

弹性地基上变厚度矩形板自由振动的 GDQ 法求解

滕兆春 丁树声 郑鹏君

(兰州理工大学理学院 730050 兰州)

摘要: 基于广义微分求积法(GDQ法),对弹性地基上变厚度矩形板横向自由振动的控制微分方程及其不同边界条件进行离散,研究了其自由振动的频率特性。数值计算得到了不同长宽比 λ 、不同厚度变化参数 β 、不同地基参数 K 条件下以及简支或固定边界条件下弹性地基上变厚度矩形板的量纲为一的振动频率,并与已有文献进行了比较。结果表明:运用广义微分求积法对弹性地基上变厚度矩形板的频率求解结果在退化到 $K=0$ 时与幂级数解的结果非常吻合;在条件相同的情况下,采用广义微分求积法仅需较少的节点($N=M=13$)就能达到满意的求解精度。本文的研究为求解此类问题的低阶、高阶振动频率提供了一种简便有效的数值方法。

关键词: 弹性地基; 变厚度; 矩形板; 自由振动; 广义微分求积法

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.31.02.C019

1 引 言

非均匀厚度板是海洋、土木、核工业、机械、航空航天等工程中经常使用的一种承载结构元件。由于非均匀的厚度能改善板结构元件的承载能力,能减小其重量和几何尺寸,同时也能改变其振动的固有频率。因此,对变厚度板振动问题的求解一直是结构动力学的研究重点。已有许多学者采用不同的方法对变厚度圆(环)板、矩形板、斜板等在各种载荷和边界条件下的振动问题进行了研究。由于变厚度板横向自由振动控制微分方程是变系数的偏微分方程^[1],一般边界条件下很难求得其封闭解,故往往采用数值法求解。文献[1]对变厚度圆板和矩形

板等的振动问题作了较为全面详细的报道。文献[2]分别采用Rayleigh-Ritz法、优化的Kantorovich法、有限元法数值研究了多种边界条件下非均匀厚度矩形板的横向振动固有频率。文献[3]采用渐近解法求解了两对边简支变厚度矩形板横向振动的一阶近似固有频率。文献[4]分别用微分求积法、Rayleigh-Ritz法研究了简支边界条件下线性变化厚度矩形板横向自由振动基频特性。文献[5]采用Levy法结合Frobenius法构造的幂级数研究了两对边简支另两对边简支、四边固定、四边自由边界条件下线性变化厚度矩形薄板的自振频率随板的边长比、厚度比变化的精确解及其振型函数的解析表达式。文献[6]采用Green函数研究了各种边界条件下厚度任意变化的矩形薄板和适度厚矩形板横向自由振动的各阶模态和频率。文献[7]

基金项目: 国家自然科学基金(11072101; 11372123)

收稿日期: 2013-05-02

修回日期: 2013-11-05

第一作者简介: 滕兆春,男,1969年生,兰州理工大学理学院,副教授;研究方向——结构动力学及智能材料与结构的力学行为。

E-mail: tengzc@lut.cn

给出了幂级数法数值求解的多种边界条件下线性变化厚度矩形板的横向自由振动基频特性。文献[8]利用广义微分求积规则(GDQR)研究了周边弹性约束下厚度沿径向连续变化圆板的横向自由振动。许多实例已证实微分求积法^[9-11] (Differential Quadrature Method, 简称DQ法)特别是广义微分求积法^[8,12-13](Generalized Differential Quadrature Method, 简称GDQ法)是求解变系数偏微分方程(组)的有效方法。其中, GDQ法具有需要离散节点个数少、计算精度高、易收敛、工作量小等优点。

目前, 关于弹性地基上变厚度矩形板的自由振动问题, 有多种求解方法^[14-15], 但是使用 DQ 法分析的研究相对较少, 特别是采用 GDQ 法求解弹性地基上变厚度矩形板的振动问题在国内外还未见文献报道。因此, 本文采用广义微分求积法对弹性地基上变厚度矩形板在简支或固定边界条件下的自由振动进行分析, 研究其固有频率特性; 并对于退化到无弹性地基时四边简支边界条件下的自振基频与文献[7]的结果进行比较, 验证该方法求解此类问题的有效性。

2 控制微分方程及 GDQ 法离散结果

2.1 控制微分方程及 GDQ 法离散结果

考虑沿 x 方向的长度为 a 、沿 y 方向的宽度为 b 、厚度为 h 的薄矩形板, 将其放置在模量为 k 的 Winkler 弹性地基上。板的平面示意图和节点划分见图 1。

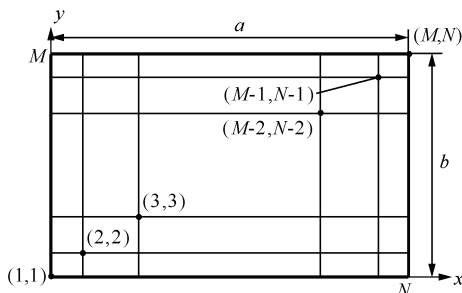


图 1 矩形板的平面示意图和节点划分图
Fig.1 Plane schematic diagram and grid points of a rectangular plate

为简化计算, 仅考虑板的厚度沿 x 方向进行变化, 即 $h = h(x)$, 且设板的厚度为

$$h = h_0[1 + \beta(x/a)] \quad (1)$$

其中: h_0 为板在 $x = 0$ 处的初始厚度; β 为厚度变化参数。对于该变厚度矩形板在 Winkler 弹性地基

上的小振幅横向自由振动, 其控制微分方程为

$$\bar{D} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + 2 \bar{D}_{,xx} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \bar{D}_{,xx} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + kw + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

其中: $w(x, y, t)$ 为板的横向位移; t 为时间; ν 为泊松比; ρ 为质量密度; $\bar{D} = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ 为板的弯曲刚度。式(2)的解可写为^[16]

$$w(x, y, t) = \bar{W}(x, y)e^{i\omega t} \quad (3)$$

其中: $\bar{W}(x, y)$ 为形函数; ω 为板自由振动的圆频率; $i = \sqrt{-1}$ 。将式(3)代入式(2)可得

$$\bar{D} \left[\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial y^4} \right] + 2 \bar{D}_{,xx} \left[\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial x \partial y^2} \right] + \bar{D}_{,xx} \left[\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right] + k \bar{W} = \rho h \omega^2 \bar{W} \quad (4)$$

若取 $\lambda = a/b$ 为矩形板的长宽比, 再令: $X = x/a$; $Y = y/b$; $W = \bar{W}/a$; $K = ka^4/D_0$; $D_0 = Eh_0^3/12(1 - \nu^2)$; $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ (这里: Ω 为量纲为一的频率; K 为量纲为一的地基参数)。将式(4)量纲归一化处理为

$$(1 + \beta X)^2 \left[\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right] + 6\beta(1 + \beta X) \left[\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} \right] + 6\beta^2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] + \frac{KW}{1 + \beta X} = \Omega^2 W \quad (5)$$

用 $(\frac{\partial^{s+t} w}{\partial y^s \partial x^t})_{ij} = \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(t)} w_{km}$ 表示 GDQ 法离散方程式(5), 可得

$$(1 + \beta X_i)^2 \left[\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} W_{kj} + 2 \lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M A_{ik_1}^{(2)} B_{j,k_2}^{(2)} W_{k_1,k_2} + \lambda^4 \sum_{k=1}^M B_{j,k}^{(4)} W_{i,k} \right] + 6\beta(1 + \beta X_i) \left[\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(3)} W_{kj} + \lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M A_{ik_1}^{(1)} B_{j,k_2}^{(2)} W_{k_1,k_2} \right] + 6\beta^2 \left[\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{kj} + \nu \lambda^2 \sum_{k=1}^M B_{j,k}^{(2)} W_{i,k} \right] + \frac{KW_{i,j}}{1 + \beta X_i} = \Omega^2 W_{i,j} \quad (6)$$

2.2 边界条件及 GDQ 法离散结果

考虑如下两种边界条件。

① 简支(S)

$$\begin{cases} W=0, & \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=0, & (X=0,1) \\ W=0, & \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}=0, & (Y=0,1) \end{cases} \quad (7)$$

② 固定(C)

$$\begin{cases} W=0, & \frac{\partial W}{\partial X}=0, & (X=0,1) \\ W=0, & \frac{\partial W}{\partial Y}=0, & (Y=0,1) \end{cases} \quad (8)$$

应用 GDQ 法, 边界条件式(7)和式(8)的离散结果为

$$W_{1,j}=0, \quad W_{N,j}=0, \quad W_{i,1}=0, \quad W_{i,M}=0 \quad (i=1,2,\dots,N; \quad j=1,2,\dots,M) \quad (9a)$$

$$\sum_{k=1}^N A_{1,k}^{(n0)} \cdot W_{k,j}=0, \quad (j=2,3,\dots,M-1) \quad (9b)$$

$$\sum_{k=1}^N A_{N,k}^{(n1)} \cdot W_{k,j}=0, \quad (j=2,3,\dots,M-1) \quad (9c)$$

$$\sum_{k=1}^N B_{1,k}^{(m0)} \cdot W_{i,k}=0, \quad (i=2,3,\dots,N-1) \quad (9d)$$

$$\sum_{k=1}^N B_{M,k}^{(m1)} \cdot W_{i,k}=0, \quad (i=2,3,\dots,N-1) \quad (9e)$$

这里 $n0$ 、 $n1$ 、 $m0$ 、 $m1$ 分别代表 $X=0$ 、 $X=1$ 、 $Y=0$ 、 $Y=1$ 的边界, 其取值可为 1 或 2, 这里 1、2 分别表示固定、简支边界条件。

将式(9b)~(9e)联立可以解得 $W_{2,j}$ 、 $W_{N-1,j}$ 、 $W_{i,2}$ 、 $W_{i,M-1}$ 并得到四个内角点 $W_{2,2}$ 、 $W_{N-1,2}$ 、 $W_{2,M-1}$ 、 $W_{N-1,M-1}$ 的值。再将式(9a)和 $W_{2,j}$ 、 $W_{N-1,j}$ 、 $W_{i,2}$ 、 $W_{i,M-1}$ 、 $W_{2,2}$ 、 $W_{N-1,2}$ 、 $W_{2,M-1}$ 、 $W_{N-1,M-1}$ 所有的边界条件代入式(6)可得

$$\begin{aligned} (1 + \beta X_i)^2 & \left[\sum_{k=3}^{N-2} C_1 \cdot W_{kj} + 2\lambda^2 \sum_{k_1=3}^{N-2} \sum_{k_2=3}^{N-2} C_2 \cdot W_{k_1,k_2} + \right. \\ & \left. \lambda^4 \sum_{k=3}^{M-2} C_3 \cdot W_{i,k} \right] + 6\beta(1 + \beta X_i) \left[\sum_{k=3}^{N-2} C_4 \cdot W_{kj} + \right. \\ & \left. \lambda^2 \sum_{k_1=3}^{N-2} \sum_{k_2=3}^{M-2} C_5 \cdot W_{k_1,k_2} \right] + 6\beta^2 \left[\sum_{k=3}^{N-2} C_6 \cdot W_{kj} + \right. \\ & \left. \nu \lambda^2 \sum_{k=3}^{M-2} C_7 \cdot W_{i,k} \right] + \frac{KW_{i,j}}{1 + \beta X_i} = \Omega^2 W_{i,j} \quad (10) \end{aligned}$$

式中 $C_1 \sim C_7$ 为权系数, 不同阶次的微分求积权系数计算可参见文献[17]。因为式(10)包含 $(N-4) \times (M-4)$ 个未知数, 所以共需 $(N-4) \times (M-4)$ 个内部节点, 因此有 $3 \leq i \leq N-2$ 和 $3 \leq j \leq M-2$ 。式(10)最终可写为能够求解的代数方程的矩阵形式, 即

$$A \cdot W = \Omega^2 W \quad (11)$$

其中: A 为系数矩阵; W 的表达式为

$$W^T = \{W_{3,3}, \dots, W_{3,M-2}, W_{4,3}, \dots, W_{4,M-2}, \dots, W_{N-2,3}, \dots, W_{N-2,M-2}\}$$

3 数值计算与结果分析

GDQ 法中已有算例证明, 采用非均匀节点比采用相同数目的均匀节点能得到更好的计算结果, 故矩形板在 x 、 y 方向的节点划分采用如下的余弦型公式^[17], 即

$$\begin{cases} X_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], & (i=1,2,\dots,N) \\ Y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right], & (j=1,2,\dots,M) \end{cases} \quad (12)$$

这里选取 $N=M=13$ 、 $\nu=0.3$, 给定不同的长宽比 λ 、不同的厚度变化参数 β 、量纲为一的地基参数 K , 采用 GDQ 法分别计算了四边简支(S-S-S-S)、四边固定(C-C-C-C)、两边简支两边固定(S-C-S-C)边界条件下矩形板的量纲归一化频率。

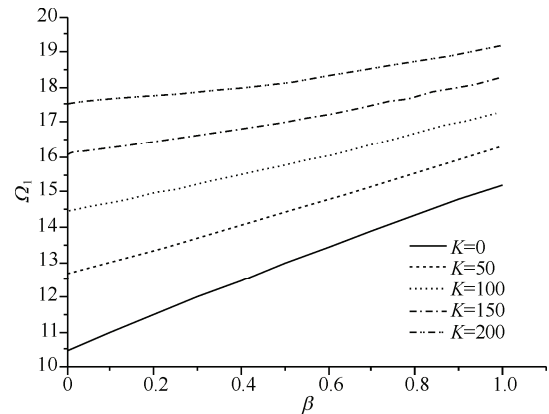


图 2(a) 四边简支(S-S-S-S)

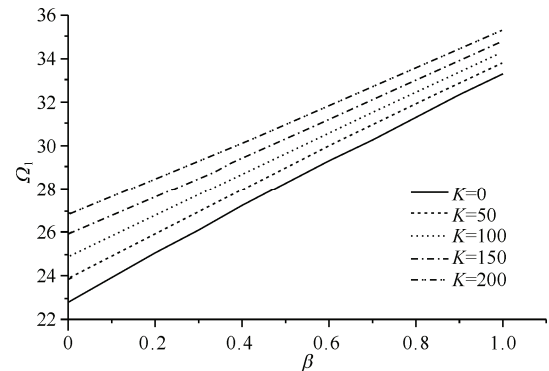


图 2(b) 四边固定(C-C-C-C)

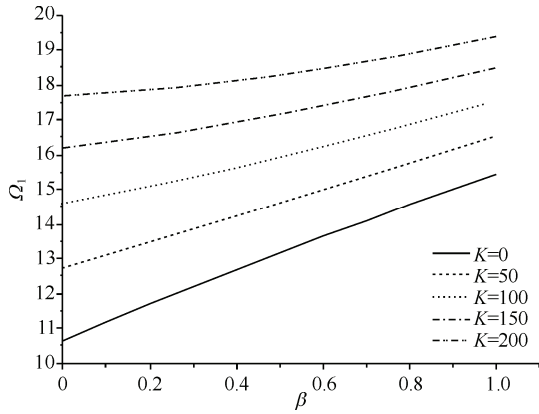


图 2(c) 两边简支两边固定(S-C-S-C)

图 2 矩形板量纲为一的基频 Ω_1 与厚度变化参数 β 之间的关系曲线 ($\lambda = 0.25$)

Fig.2 Curves of dimensionless fundamental frequencies for rectangular plates vs variable thickness parameters ($\lambda = 0.25$)

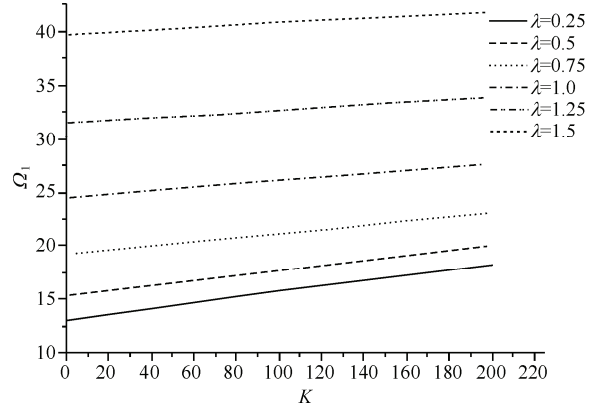
表 1 四边简支变厚度矩形板的量纲为一的基频 Ω_1 比较 ($\lambda = 0.25$)

Tab.1 Comparison of dimensionless fundamental frequency Ω_1 for simply supported rectangular plates with variable thickness ($\lambda = 0.25$)

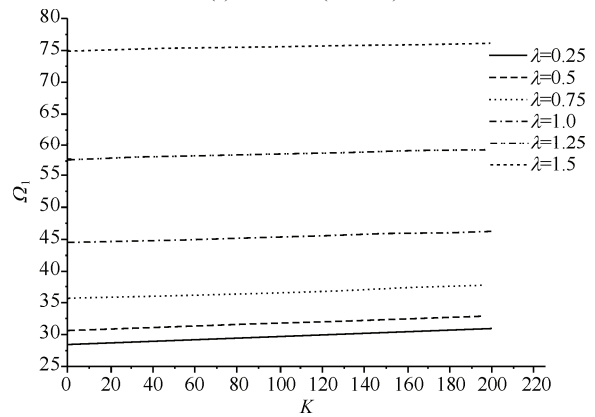
β	Ω_1	
	GDQM	幂级数解 ^[7] (power series solution)
0.1	11.00370	11.00370
0.2	11.50805	11.50805
0.3	12.00109	12.00109
0.4	12.48409	12.48409
0.5	12.95812	12.95812
0.6	13.42407	13.42407
0.7	13.88268	13.88268
0.8	14.33459	14.33460

图 2 分别给出了三种边界条件下矩形板在长宽比 $\lambda = 0.25$ 和 K 分别为 0、50、100、150、200 时对应的量纲为一的固有频率的最小值(即量纲为一的基频) Ω_1 与厚度变化参数 β 之间的关系曲线。由图 2 可见: λ 和 K 不变时, 三种边界条件对应的基频 Ω_1 均随厚度变化参数 β 的增大而增大; λ 、 K 、 β 不变时, 则四边简支矩形板的振动频率最小, 四边固定矩形板的振动频率最大, 两边简支两边固定矩形板的振动频率居于前两种情况之间; λ 和 β 不变时, K 越大振动频率也越大。在四边简支边界条件下, 若取 $K = 0$ 、 $\lambda = 0.25$ 且 β 取 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8, 则退化得到 $\lambda = 0.25$ 时变厚度矩形板在四边简支边界条件下的基频 Ω_1 , 如图 2(a) 和表 1 所示。为了说明计算的可靠性, 表 1 也给出了在相同条件下文献[7]中幂级数解的基频结果。从表 1 的对比可见: 在分析弹性地基上变厚度矩形板的自振频率时, 运用 GDQ 法与幂级数解得到的结

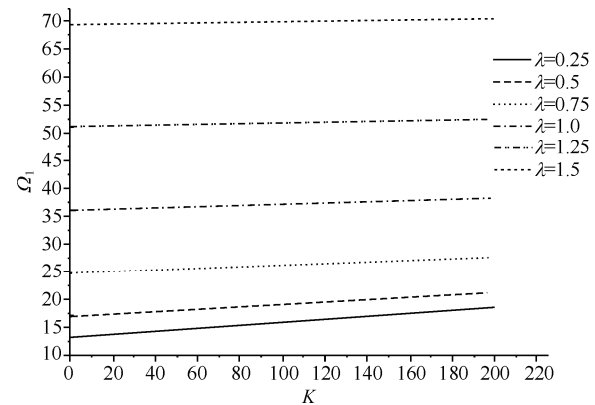
果吻合很好, 特别是在选取的节点数较少时(这里 $N = M = 13$)就能达到满意的精度。



(a) 四边简支(S-S-S-S)



(b) 四边固定 (C-C-C-C)



(c) 两边简支两边固定(S-C-S-C)

图 3 矩形板量纲为一的基频 Ω_1 与量纲为一的地基参数 K 之间的关系曲线 ($\beta = 0.5$)

Fig.3 Curves of dimensionless fundamental frequencies for rectangular plates vs dimensionless foundation parameters ($\beta = 0.5$)

图 3 分别给出了三种边界条件下在厚度变化参数 $\beta = 0.5$ 和 λ 分别取 0.25、0.5、0.75、1.0、1.25、1.5 时矩形板量纲为一的基频 Ω_1 与量纲为一的地基参数 K 之间的关系曲线。由图可见: β 和 λ 不变时, K 越大振动频率越大; β 和 K 不变时, λ 越大振动频率也越大。图 4 给出了 $\lambda = 0.25$ 、 $K = 100$ 时四边

简支矩形板的前四阶量纲为一的频率与厚度变化参数之间的关系曲线；图5给出了 $\lambda = 0.25$ 、 $\beta = 0.5$ 时四边简支矩形板的前四阶量纲为一的频率与量纲为一的地基参数之间的关系曲线。从图4和图5可见：在 λ 和 K 不变时，各阶量纲为一的频率均随厚度变化参数 β 的增大而增大； λ 和 β 不变时，各阶量纲为一的频率也均随量纲为一的地基参数 K 的增大而增大。可见，四边简支矩形板的高阶量纲为一的频率随厚度变化参数 β 和量纲为一的地基参数 K 等的变化趋势与其基频 Ω 类似。

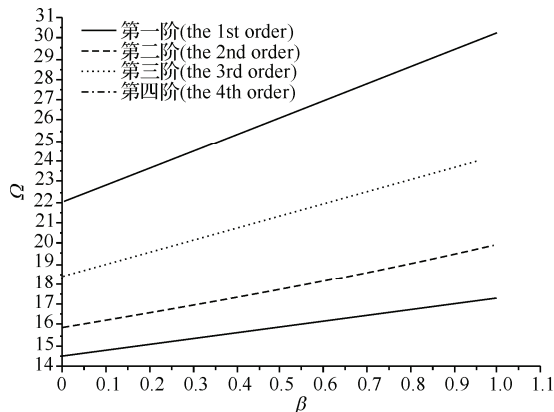


图4 四边简支矩形板前四阶量纲为一的频率 Ω 与厚度变化参数 β 之间的关系曲线($\lambda = 0.25$, $K = 100$)

Fig.4 Curves of the first four dimensionless fundamental frequencies for rectangular plates simply supported on four edges vs variable thickness parameters ($\lambda = 0.25$, $K = 100$)

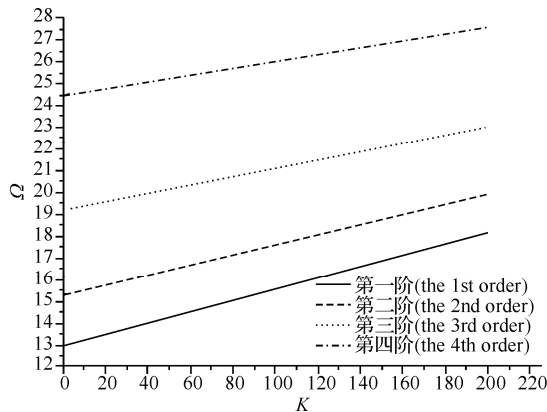


图5 四边简支矩形板前四阶量纲为一的频率 Ω 与量纲为一的地基参数 K 之间的关系曲线($\lambda = 0.25$, $\beta = 0.5$)

Fig.5 Curves of the first four dimensionless fundamental frequencies for rectangular plates simply supported on four edges vs dimensionless foundation parameters($\lambda = 0.25$, $\beta = 0.5$)

4 结束语

本文采用广义微分求积法(GDQ法)分析了弹性地基上变厚度矩形板的自由振动问题，给出了简支或固定边界条件下矩形板在长宽比 λ 、厚度变化参数 β 、量纲为一的地基参数 K 不同时的量纲为一的自由振动频率。计算结果表明：在相同边界条件下，

当 λ 不变时， β 、 K 越大自振频率越大；当 β 不变时， λ 、 K 越大自振频率越大；在 λ 和 β 不变的情况下，四边简支矩形板的自振频率最小，四边固定矩形板的自振频率最大。采用GDQ法计算的弹性地基上变厚度矩形板的自由振动频率与采用其它方法如幂级数解得到的结果非常吻合；且在GDQ法数值计算时，只需选用较少的节点数 N 和 M (如 $N = M = 13$)，便可达到所需的精度。文中虽然只考虑了简支或固定边界条件下Winkler地基上板的厚度沿单向线性变化的情况，但该求解过程能完全推广用于简单或复杂边界条件下Winkler地基上或双参数等弹性地基上厚度任意变化矩形板的自由振动问题，且对不同边界条件的处理也非常方便，从而为求解此类问题的低阶、高阶自振频率提供了一种简便有效的方法。

参 考 文 献 (References)

- [1] Leissa A W. NASA SP-160 vibration of plates[M]. Washing D C: US Government Printing Office, 1969.
- [2] Bhat R B, Laura P A A, Gutierrez R G, et al. Numerical experiments on the determination of natural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138(2): 205-219.
- [3] 周叮. 两对边简支变厚度矩形板横向自振频率的渐近解法[J]. 强度与环境, 1990(2): 19-25. (Zhou Ding. The asymptotic method on natural frequencies of transverse vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported and varying thickness[J]. Structure and Environment Engineering, 1990(2): 19-25 (in Chinese)).
- [4] Kukreti A R, Farsa J, Bert C W. Differential quadrature and Rayleigh-Ritz methods to determine the fundamental frequencies of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 189(1): 103-122.
- [5] 王忠民, 冯振宇. 线性变厚度矩形薄板自由振动的精确解[J]. 应用力学学报, 1997, 14(2): 114-120. (Wang Zhongmin, Feng Zhenyu. Exact solutions for the free vibration of rectangular plates with linearly varying thickness[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1997, 14(2): 114-120 (in Chinese)).
- [6] Sakiyama T, Huang M. Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 216(3): 379-397.
- [7] Akiyama K, Kuroda M. Fundamental frequencies of rectangular plates with linearly varying thickness[J]. Journal of Sound and

- Vibration, 1997, 205(3): 380-384.
- [8] Wu T Y, Liu G R. Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by the generalized differential quadrature rule[J]. International Journal of Solids and Structure, 2001, 38(44/45): 7967-7980.
- [9] Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 34(2): 235-238.
- [10] Bellman R E, Casti J, Kashef B G. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 1972, 10(1): 40-52.
- [11] Bert C W, Jang S K, Striz A G. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components[J]. AIAA Journal, 1988, 26(5): 612-618.
- [12] Shu C, Du H. Implementation of clamped and simply support boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates[J]. International Journal of Solids and Structure, 1997, 34(7): 819-835.
- [13] Shu C, Du H. A generalized approach for implementing general boundary condition in the GDQ free vibration analysis of plates[J]. International Journal of Solids and Structure, 1997, 34(7): 837-846.
- [14] Gupta U S, Lal R. Transverse vibrations of a non-uniform rectangular plate on an elastic foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1978, 61(1): 127-133.
- [15] 王小岗, 赵以弘. Winkler地基上变厚度自由矩形板固有频率的 Galerkin解法[J]. 青海大学学报, 2001, 19(2): 4-6. (Wang Xiaogang, Zhao Yihong. On natural frequency of varying thickness rectangular plate with four free edges on Winkler elastic foundation by the method of Galerkin[J]. Journal of Qinghai University, 2001, 19(2): 4-6 (in Chinese)).
- [16] Chhakraverty S. Vibration of plates[M]. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [17] Shu C. Differential quadrature and its application in engineering[M]. London: Springer-Verlag, 2000.