

# 具有重频特性系统的动力响应分析

俞瑞芳<sup>\*1</sup>, 周锡元<sup>2</sup>, 袁美巧<sup>3</sup>

(1. 中国地震局地球物理研究所, 北京 100081;

2. 北京工业大学 结构抗震与诊治北京市重点实验室, 北京 100213; 3. 重庆市地震工程研究所, 重庆 401147)

**摘要:** 一般有阻尼线性系统出现重特征值时, 基于振型正交性的复振型分解法将不再适用。本文综合运用高等数学、线性代数和复变函数理论, 对具有重频特性的一般有阻尼线性多自由度系统给出了系统动力响应在时域中的计算方法。该方法充分利用复振型分解法和留数矩阵解耦法的优点, 不仅概念清晰, 而且易于理解和掌握, 适合于大型复杂系统的动力响应分析。此外, 本文给出了双自由度体系产生重特征值的条件, 对典型实例进行了地震响应分析, 并通过与 Newmark- $\beta$  法计算结果的对比, 论证了文中所给计算公式的正确性。本文提出的分析方法具有普适性, 对线性结构、机电和控制系统也都是适用的。

**关键词:** 阻尼系统; 重特征值; 传递函数; 留数矩阵; 振型分解法

**中图分类号:** TU311; O313      **文献标志码:** A      doi:10.7511/jslx201302005

## 1 引言

目前在抗震设计中, 对结构的阻尼通常都做了比例阻尼或经典阻尼的假定, 并基于反应谱理论应用平方和开平方(SRSS)法和完全平方组合(CQC)法计算结构地震响应<sup>[1]</sup>。但是随着各种机械阻尼器在结构工程中的广泛应用和土-结相互作用等问题的深入研究, 非比例阻尼问题逐渐得到了重视。具有非比例阻尼的弹性体系, 由于采用传统的基于实模态的振型分解法不能实现方程的解耦, 所以许多研究人员致力于讨论基于复模态理论的振型分解法<sup>[2,3]</sup>, 对非经典阻尼结构系统给出了完全实数形式的基于复振型的完全平方组合(CCQC)方法, 以及忽略振型之间相关的复平方和开平方(CSRSS)法<sup>[4,5]</sup>。无论是比例阻尼还是非比例阻尼线性系统, 在以往的讨论中, 都未涉及重特征值问题的处理方法。随着结构的大型化和复杂化, 密集或重频已经不是很罕见的情况了。当结构存在多个相同的特征值, 特征向量(振型)又有亏损时, 以振型分解法为基础的地震响应分析该如何进行, 在理论上还需要进一步研究。再者, 频率与阻尼比相同的两个地震响应是否有可能起到相互抵消的作用也是值得探讨的一个问题, 实际上 TMD 系统

正是基于这样的理论发展起来的<sup>[6,7]</sup>。此外, 重特征值问题是机电系统所具有的特点, 要解决这类系统的振动问题就不能不涉及对重特征值问题的处理方法<sup>[8-11]</sup>。这些基于机电系统给出的处理方法是针对结构工程进行研究的基础和借鉴。

本文综合运用高等数学、线性代数和复变函数理论, 对具有重频特性的一般有阻尼线性多自由度系统给出了系统响应在时域中的表达式。该方法概念清晰, 综合了复振型分解法<sup>[4]</sup>和基于部分分式展开的留数矩阵解耦法<sup>[11,12]</sup>的优点, 易于工程设计人员理解和掌握, 适合于大型复杂体系的计算和分析。此外, 文中还详细讨论了一般有阻尼双自由度体系出现重特征值的条件, 对典型实例的地震响应分析给出了详细的求解过程, 通过与 Newmark- $\beta$  法计算结果的对比, 论证了文中所给计算公式的正确性。需要指出的是, 本文提出的分析方法也是以广义模态分析为基础的, 具有普适性, 对线性结构和机电系统、比例阻尼系统和非比例阻尼系统同样都是适用的, 因此可以看作是一种广义的复模态分析方法。

## 2 有重频特性系统的解耦方法

对具有  $N$  个自由度的离散系统, 采用振动理论中惯用的符号, 可将一般有阻尼结构在一维地震输入下的振动方程写为

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -Mr\ddot{y}_g(t) \quad (1)$$

收稿日期: 2012-02-20; 修改稿收到日期: 2012-06-15.

基金项目: 国家自然科学基金(51108429, 90915012)资助项目.

作者简介: 俞瑞芳\* (1974-), 女, 博士, 副研究员, 硕士生导师  
(E-mail: yrfang126@126.com).

式中  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为  $N \times N$  阶的质量、阻尼和刚度矩阵,且均为对称矩阵,  $\mathbf{y}$  是  $N \times 1$  阶的节点位移向量,  $\mathbf{r}$  是表示荷载位置的单位向量,  $\ddot{y}_g(t)$  是任意地面加速度输入。式(1)可改写为标准形式的状态方程,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\ddot{y}_g(t) \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{I}$  为  $N \times N$  的单位矩阵。

如果应用矩阵函数来表示,式(2)所描述的一阶微分方程组具有与普通的一阶微分方程形式上相同的解答,即

$$\mathbf{x} = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}\ddot{y}_g(\tau) d\tau \quad (4)$$

可定义

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad (5)$$

为冲击传递函数矩阵或脉冲响应矩阵。

以上解答形式上虽然简单,但是计算矩阵指数函数  $e^{\mathbf{A}t}$  和与之相应的矩阵  $\mathbf{b}$  不是很容易,往往需要运用比较复杂的数学运算技巧,这对于结构工程师来说是比较困难的。在线性系统和矩阵理论中已经证明,矩阵指数函数  $e^{\mathbf{A}t}$  可以分解为与 Jordan 标准形矩阵类似的形式,系数矩阵  $\mathbf{b}$  可以通过 Laplace 变换和计算留数的方法得到。现将方程(2)变换成以  $\lambda = \alpha + i\beta$  为参数的复域方程,并令初始状态为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , 则可得

$$\mathbf{X}(\lambda) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\mathbf{Y}_g(\lambda) = \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{Y}_g(\lambda) \quad (6)$$

式中  $\mathbf{X}(\lambda)$  和  $\mathbf{Y}_g(\lambda)$  分别为相应于时域响应  $\mathbf{x}(t)$  和输入  $\ddot{y}_g(t)$  的 Laplace 变换,是响应和输入在频域中的表达;  $\mathbf{G}(\lambda) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$  是传递函数矩阵,它与式(5)所示的脉冲响应矩阵  $\mathbf{H}(t)$  互为 Laplace 变换。求解系统的特征方程为

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (7)$$

可得到  $2N$  个复特征值  $\lambda_m$  和相应的复特征向量  $\Phi_m$  ( $m=1 \sim 2N$ )。由式(3)可得

$$\Phi_m = [\lambda_m \phi_m \quad \phi_m] \quad (8)$$

式中  $\phi_m = \varphi_m + i\psi_m$  是原二阶微分方程(1)的复特征向量。由于方程(1)和(2)表示同一系统,所以根据这两个方程得到的复特征值和特征向量是一样的。

由线性系统的一般理论可知,对于互异的特征值,可以得到用  $2N$  个特征向量构造的变换矩阵  $\mathbf{Q} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_{2N}]$ , 并可通过线性变换

$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}$  将状态方程(2)简化为约当规范形:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}\ddot{y}_g(t) \quad (9)$$

式中  $\bar{\mathbf{A}}$  是对角元素为特征值的对角矩阵。所以式(4)和式(5)中与矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  相应的矩阵指数函数为

$$e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \mathbf{Q} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{Q}^{-1} = \sum_{m=1}^{2N} \Phi_m \bar{\Phi}_m^T e^{\lambda_m t} \quad (10)$$

同方程(2)相比,方程(10)已解耦为互相独立的方程,这样就很容易求解了。对于不具有重特征值的一般有阻尼系统,其系统动力反应分析可以按照文献[4]中给出的复振型叠加法计算,本文之所以给出这样的解耦过程,主要是为了说明有重特征值系统的解耦过程。

当系统部分出现重特征值时,系统的响应不能完全解耦,这时在约当规范形中,相应于重特征值的位置上,其对角元素右侧将出现 1,形成特殊的约当块,即

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{J}_m & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{J}_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中  $z$  为不同特征值的个数,  $\mathbf{J}_m$  为相应于特征值  $\lambda_m$  的约当块;当  $\lambda_m$  为重根时,  $\mathbf{J}_m$  表示的约当块中对角元素右侧将出现 1,致使系统不能完全解耦。对于重特征值  $\lambda_m$  所对应的约当块  $\mathbf{J}_m$ , 可以通过计算特征值的几何重数和代数重数,将约当块  $\mathbf{J}_m$  变换为更小的约当块,即将结构解耦为更小的系统<sup>[13]</sup>;但是,这个计算过程是比较复杂的。因此,对于部分出现重频特性的大型复杂系统,本文将给出以下的分析计算方法。

假设系统具有  $z$  对相异的特征值  $(\lambda_m, \bar{\lambda}_m)$  ( $m=1, 2, \dots, z$ ), 相应的重数为  $k_m$  ( $k_m \geq 1$ )。现将  $z_1$  对单根从全部特征值中分离出来,并按照先单根后重根排序,那么特征值所对应的重数  $k_m$  可以表示为

$$\begin{cases} k_m = 1, & m \leq z_1 \\ k_m \geq 2, & z_1 + 1 < m \leq z \end{cases}$$

则结构在时域中的位移响应可以写为

$$y(t) = y_D(t) + y_M(t) = \sum_{m=1}^{z_1} \{y_D(t)\}_m + \sum_{m=z_1+1}^z \{y_M(t)\}_m \quad (12)$$

式中  $y_D(t)$  表示  $z_1$  个单自由度(SDOF)体系的位移响应,  $y_M(t)$  表示  $z - z_1$  个耦联的小系统的位移

响应,  $\{y_M(t)\}_m$  表示相应于重特征值  $\lambda_m$  的耦联系统的响应。

本文之所以给出式(12)所示的叠加公式, 主要是因为对于不同部分的位移响应, 可以按照特征值的重数采用不同的计算方法, 以提高大型复杂结构的计算效率。对于位移响应  $y_D(t)$ , 可以采用基于不同振型之间正交性的复振型分解法来进行求解, 求解的过程在文献[4]中已详细给出。对于响应  $y_M(t)$  的计算, 则是本文主要考虑的部分, 其方法的选择将直接关系到计算的效率。当特征值  $\lambda_m$  为重特征值时, 若其代数重数  $d_m$  与几何重数  $l_m$  相等, 即  $d_m = l_m$  时, 与此特征值对应的特征向量全部线性无关, 尽管是重特征值, 由于它们所对应的所有特征向量都相互正交, 源于互异特征值的振型分解方法依然适用; 当  $l_m < d_m$  时, 则线性无关的特征向量出现亏损或欠缺(亏损的数量等于此重特征值的秩), 相应的系统成为亏损系统。对于亏损系统, 通过计算特征值的几何重数和代数重数, 及独立向量和导出向量, 可按照特征值的几何重数将系统解耦为更小的系统<sup>[13]</sup>, 但这个过程是比较复杂的。

经对比和分析, 本文对于  $y_M(t)$  的计算采用基于部分分式展开的留数矩阵解耦法<sup>[11,12]</sup>, 该方法可以将一个重特征值对应的系统, 按照一个耦合的小系统进行计算, 可避免求解每个重特征值的重数和相应的独立向量和导出向量。由以上分析可知, 位移响应是由  $z - z_1$  个  $k_m$  阶的方程组成的, 由于在大多数情况下  $k_m \ll N$ , 因此求解  $k_m$  阶的方程要比直接求解方程(1)容易的多。本文给出的叠加公式, 充分利用了复振型叠加法和留数矩阵解耦法的优点, 也可以看作是一种广义的振型叠加法。

### 3 有重频特性系统的动力响应

#### 3.1 相应于互异特征值的动力响应

首先讨论式(12)中相应于  $z_1$  个 SDOF 系统的位移响应  $y_D(t)$  的计算。在给出的解耦方法中, 此部分的响应完全可以采用文献[4]给出的计算方法来进行计算, 即

$$y_D(t) = \sum_{m=1}^{z_1} \hat{\mathbf{A}}_{m,1} q_{m,1}(t) + \hat{\mathbf{B}}_{m,1} \dot{q}_{m,1}(t) \quad (13)$$

式中  $\hat{\mathbf{A}}_{m,1}$  和  $\hat{\mathbf{B}}_{m,1}$  分别为相应于特征值  $\lambda_m$  的广义参与系数, 下标“1”用于表示特征值的重数为 1。  $q_{m,1}(t)$  和  $\dot{q}_{m,1}(t)$  分别为第  $m$  个 SDOF 系统的位移响应和速度响应, 可以通过求解方程:

$$\ddot{q}_{m,1}(t) + 2\zeta_m \omega_m \dot{q}_{m,1}(t) + \omega_m^2 q_{m,1}(t) = -\ddot{y}_g(t) \quad (14)$$

得到在时域中的响应, 其中  $\omega_m$  和  $\zeta_m$  分别为自由振动的频率和相应的阻尼比。

#### 3.2 相应于重特征值的动力响应

由于传递函数矩阵的全部极点与系统的特征值是一一对应的, 对于相应于  $z - z_1$  个耦联系统的位移响应  $y_M(t)$  的计算, 将基于极点的概念来加以说明。

对于重数为  $k_m$  的一对共轭的重极点  $(\lambda_m, \bar{\lambda}_m)$ , 其相应系统的动力响应可以写为

$$\{Y_M(\lambda)\}_m = \sum_{i=1}^{k_m} \left[ \frac{\mathbf{R}_{m,i}}{(\lambda - \lambda_m)^i} + \frac{\bar{\mathbf{R}}_{m,i}}{(\lambda - \bar{\lambda}_m)^i} \right] \mathbf{Y}_g(\lambda) = \sum_{i=1}^{k_m} \mathbf{G}_{mi}(\lambda) \mathbf{Y}_g(\lambda) \quad (15)$$

式中  $\mathbf{G}_{mi}(\lambda)$  是相应于第  $i$  阶项  $(\lambda - \lambda_m)^i$  的传递函数,  $\mathbf{R}_{m,i}$  和  $\bar{\mathbf{R}}_{m,i}$  ( $i=1, 2, \dots, k_m$ ) 分别是相应于子项  $(\lambda - \lambda_m)^i$  和  $(\lambda - \bar{\lambda}_m)^i$  的一对共轭的留数矩阵。对于重数为  $k_m$  的极点, 其留数矩阵中的每个元素为

$$R_{m,i}^{pq,l} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_m} \frac{1}{D_M(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \left[ \frac{J_{pq}^*(\lambda)(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}{\prod_{m=1}^z (\lambda - \lambda_m)^{k_m} (\lambda - \bar{\lambda}_m)^{k_m}} \right] \quad (16)$$

式中  $R_{m,i}^{pq,l}$  的上标  $pq$  表示留数矩阵  $\mathbf{R}_{m,i}$  中第  $p$  行  $q$  列的元素, 上标  $l$  表示确定相应于  $(\lambda - \lambda_m)^i$  的留数时导数的阶数,  $l$  值按照降序进行排列, 即  $l = k_m, k_m - 1, \dots, 1$ , 它与子项  $(\lambda - \lambda_m)^i$  中指数  $i$  的排列顺序相反。  $D_M = \det[\mathbf{M}]$ ,  $J_{pq}^*(\lambda)$  是伴随矩阵  $\mathbf{J}^*(\lambda)$  中第  $p$  行  $q$  列的元素, 它可以表示为关于极点  $\lambda$  的  $2(N-1)$  多项式。若对式(15)的两端做 Laplace 反变换, 那么相应于第  $m$  个耦联系统在时域中的响应可以表示为

$$\{y_M(t)\}_m = \sum_{i=1}^{k_m} \left[ \mathbf{R}_{m,i} \int_0^t (t-\tau)^{i-1} e^{\lambda_m(t-\tau)} \ddot{y}_g(\tau) d\tau + \bar{\mathbf{R}}_{m,i} \int_0^t (t-\tau)^{i-1} e^{\bar{\lambda}_m(t-\tau)} \ddot{y}_g(\tau) d\tau \right] \quad (17)$$

上式表示的位移向量是留数矩阵与荷载向量乘积对时间  $t$  积分的结果, 由于此表达式中包含有量纲的项  $(t-\tau)^{i-1}$ , 这意味着式(17)中的留数矩阵  $\mathbf{R}_{m,i}$  在  $i=1$  和  $i>1$  时有不同的量纲。为便于比较, 要使  $(t-\tau)^{i-1}$  无量纲化, 即

$$(t-\tau)^{i-1} = \frac{1}{\beta_m^{i-1}} [\beta_m(t-\tau)]^{i-1}$$

若设共轭极点  $\lambda_m = -\alpha_m + i\beta_m, \bar{\lambda}_m = -\alpha_m - i\beta_m$ , 其中  $\alpha_m = \zeta_m \omega_m, \beta_m = \omega_m \sqrt{1 - \zeta_m^2}$ 。分离式(17)中极点和留数矩阵的实部和虚部,并合并一对共轭项的贡献,那么相应于重特征值  $\lambda_m$ (重数  $k_m$ )的第  $i$  阶响应,可以表示为

$$\begin{aligned} \{y_M(t)\}_{mi} = & \\ 2\{u_{mi}\} \int_0^t [\beta_m(t-\tau)]^{i-1} e^{-\alpha_m(t-\tau)} \cos \beta_m(t-\tau) \ddot{y}_g(\tau) d\tau & \\ -2\{v_{mi}\} \int_0^t [\beta_m(t-\tau)]^{i-1} e^{-\alpha_m(t-\tau)} \sin \beta_m(t-\tau) \ddot{y}_g(\tau) d\tau & \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{式中} \quad \{u_{mi}\} = \frac{1}{\beta_m^{i-1}} \text{Re}(\mathbf{R}_{m,i}) \mathbf{M} \mathbf{r} \quad (18a)$$

$$\{v_{mi}\} = \frac{1}{\beta_m^{i-1}} \text{Im}(\mathbf{R}_{m,i}) \mathbf{M} \mathbf{r} \quad (18b)$$

则相应于重特征值  $\lambda_m$  的耦联结构响应为

$$\{y_M(t)\}_m = \sum_{i=1}^{k_m} \{y_M(t)\}_{mi} \quad (19)$$

由以上分析可知,对于  $k_m$  重特征值中的第  $i$  项( $i=1, 2, \dots, k_m$ ),其相应的脉冲响应函数可以写为

$$h_{mi}(t) = \frac{1}{\beta_m} (\beta_m t)^{i-1} e^{-\zeta_m \omega_m t} \sin \sqrt{1 - \zeta_m^2} \omega_m t \quad (20)$$

此式与相应于单根的情况相比,增加了一个无量纲的项  $(\beta_m t)^{i-1}$ ,因此将式(20)所示的传递函数与输入加速度  $\ddot{y}_g(\tau)$  卷积得到的时程响应可称为高阶响应,其峰值与频率的关系曲线称为高阶谱。

综合以上分析,系统相应于重特征值部分的响应  $y_M(t)$  可以写为所有重极点的总和,即

$$y_M(t) = \sum_{m=z_1+1}^z \{y_M(t)\}_m = \sum_{m=z_1+1}^z \sum_{i=1}^{k_m} \{y_M(t)\}_{mi} \quad (21)$$

在实际计算中,对式(18)的求解可以通过改变输入的时间历程把求解高阶响应的问题转化为求解一般单自由度系统的强迫振动,即

$$\begin{aligned} \{y_M(t)\}_{mi} = & 2\{u_{mi}\} \int_0^t e^{-\alpha_m(t-\tau)} \cos \beta_m(t-\tau) \ddot{y}_{gG}^i(t, \tau) d\tau - \\ & 2\{v_{mi}\} \int_0^t e^{-\alpha_m(t-\tau)} \sin \beta_m(t-\tau) \ddot{y}_{gG}^i(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

式中

$$\ddot{y}_{gG}^i(t, \tau) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(i-1)!}{(i-1-j)! j!} (\beta_m t)^{i-j-1} (-\tau \beta_m)^j \ddot{y}_g(\tau)$$

修改输入以后,采用数值计算对式(22)的计算方法已在文献[14]中进行了详细的讨论,限于篇幅,此处不再详述。

设  $q_{m,i}(t)$  为相应于第  $m$  个重特征值的第  $i$  阶位移响应关于正弦的 Duhamel 积分,即

$$q_{m,i}(t) = -\frac{1}{\beta_m} \int_0^t [\beta_m(t-\tau)]^{i-1} e^{-\zeta_m \omega_m(t-\tau)} \sin(\sqrt{1 - \zeta_m^2} \omega_m(t-\tau)) \ddot{y}_g(\tau) d\tau \quad (23)$$

对式(23)的两边求一阶导数,可以得到关于余弦的 Duhamel 积分为

$$\int_0^t [\beta_m(t-\tau)]^{i-1} e^{-\alpha_m(t-\tau)} \cos \beta_m(t-\tau) \ddot{y}_g(\tau) d\tau = (i-1)\beta_m q_{m,i-1} - \zeta_m \omega_m q_{m,i} - \dot{q}_{m,i} \quad (24)$$

式中

$$q_{m,i-1}(t) = -\frac{1}{\beta_m} \int_0^t [\beta_m(t-\tau)]^{i-2} e^{-\zeta_m \omega_m(t-\tau)} \sin(\sqrt{1 - \zeta_m^2} \omega_m(t-\tau)) \ddot{y}_g(\tau) d\tau$$

故由式(21)表示的  $z - z_1$  个耦合小系统在时域的动力响应可以表示为

$$y_M(t) = \sum_{m=z_1+1}^z \sum_{i=1}^{k_m} (\tilde{\mathbf{E}}_{m,i} q_{m,i-1} + \tilde{\mathbf{A}}_{m,i} q_{m,i} + \tilde{\mathbf{B}}_{m,i} \dot{q}_{m,i}) \quad (25)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{E}}_{m,i} = 2(i-1)\beta_m \{u_{mi}\} \quad (25a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{m,i} = -2\zeta_m \omega_m \{u_{mi}\} + 2\beta_m \{v_{mi}\} \quad (25b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m,i} = -2\{v_{mi}\} \quad (25c)$$

由于向量  $\tilde{\mathbf{E}}_{m,i}, \tilde{\mathbf{A}}_{m,i}, \tilde{\mathbf{B}}_{m,i}$  系坐标函数,它们同样也可以用来表示振型位移引起的内力等其他响应或效应,标量  $q_{m,i-1}(t), q_{m,i}(t)$  和  $\dot{q}_{m,i}(t)$  是随时间变化的函数。实际上当  $k_m = 1$  时,式(25a)表示的广义参与系数  $\tilde{\mathbf{E}}_{m,1} = 0$ ,式(25)可以退化为单层求和公式。在完成了以上的分析之后,对式(12)的求解可以分别根据式(13)和式(25)来进行。如果将系统的单根看作是重数为1的重特征值的特殊情况,那么由式(12)表示的结构响应可以写为

$$y(t) = \sum_{m=1}^z \sum_{i=1}^{k_m} (\mathbf{E}_{m,i} q_{m,i-1} + \mathbf{A}_{m,i} q_{m,i} + \mathbf{B}_{m,i} \dot{q}_{m,i}) \quad (26)$$

式中

$$\mathbf{E} = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{E}}_{z_1+1,1}, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_{z_1+1, k_{z_1+1}}, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_{z,1}, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_{z, k_z}]$$

$$\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{A}}_{1,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{z_1,1}, \tilde{\mathbf{A}}_{z_1+1,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{z_1+1, k_{z_1+1}}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{z,1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{z, k_z}]$$

$$\mathbf{B} = [\tilde{\mathbf{B}}_{1,1}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{z_1,1}, \tilde{\mathbf{B}}_{z_1+1,1}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{z_1+1, k_{z_1+1}}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{z,1}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{z, k_z}]$$

虽然式(26)统一表示了相应于单特征值和重

特征值的结构响应,但是并不妨碍按照振型分解法和留数矩阵解耦法分别计算相应于单特征值和重特征值的结构响应。在实际工程应用中,当采用本文给出的方法计算大型复杂结构时,可以利用任何熟悉的软件计算结构的特征值,并将特征值按照其重数进行排列;然后基于振型叠加法式(13)计算相应于单特征值的结构响应,基于留数矩阵解耦法式(25)计算相应于重特征值的结构响应。本文给出的计算方法求解相应于重特征值的结构响应时,不需要计算重特征值的几何重数和代数重数,及相应的独立向量和导出向量,因此易于设计人员掌握,提高计算效率。

### 4 具有重频特性的双自由系统响应

为便于了解系统高阶响应在整个反应中所占的比例,必须了解系统产生重特征值的条件,以便于构造合适的简单系统,进行相应的分析。因此,本节将基于两个自由度的并联和串联系统来讨论系统产生重特征值的条件及系统动力响应。图1所示为双自由度并联系统。图1中  $m_s$  和  $m_b$  为质点质量,  $k_s, k_b$  和  $k_{sb}$  为刚度系数,  $c_s, c_b$  和  $c_{sb}$  为阻尼系数。

论文推导给出了此系统产生重特征值时圆频率  $\omega_s, \omega_{sb}$  和  $\omega_b$  之间的关系表达式。若令重特征值  $\lambda = -\zeta^* \omega^* + i \omega^* \sqrt{1 - \zeta^{*2}}$ , 则可得到系统的重频  $\omega^*$  和相应的阻尼比  $\zeta^*$  的表达式,即

$$\begin{aligned} \omega^* &= \sqrt[4]{\omega_s^2 \omega_{sb}^2 + \omega_b^2 (\omega_s^2 + \mu \omega_{sb}^2)} \\ \zeta^* &= \frac{\omega_b \zeta_b + \omega_s \zeta_s + (1 + \mu) \omega_{sb} \zeta_{sb}}{2 \omega^*} \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $\mu = m_b / m_s, \zeta_b, \zeta_s$  和  $\zeta_{sb}$  为阻尼比。

如果假设  $k_b = c_b = 0$ , 那么系统将退化为单层建筑物上的 TMD 系统或基础隔震结构的简化分析,此系统相当于一个串联系统。根据计算和分析,此系统产生重特征的条件为

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega_{sb} + \zeta_{sb} \omega_{sb} \sqrt{\mu / (1 - \zeta_{sb}^2)} \\ \zeta_s &= \zeta_{sb} - \sqrt{\mu (1 - \zeta_{sb}^2)} \end{aligned} \quad (28)$$

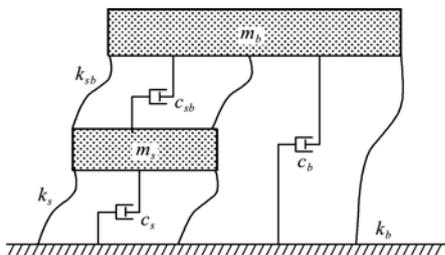


图1 双自由度有阻尼系统

Fig.1 Damped system of double degrees of freedom

采用与并联系统相同的计算方法,可以得到此系统的重频  $\omega^*$  和相应的阻尼比  $\zeta^*$  为

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega_s \sqrt{\frac{1}{1 + \mu} - \frac{\zeta_s \sqrt{\mu}}{(1 + \mu) \sqrt{1 + \mu - \zeta_s^2}}} \\ \zeta^* &= \left[ \frac{\zeta_s}{1 + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu} (1 + \mu - 2 \zeta_s^2)}{(1 + \mu) \sqrt{1 + \mu - \zeta_s^2}} \right] \frac{\omega_s}{\omega^*} \end{aligned} \quad (29)$$

现取满足重频条件的并联系统的物理参数为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0.13955 & -0.04798 \\ -0.04798 & 0.77232 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 29.2 & -6.08 \\ -6.08 & 29.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式(27)求得系统的一对共轭的二重特征值  $\lambda_{1,2} = -2.85 \pm 18.6783i$ , 相应的结构频率为  $\omega_{1,2} = 18.8944$  (rad/s), 阻尼比为  $\zeta_{1,2} = 0.1508$ 。利用式(18)可得相应的留数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} 0.0293 - 0.6617i & -0.6654 - 0.1004i \\ -0.6654 - 0.1004i & -0.1726 + 0.6617i \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} -0.3330i & 0.0356i \\ -0.0356i & -0.3439i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于此系统只有重特征值部分,因此按照式(25)来进行计算。表1给出了此系统相应于低阶振型 ( $i=1$ ) 和高阶振型 ( $i=2$ ) 的广义振型参与系数。若采用 NS 向的 El\_Centro 地震波,并按照式(22)修改地震输入,采用 Newmark- $\beta$  法对各阶单自由度体系进行动力响应分析,可得到图2所示的两个质点高阶与低阶响应时程曲线的对比。

从图2可以看出,两个质点高阶与低阶响应的贡献相当。因此,如果在计算中只考虑低阶响应的贡献,将会给结果带来较大的误差。此系统按照式(25)叠加后可得到两个质点的峰值位移分别为 1.9611 cm 和 1.4169 cm。为了检验本文所给的叠加法式(25)的正确性,将此双自由度系统直接采用 Newmark- $\beta$  法进行分析,得到了与式(25)同样的计算结果。

表1 广义振型参与系数

Tab.1 Generalized modal participation factors

阶数	$i=1$	$i=2$
$\{u_i\}$	$[0 \ 0]'$	$10^{-3} \times [-2.725 \ -3.590]'$
$\{v_i\}$	$10^{-2} \times [-2.949 \ -3.036]'$	$10^{-3} \times [-3.264 \ 2.404]'$
$\tilde{\mathbf{E}}_i$	$[0 \ 0]'$	$[-0.1018 \ -0.1341]'$
$\tilde{\mathbf{A}}_i$	$[-0.1018 \ -0.1341]'$	$[-0.1064 \ -0.1103]'$
$\tilde{\mathbf{B}}_i$	$[0 \ 0]'$	$[0.0054 \ 0.0071]'$

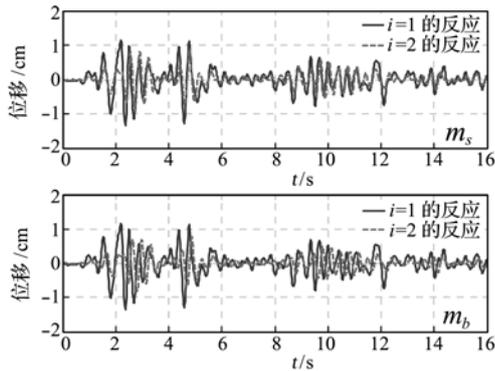


图2 高阶和低阶位移响应的比较

Fig.2 Displacement responses of low-order and high-order modes

## 5 结论

本文经过理论推导和实例分析,得出以下结论。

(1) 对于具有重频特性的一般有阻尼线性系统,本文给出了完全实数形式的叠加公式(26)。该方法充分利用了复振型分解法和基于部分分式展开的留数矩阵解耦法的优点,能够考虑部分出现重特征值的影响。此表达式形式简洁,便于掌握,适合于大型复杂体系的分析;通过与逐步积分法比较,验证了其正确性和有效性。

(2) 对于双自由度阻尼线性系统,本文给出了产生重特征值的条件,并给出了相应于重频部分的动力响应的计算过程。

(3) 有阻尼线性多自由度系统不管是否具有重特征值都可用留数矩阵解耦法按本文叙述的步骤进行振动响应的求解。因此,本文提出的分析方法对比例阻尼系统和非比例阻尼系统是同样适用的。

## 参考文献(References):

[1] Caughey T K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1960, **27**(2):269-271.

[2] Igusa T, Kiuerghian A D, Sackman J L. Modal decomposition method for stationary response of non-classically damped systems[J]. *Earthquake Engineering & Structure Dynamic*, 1984, **12**(1):121-136.

[3] Chu Y L, Song J W, Lee G C. Modal Analysis of Arbitrarily Damped Three-Dimensional Linear Structures Subjected to Seismic Excitations[R]. Technical Report MCER-09-0001, State University of New

York at Buffalo, 2009.

- [4] Zhou X Y, Yu R F, Dong D. Complex mode superposition algorithm for seismic responses of non-classically damped linear MDOF system[J]. *Journal of Earthquake Engineering*, 2004, **8**(4):597-641.
- [5] Song J W, Chu Y L, Liang Z, et al. Modal Analysis of Generally Damped Linear Structures Subjected to Seismic Excitations[R]. Technical Report MCEER-08-0005, 2008.
- [6] Fujino Y, Abe M. Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamic*, 1993, **22**(10):833-854.
- [7] Tsai H C. Green's function of support-excited structures with turned-mass dampers derived by a perturbation method[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamic*, 1993, **22**(11):793-990.
- [8] Chen S H. *Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamic Design*[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [9] 张贤达. 矩阵分析和应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004. (ZHANG Xian-da, *Matrix Analysis and Application*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [10] Katsuhido O. *Modern Control Engineering (fourth edition)* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [11] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京:清华大学出版社, 2002. (ZHEN Da-zhong. *Linear System Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese))
- [12] 陈福祥, 朱家万. 线性系统控制理论[M]. 武汉:武汉工业大学出版社, 1990. (CHEN Fu-xiang, ZHU Jia-wan. *Linear Systems Control Theory* [M]. Wuhan: University Press, 1990. (in Chinese))
- [13] 时国勤, 诸德超. 线性振动亏损系统的广义模态理论[J]. *力学学报*, 1989, **21**(2):183-192. (SHI Guo-qin, ZHU De-chao. The generalized mode theory of linear structural vibration defective system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1989, **21**(2):183-192. (in Chinese))
- [14] Yu R F, Zhou X Y, Yuan M Q. The practical step-by-step procedure of high-order dynamic response analysis for general damped system[J]. *Advanced Materials Research*, 2012, **378-379**(1):161-165.

(下转第 230 页)

## All hexahedron mesh generation for multi-featured geometry

DAI Xing<sup>1</sup>, CUI Han-guo<sup>1</sup>, LUO Xin<sup>\*2</sup>

(1. School of Naval Architecture and Power, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;

2. The State Key Laboratory of Digital Manufacturing Equipment and Technology,  
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** The accuracy and efficiency of finite element analysis is closely related to mesh quality. Existing hexahedral meshing algorithms suffer from poor meshing compatibility between different geometric constraints and poor meshing quality around hole-shaped features, especially for complex model with varieties of geometric features. In this paper, a novel approach to hexahedral meshing for multi-featured geometry is proposed based on the mapping algorithm. A complex geometry in physical space is mapped into regular geometry in computational space, which complicated geometry boundary is then simplified by introducing boundary vertex classification rules; sub-domain constraints are connected, and through boundary is searched so that the mapping grids are compatible between a pair of constraint features; the arc features are equivalently transformed to reduce the influence of curvature on grid transitions. Three examples about hexahedral mesh generation are provided to illustrate the efficiency and robustness of the proposed method.

**Key words:** finite element analysis; automatical meshing; hexahedral mesh; geometric segmentation

~~~~~  
(上接第 203 页)

## Dynamic response analysis of the linear system with repeated frequencies

YU Rui-fang<sup>\*1</sup>, ZHOU Xi-yuan<sup>2</sup>, YUAN Mei-qiao<sup>3</sup>

(1. Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China;

2. Beijing Key Laboratory of Earthquake Engineering and Structural Retrofit,  
Beijing University of Technology, Beijing 100213, China;

3. Institute of Earthquake Engineering, Chongqing 401147, China)

**Abstract:** For the generally damped linear systems with repeated eigenvalues, a hybrid approach based on the complex modal superposition method and residue matrix decomposition method is presented. The hybrid approach incorporates the merits of the modal superposition method and residue matrix decomposition method, and has clear physical concept and is easily to be understood and mastered by engineering designers to analyze the large structures. Besides, the conditions producing repeated eigenvalues for the double degrees of freedom system are deduced, and the implementation procedure of the proposed hybrid approach in the paper is illustrated by analyzing simple numerical examples. Finally, correctness and effectiveness of the formula are judged by comparing the results obtained from Newmark- $\beta$  methods. It pointed out that the method derived in this paper is also suitable for linear system, electro-mechanical and control system.

**Key words:** damped system; repeated eigenvalues; transfer function; residue matrix; modal superposition method