

空间各向异性弹性问题的八节点理性单元

毛翎, 姚伟岸, 高强*, 钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要: 常规单元的插值函数通常仅考虑单元的几何形状与节点位置, 而忽略了反映物理问题关键特性的物性参数, 从而降低了其数值分析的效果。相反, 理性有限元法是取问题微分控制方程的多项式基本解作为单元内的插值函数, 其所形成的刚度阵与问题的物性参数紧密相关, 因此它避免了常规有限元法对物理问题和数学问题的割裂, 可显著提高数值分析的稳定性和精度。本文利用空间各向异性问题的基本解, 构造出满足分片实验要求的八节点理性块体单元。数值算例表明, 本文给出的理性单元不仅具有较高的求解精度, 而且具有良好的数值稳定性, 尤其是对较为畸形的单元反应不敏感。

关键词: 一般各向异性; 理性有限元; 八节点块体单元

中图分类号: O242.21 **文献标志码:** A **doi:** 10.7511/jslx201401006

1 引言

八节点块体单元, 因其标准等参元的诸多缺点, 如体积自锁、对弯曲变形不敏感^[1]等, 在其实际应用上, 必须加以改进。改进方法主要分为三大类: 第一类是改造等参元, 方法主要是降阶积分^[2], 以及基于等参元刚度阵的修正^[3]; 第二类是通过引入转动项增加节点的自由度^[4], 第三类是多变量有限元, 如基于胡-鹭变分原理或者 H-R 变分原理的混合/杂交有限元^[5]。这些方法的本质均没有发生变化, 都是将脱离了物理实际的等参元作为基本出发点。

理性有限元的构造方法与传统有限元法不同, 其插值函数使用的是控制微分方程解析解的线性组合, 求解过程是在物理域内直接列式, 在单元级别考虑分片实验的要求并进行修正。这一方法避免了传统方法对物理问题和数学问题的割裂, 具备更清晰的力学含义。由于舍弃了有限元的等参技术, 并采用弹性力学方程组的线性无关解对单元的位移场和应力场同时进行插值, 这一方法大大地提高了应力场、应变场的数值稳定性和精度。钟万勰等在 1996 年以平面四节点单元^[6]为例, 阐明了理性有限元的构造方法, 将问题的位移场、应力场和

应变场视为基本解的叠加, 并通过修正的方式满足了分片实验的要求, 随后还对其收敛性进行了证明^[7]。纪峥等改善了平面四节点单元基本解的选取, 并推广至五节点元^[8]。王永富等还构造了各向同性问题的空间理性单元^[9]。

材料的各向异性在实际问题中是普遍存在的, 如生物力学^[10]、断裂力学^[11]及摩擦力学^[12]等领域对此问题有着深刻而广泛的研究。传统的有限元并不把材料的各向异性作为一种需要约束的条件在构造单元时加以考察, 这可能影响计算结果的精度。本文将理性有限元法推广至一般各向异性的空间问题, 构造出八节点理性块体单元。

2 基本方程和基本解

直角坐标系下用位移表示的平衡方程, 即 Navier-Lame 方程为

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) = F_i \quad (1)$$

式中 i, j, k, l 的取值范围均为 1, 2 和 3。为行文简单起见, 给出物理方程的刚度-柔度阵形式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \quad \sigma_{xy}\}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx} \quad \varepsilon_{xy}\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

式中 \mathbf{C} 为刚度阵, 其元素为 C_{ij} ($i, j = 1 \sim 6$), \mathbf{D} 为柔度阵, 其元素为 D_{ij} ($i, j = 1 \sim 6$), $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力向量, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量。

在求解满足平衡方程(1)对应齐次方程基本解

收稿日期: 2012-10-16; 修改稿收到日期: 2013-08-20.
基金项目: 973 国家重点基础研究计划(2010CB832704) 资助项目.
作者简介: 高强* (1978-), 男, 博士, 副教授
(E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

表1 空间各向异性问题的第7~第12项基本解
Tab. 1 The 7th to 12th fundamental of 3D anisotropic elastic problem

i	u_i	v_i	w_i	σ_i^T
7	$D_{11}x + D_{16}y + D_{15}z$	$D_{16}x + D_{12}y + D_{14}z$	$D_{15}x + D_{14}y + D_{13}z$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
8	$D_{12}x + D_{26}y + D_{25}z$	$D_{26}x + D_{22}y + D_{24}z$	$D_{25}x + D_{24}y + D_{23}z$	$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
9	$D_{13}x + D_{36}y + D_{35}z$	$D_{36}x + D_{23}y + D_{34}z$	$D_{35}x + D_{34}y + D_{33}z$	$[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
10	$D_{14}x + D_{46}y + D_{45}z$	$D_{46}x + D_{24}y + D_{44}z$	$D_{45}x + D_{44}y + D_{34}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
11	$D_{15}x + D_{56}y + D_{55}z$	$D_{56}x + D_{25}y + D_{45}z$	$D_{55}x + D_{35}y + D_{45}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$
12	$D_{16}x + D_{66}y + D_{56}z$	$D_{66}x + D_{26}y + D_{46}z$	$D_{56}x + D_{36}y + D_{46}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

的过程中,要充分考虑力学意义。如前12阶基本解中,第1~第6个基本解对应的是刚体位移,而第7~第12个基本解列入表1,它们的应力解对应于如表中最右栏所示的简单应力场。更多高阶的基本解可以按照文献[13]的方法得到,这里略去其具体表达式。

3 理性单元的构造

理性单元 Ω 内的位移场由下式确定为

$$u = \sum_{i=1}^k a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^k a_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^k a_i w_i \quad (3)$$

式中 a_i 为广义位移, u_i, v_i 和 w_i 分别为插值函数即基本解中的位移解, k 为基本解的个数。基本解的选取应当满足三个条件:(1) 基本解按坐标的升序排列。(2) 基本解的个数 k 大于或等于单元的自由度数。(3) 保证插值多项式的完备性。根据分析可知,在保证完备性的要求下,基本解的个数 k 与基本解多项式的阶数 n 之间有 $k=3(n+1)^2$ 。

本文研究的空间八节点块体单元,共有24个自由度,所以基本解的阶数应取 $n=2$,共需要 $k=27$ 个基本解。对应的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{xi}, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{yi}, \quad \sigma_z = \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{zi} \\ \sigma_{yz} &= \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{yzi}, \quad \sigma_{zx} = \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{zxi}, \quad \sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{27} a_i \sigma_{xyi} \end{aligned} \quad (4)$$

单元变形能为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{a} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{27}]^T$, \mathbf{R} 为广义刚度阵,它是一个对称阵,联系着广义位移向量 \mathbf{a} 和广义力向量 \mathbf{g} , 即

$$\mathbf{g} = \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (6)$$

\mathbf{R} 的分块形式如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 15} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0}_{15 \times 6} & \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中,主对角元分块阵 $\mathbf{0}_{6 \times 6}$ 对应于零应力解, \mathbf{R}_{11} 对应于均匀应力场, \mathbf{R}_{22} 对应于一阶应力场。式(7)中非零分块阵的元素可通过式(5)的积分得到,其中

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{V} \mathbf{D} \quad (8)$$

式中 V 为单元体积。这里略去了其他分块阵的具体表达式。

记八节点块体单元节点位移向量为 \mathbf{d} , 它是24维列向量。显然,其维数小于 $k(=27)$, 不匹配。为使得单元刚度阵有更好的性质,且不具有方向相关性,本文在单元形心处增加1个多余内部节点。记增广后的节点位移向量为

$$\mathbf{d}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 \mathbf{d}_m 为增加的内部形心节点位移向量。增广后的单元节点自由度数正好等于 k 。

将增广后的单元节点坐标代入位移场插值函数,整理后可得到节点位移向量 \mathbf{d}_c 与广义位移向量 \mathbf{a} 之间的转换关系:

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{T} \mathbf{a} \quad (10)$$

式中 \mathbf{T} 为 27×27 维的转换矩阵。将式(10)代入式(5),可给出用增广节点位移向量 \mathbf{d}_c 表示的单元变形能密度为

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_c^T \mathbf{K}_c \mathbf{d}_c \quad (11)$$

其中对应节点位移向量 \mathbf{d}_c 的增广单元刚度阵为

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \quad (12)$$

而对应的节点力向量为

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_c \mathbf{d}_c = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{g} \quad (13)$$

由于当前单元的插值函数在单元边界上是非线性的,因此它是无法通过分片实验的,需要对其进行修正。

4 分片实验与转换阵修正

本文采用文献[6]提供的方法对单元进行修正,使其通过单元分片实验的要求。

单元分片实验的第一项要求是,当节点位移为刚体位移时单元内部不产生应力。设节点位移为刚体位移,根据单元的位移插值函数式(3),显然可以得到 $a_i \neq 0 (i=1 \sim 6)$, $a_j = 0 (j=7 \sim 27)$ 。因此,单元的应力插值函数自然为零。即对刚度阵 \mathbf{K}_e ,分片实验的第一项要求是通过的。

单元分片实验的第二项要求是,当单元上施加一均匀应力场 $\boldsymbol{\sigma}$ 时,其对应的单元边界力集约到节点上所形成的节点力向量 $\mathbf{f}^{(i)}$ 应当与通过式(13)得到的单元节点力向量 \mathbf{f} 相同,其等价形式为要求节点力向量 $\mathbf{f}^{(i)}$ 通过转换矩阵得到的广义节点力向量 $\mathbf{g}^{(i)} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}^{(i)}$ 与通过式(6)得到的单元节点力向量 \mathbf{g} 相同。

这里以单元只发生 x 向均匀应力场 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_7$ (其中 $\boldsymbol{\sigma}_7$ 的表达式列入表1)为例进行分析。根据插值函数表1,这个均匀应力场对应的广义位移为 $\mathbf{a}_7 = [0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0]^T$, 即其第七个元素为1,其余元素为0。由式(6)可得广义位移 \mathbf{a}_7 对应的广义力向量 \mathbf{g}_7 , 即矩阵 \mathbf{R} 的第7列。

另一方面,由于单元发生的是均匀应力场,则位移场是线性的,那么单元的边界也是保持为线性的,因此,可以按照线性插值的方式将单元的边界力集约到单元的节点上,得到单元的集约节点力向量,记为 $\mathbf{f}_7^{(i)}$ 。例如对如图1所示的单元, $\mathbf{f}_7^{(i)}$ 的第一个元素,即表示在 x 向均匀应力场作用下节点1上 x 轴方向的节点力分量为

$$f_{7,1}^{(i)} = S_{1234} + S_{1485} + S_{1562} + S_{124} + S_{145} + S_{152} \quad (14)$$

式中 S_{1234} 为由节点1,2,3,4围成的四边形在 yoz 平面上投影的面积, S_{124} 为由节点1,2,4围成的三角形在 yoz 平面上投影的面积。对其他非零元素值可类似给出,这里就不一一列出。

给出节点力向量 $\mathbf{f}_7^{(i)}$ 后,通过转换矩阵就可以得到向量:

$$\mathbf{g}_7^{(i)} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_7^{(i)} = [\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{f}_7^{(i)} \cdots \boldsymbol{\psi}_{27}^T \mathbf{f}_7^{(i)}]^T \quad (15)$$

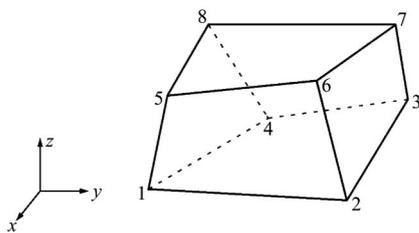


图1 八节点单元编号示意图

Fig.1 Numeral order of 8-node element

式中 $\boldsymbol{\psi}_i (i=1 \sim 27)$ 为 \mathbf{T} 矩阵的第 i 列。由于 $\boldsymbol{\psi}_1 \sim \boldsymbol{\psi}_6$ 对应于刚体位移,它们对应的广义力为零,即有

$$\mathbf{g}_{7,i}^{(i)} = 0 \quad (i=1 \sim 6) \quad (16a)$$

同时,由于 $\boldsymbol{\psi}_7 \sim \boldsymbol{\psi}_{12}$ 对应的是线性位移,可验证有

$$\mathbf{g}_{7,i}^{(i)} = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{f}_7^{(i)} = \mathbf{V} D_{1i} \quad (i=7 \sim 12) \quad (16b)$$

因此,可知 $\mathbf{g}_7^{(i)}$ 与 \mathbf{g}_7 的前12个元素值是相等的。但这两个向量从第13项以后其元素值一般是不相同的,这是由于二阶及其以上的位移插值函数在单元边界上无法保证单元协调造成的。由于 $\mathbf{g}_7 \neq \mathbf{g}_7^{(i)} (= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_7^{(i)})$, 因此,当前的单元不满足分片实验的第二个条件,需要修正。

当然,还要考察当均匀应力场 $\boldsymbol{\sigma}$ 取表1中其他应力场 $\boldsymbol{\sigma}_j (j=8 \sim 12)$ 时的情况。记该单元对应的应力场 $\boldsymbol{\sigma}_j (j=8 \sim 12)$ 的集约节点力向量为 $\mathbf{f}_j^{(i)}$, 它们通过转换矩阵得到的广义力向量为 $\mathbf{g}_j^{(i)} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_j^{(i)}$ 。同样,一般情况下 $\mathbf{g}_j^{(i)}$ 也不等于矩阵 \mathbf{R} 的第 j 列向量 \mathbf{g}_j , 但这两个向量的前12项元素相同。

要使单元通过分片实验的第二项要求,显然应该要求有 $\mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j^{(i)} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_j^{(i)} (j=7 \sim 12)$ 。为此应该修改变换矩阵 \mathbf{T} , 使其满足,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{R}_{11} \\ \mathbf{R}_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1^T \\ \boldsymbol{\psi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{27}^T \end{bmatrix} [\mathbf{f}_7^{(i)} \quad \mathbf{f}_8^{(i)} \cdots \mathbf{f}_{12}^{(i)}] \quad (17)$$

由于式(17)的前12行已经自动满足,因此仅要求有

$$\mathbf{R}_{12}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{13}^T \\ \boldsymbol{\psi}_{14}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{27}^T \end{bmatrix} [\mathbf{f}_7^{(i)} \quad \mathbf{f}_8^{(i)} \cdots \mathbf{f}_{12}^{(i)}] \quad (18)$$

成立,即仅需要修改转换矩阵 \mathbf{T} 的第13到27列向量。修改方式是在原有的向量上叠加 $\boldsymbol{\psi}_7 \sim \boldsymbol{\psi}_{12}$, 记修改后的第13到27列向量为 $\boldsymbol{\psi}'_i (i=13 \sim 27)$, 有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}'_{13}{}^T \\ \boldsymbol{\psi}'_{14}{}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}'_{27}{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{13}^T \\ \boldsymbol{\psi}_{14}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{27}^T \end{bmatrix} + \mathbf{X} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_7^T \\ \boldsymbol{\psi}_8^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{12}^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 \mathbf{X} 为 15×6 维的待定系数矩阵。将式(19)代入式(18),整理后可得

$$\mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{R}_{12}^T - \begin{bmatrix} \psi_{13}^T \\ \psi_{14}^T \\ \vdots \\ \psi_{27}^T \end{bmatrix} [\mathbf{f}_7^{(t)} \quad \mathbf{f}_8^{(t)} \cdots \mathbf{f}_{12}^{(t)}] \quad (20)$$

求解式(20),确定待定系数阵 \mathbf{X} 后再代入式(19),即可得修正的转换阵为

$$\tilde{\mathbf{T}} = [\psi_1 \cdots \psi_{12} \quad \psi'_{13} \cdots \psi'_{27}] \quad (21)$$

将式(21)代入式(12)即可得到修正后的增广单元刚度阵 $\tilde{\mathbf{K}}_e$, 它已经通过了单元分片实验的所有要求。

最后要做的工作是消去多余的内部形心节点位移向量 \mathbf{d}_m , 本文采用内部节点凝聚的方法来处理。为此,将 $\tilde{\mathbf{K}}_e$ 按式(9)进行相应分块,则单元变形能密度可改写为

$$U_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

取 \mathbf{d}_m 使 U_e 最小,得到

$$\mathbf{d}_m = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{d} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22),消去 \mathbf{d}_m 可得

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{d} \quad (24)$$

式中 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T$ (25)

它就是对应八节点块体单元的单元刚度阵,本文称这样的单元为 RQ8。

余下就是按照常规有限元法进行节点力向量的生成与刚度阵组装,并进行求解。求得节点位移后,再利用式(10)可给出单元的广义位移向量 \mathbf{a} , 从而得到问题的位移场和应力场。

5 数值算例

算例 1 三维悬臂梁的计算。考虑如图 2 所示的三维悬臂梁,其长度 $l=10$ m, 高 $h=2$ m, 宽 $b=2$ m, 约束如图 2 所示。考虑如下情况,荷载工况 1 为端部受 x 向纯弯曲荷载 $f=500$ N, 荷载工况 2 为端部受竖向集中向下荷载 $F=150$ N, 物理工况 1 为各向同性材料,弹性模量 $E=10^6$ Pa, 泊松比 $\mu=0.25$; 物理工况 2 为一般各向异性材料,

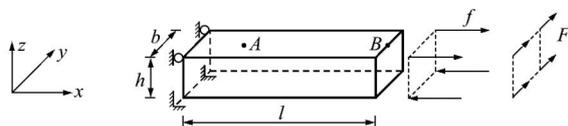


图 2 算例 1 的模型
Fig. 2 Model of example 1

表 2 算例 1 的计算结果
Tab. 2 Results of example 1

		参考解	相对误差/%				
			网格 1	网格 2	网格 3	网格 4	
工况 1	物况 1	u_B	0.2882	2.875	3.527	3.614	4.489
		σ_{xA}	-71.59	2.917	3.725	4.419	3.888
	物况 2	u_B	0.0548	3.032	3.626	3.888	4.833
		σ_{xA}	-1304.	3.104	4.100	4.117	4.532
工况 2	物况 1	u_B	117.67	3.371	4.409	4.093	5.534
		σ_{yA}	-74.67	3.085	3.714	4.370	4.909
	物况 2	u_B	0.088	3.197	3.342	3.722	5.585
		σ_{yA}	34.643	3.371	3.845	3.537	5.350

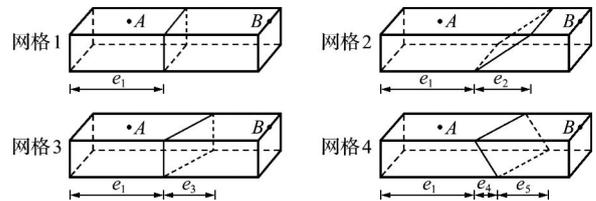


图 3 算例 1 的四种网格划分
Fig. 3 Four mesh grids of example 1

其刚度阵为

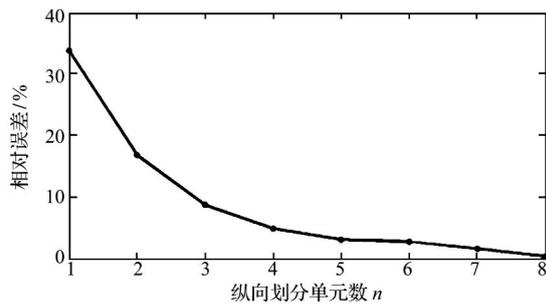
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 0.3 & 2.2 & & & & & \text{sym} \\ 0.3 & 0.25 & 2.4 & & & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 1 & & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 1.1 & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Pa} \quad (26)$$

按图 3 所示的四种方式,在 x 方向将悬臂梁划分为两个单元,其中 $e_1=5$ m, $e_4=1$ m, $e_2=e_3=e_5=2$ m。采用 Ansys 对算例 1 进行了数值分析(划分 2285 个单元),并以该解作为参考解。

表 2 给出了相关的数值计算结果。可以看出,采用极少数目的 RQ8 单元,即可给出较高的计算精度,并且位移解与应力解具有相似的精度。对于不同的材料物性,即各向同性材料与一般各向异性材料,RQ8 也具有相似的计算精度。对于较为畸形的单元,RQ8 单元反应不敏感。

算例 2 细长三维悬臂梁的计算。细长梁的长度 $l=20$ m,高 $h=1$ m,宽 $b=1$ m,一端固定,在长度方向上均匀地划分为 n 个网格。在不同的网格密度下考察末端界面中心点在 z 向弯曲荷载下 x 方向位移 u_{end} 与 Ansys 解的相对误差,以考察算法对细长单元的适应性。物理参数由方程(26)给出。

图 4 给出不同的网格密度下末端界面中心点位移的相对误差,可以看出,在 $n=5$ 的情况下,

图4 u_{end} 的相对误差Fig. 4 Relative error of u_{end}

即单元长宽比在 1:4 的情况下, RQ8 便具有较好的计算精度, 这进一步说明了 RQ8 单元对网格划分要求较低。

6 结 论

作为一种依赖于微分控制方程基本解的有限元法, 理性有限元法的插值函数具有明确的物理意义, 其单元的构造是在物理域内直接列式, 并在单元级别考虑分片实验的要求。本文通过理性推导, 给出了空间一般各向异性理性有限元的构造框架, 并具体实现了八节点理性块体单元的构造。数值算例表明, 本文给出的理性单元具有较高的求解精度和良好的数值稳定性, 并对网格畸变有很好的适应性, 是相关问题数值分析的一种有效求解方法。本文的工作将理性有限元法进一步推广至空间各向异性问题。

事实上, 本文的方法还可以应用于更多物理问题, 如板壳理性单元的构造等, 这些将在余下的工作中进一步开展。

参考文献(References):

[1] Zienkiewicz O C, Irons B M, Scott F C, et al. Three dimensional stress analysis[A]. Un. Th. Appl. Mech. Symposium on High Speed Computing in Elasticity [C]. 1970.

[2] Reese S. On the equivalent of mixed element formulations and the concept of reduced integration in large deformation problems[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2002, **3**(1): 1-34.

[3] Krishna Kishor D, Gopalakrishnan S, Ganguli R. Three-dimensional sloshing: a consistent finite element approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, **66**(3): 345-376.

[4] Long C S, Loveday P W, Groenwold A A. Axisymmetric solid-of-revolution finite elements with rotational degrees of freedom [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2009, **45**(2): 121-131.

[5] Zhang S, Xie X. Accurate 8-node hybrid hexahedral elements with energy-compatible stress modes Adv [J]. *Appl. Math. Mech.*, 2010, **2**(3): 333-354.

[6] 钟万勰, 纪 崢. 理性有限元[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, **13**(1): 1-8. (ZHONG Wan-xie, JI Zheng. Rational finite element[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1996, **13**(1): 1-8. (in Chinese))

[7] 钟万勰, 纪 崢. 平面理性元的收敛性证明[J]. 力学学报, 1997, **29**(6): 676-685. (ZHONG Wan-xie, JI Zheng. The convergence proof of the plane rational finite element[J]. *Acta Mechanica sinica*, 1997, **29**(6): 676-685. (in Chinese))

[8] 纪 崢, 钟万勰. 平面理性四节点及五节点四边形有限元[J]. 计算力学学报, 1997, **14**(1): 19-27. (JI Zheng, ZHONG Wan-xie. Rational plane quadrilateral four and five nodes finite elements [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, **14**(1): 19-27. (in Chinese))

[9] 王永富, 钟万勰. 空间理性八节点块体元[J]. 应用力学学报, 2003, **20**(3): 131-135. (WANG Yong-fu, ZHONG Wan-xie. A rational hexahedron 8-node finite element [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **20**(3): 131-135. (in Chinese))

[10] Hamblin R, Bettamer A, Allaoui S. Finite element prediction of proximal femur fracture pattern based on orthotropic behavior law coupled to quasi-brittle damage [J]. *Medical Engineering & Physics*, 2012, **34**(2): 202-210.

[11] Areias P, Belytschko T. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **63**(5): 760-788.

[12] Ozaki S, Hikida K, Hashiguchi K. Elastoplastic formulation for friction with orthotropic anisotropy and rotational hardening [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, **49**(3): 648-657.

[13] 王华丽. 理性有限元插值函数的构造[J]. 教育教学论坛, 2010(23): 180-182. (WANG Hua-li. The interpolation function construction of rational finite element [J]. *Education Teaching Forum*, 2010(23): 180-182. (in Chinese))

A8-Node rational element for 3D anisotropic elastic problem

MAO Ling, YAO Wei-an, GAO Qiang*, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: For conventional finite element, only the geometry and node locations are considered in the interpolation functions, while the physical parameters which reflect the key features of the physical problems is ignored, so its numerical performance may not satisfied. In contrast, for rational finite element method, the fundamental solutions of the differential equations are taken as the interpolation function and so the resulting stiffness matrix is related closely to the physical parameters of the problem. Therefore, for rational finite element, the separation between the mathematical and physical problems in the conventional finite element method can be avoided, and so the stability and accuracy of numerical analysis can improve significantly. In this paper, an eight-node brick rational element, which satisfies the requirements of the patch test, is constructed using the fundamental solution of the 3D anisotropic problems. Numerical examples show that the rational element gives numerical results with not only high accuracy, but also good numerical stability, especially it is insensitive for the ill-shaped meshes.

Key words: anisotropic; rational finite element; eight-node brick element

~~~~~  
(上接第 12 页)

## Research on reliability design of complex multidisciplinary system based on convex model theory

TAO You-rui<sup>1,2</sup>, HAN Xu<sup>\*2</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101, China;

2. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, School of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** Complex engineering system usually involves coupled multi-discipline and uncertainties. A new approach for reliability design of multi-disciplinary system is proposed, in which uncertain variables are described by convex model and sequential optimization, and reliability assessment method are used as optimization strategy. The reliability analysis method is performance measure approach, and multi-disciplinary feasible method or bi-level integrated system synthesis method is used to optimize the multi-disciplinary system. A numerical example and an engineering problem were solved by the approach to demonstrate its effectiveness. Compared with the conventional inner-loop method, the computational efficiency is higher. Therefore, the novel approach is likely applied in reliability design for complex engineering system.

**Key words:** convex model theory; multi-disciplinary design optimization; reliability design