),文中给出基于 DC 定位的 Taylor 级数迭代公式,针对 DC 定位的不足提出一种基于两步最优融合的 Taylor 级数迭代公式,并证明其理论性能可达到相应 CRB。文中的理论分析不局限于某一类特定观测方程和校正源个数,具有一定普适性。最后文中通过设计联合 TDOA/AOA 信息的定位场景和联合 TDOA/FDOA 信息的定位场景进行仿真实验,用以验证文中理论分析的有效性。

附录 A — 命题 1 的证明

根据矩阵求逆公式可得

根据式(39)可知命题 3 成立。

参 考 文 献

- [1] 孙仲康. 单站无源定位跟踪技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [2] Cheung K W, So H C, Ma W K, et al. A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality [J]. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2006; 1-23.
- [3] Ma Z H, Ho K C. TOA localization in the presence of random sensor position errors[C]. The IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Prague, Czech, May, 2011.
- [4] Huang Y, Benesty J, Elko G W, et al. Real-time passive source localization: a practical linear-correction least-squares approach [J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2001, 9(8): 943-956.
- [5] Ho K C, Parikh K H. Source localization using TDOA with erroneous receiver positions [C]. The IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Vancouver, Canada, May, 2004.
- [6] Kovavisaruch L, Ho K C. Modified Taylor-series method for source and receiver localization using TDOA measurements with erroneous receiver positions [C]. The IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kobe, Japan, May, 2005.
- [7] Yang K H, Wang G, Luo Z Q. Efficient convex relaxation methods for robust target localization by a sensor network using time differences of arrivals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(7): 2775-2784.
- [8] Yang K, An J P, Bu X Y, et al. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference of arrival measurements [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(3): 1558-1562.
- [9] Lu X N, Ho K C. Taylor-series technique for source localization using AOAs in the presence of sensor location errors[C]. The Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing, Waltham, MA, July, 2006.
- [10] Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm for passive location based on angle information [J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2009, 52(6): 1043-1054.
- [11] Ho K C, Xu W W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [12] Ho K C, Lu X, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 684-696.
- [13] Wu H, Su W M, Gu H. A novel Taylor series method for source and receiver localization using TDOA and FDOA measurements with uncertain receiver positions [C]. The IEEE CIE International Conference on Radar, Chengdu, China, October 1037-1044, 2011.
- [14] Yu H G, Huang G M, Gao J, et al. An efficient constrained weighted least squares algorithm for moving source location using TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(1): 44-47.
- [15] Ho K C, Yang L. On the use of a calibration emitter for source localization in the presence of sensor position uncertainty [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(12): 5758-5772.
- [16] 王莹桂, 李腾, 陈振林, 等. 三星时差定位系统的四站标定方法 [J]. 宇航学报, 2010, 31(5): 1352-1356. [Wang Ying-gui, Li Teng, Chen Zhen-lin, et al. Tri-satellite TDOA location system-based four station calibration technique [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(5): 1352-1356.]
- [17] 瞿文中, 叶尚福, 孙正波. 卫星干扰源精确定位的位置校正算法 [J]. 电波科学学报, 2005, 20(3): 342-346. [Qu Wen-zhong, Ye Shang-fu, Sun Zheng-bo. Algorithm of position calibrator for satellite interference location [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2005, 20(3): 342-346.]

作者简介:

王鼎(1982-),男,博士,讲师,主要从事阵列信号处理、无源定位等方面的理论研究。

通信地址:郑州市俭学街7号信息系统工程学院5教(450002)

电话:(0371)81630691

E-mail:;wang_ding814@aliyun.com

(编辑:张宇平)