

非概率区间模型可靠性指标的梯度投影算法

李世军¹, 樊建平^{*1}, 漆 炜², 陈旭勇³

(1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074; 2. 湖北省交通运输厅 通信信息中心, 武汉 430030;
3. 武汉工程大学 环境与城市建设学院, 武汉 430074)

摘 要:考虑不确定参数为区间变量, 研究求解非概率可靠性指标的有效搜索算法。基于函数梯度法的基本思想, 构造搜索方向, 建立迭代算法格式, 将传统的用于概率可靠性分析的梯度投影法用于非概率可靠性指标的求解。当收敛点为非最可能失效点时, 提出了空间降维算法, 并给出了整个搜索算法的计算步骤。通过数值算例, 验证了本文提出的搜索迭代算法的有效性和正确性。

关键词:可靠性指标; 非概率可靠性; 梯度投影; 区间模型; 无穷范数

中图分类号: O213.2; TB114 **文献标志码:** A doi: 10.7511/jslx201302004

1 引 言

概率可靠性采用概率统计理论描述工程中的不确定性, 需要大量的实验数据描述随机变量的概率分布。有关研究表明, 概率可靠性对概率模型参数(均值和方差)极为敏感, 概率数据的微小偏差可能导致结构可靠性出现较大误差^[1,2]。

对于实际工程结构, 所能获取的数据信息往往较少, 不足以确定变量的概率分布规律, 而变量的界限易于确定。以色列学者 Ben-Haim^[3]和法国学者 Elishakoff^[4]提出并倡导用凸集模型(Convex model)描述不确定性结构中“不确定但有界”(Uncertain-But-Bounded)的变量, 凸集模型包括超立方盒模型(也称区间模型)和超椭球模型等。Ben-Haim^[2]于1994年基于凸集理论, 首次提出了非概率可靠性的概念并指出, 若系统容许不确定参量在一定范围内波动而不影响其安全性, 则系统是可靠的。Elishakoff^[5]于1995年针对此概念提出了一种可能的度量方法, 认为非概率可靠性指标并非确定性参数, 它隶属于某一区间。Ben-Haim^[6]于1995年在原概念的基础上, 提出了以系统能容许的不确定性的最大程度度量可靠性, 所定义的可靠性是系统对不确定性的稳健性度量。郭书祥和吕震宙^[7-9]基于区间分析, 系统建立了区间模型的

结构非概率可靠性理论体系, 并成功用于不确定结构的可靠性分析和优化设计。文献[7]基于区间算法, 将正则化区间变量扩展到无限空间中, 以坐标原点到失效面按无穷范数度量的最短距离为非概率可靠性指标。

进行非概率可靠指标的求解, 最直接的方法是采用区间数学运算, 但由于区间扩张的固有属性, 区间运算难以进行。梯度投影法(the Gradient Projection Method)因其物理意义明确, 迭代迅速, 已成功运用于求解概率可靠度^[10]。概率可靠性指标的表达式为点到点的距离, 表达式明确而具体, 函数梯度易于获取; 而基于区间模型的非概率可靠指标为某点坐标分量的绝对值, 无明确的解析表达式, 不能直接使用梯度投影法。本文通过构造目标函数的梯度方向, 建立迭代运算格式, 采用空间降维法, 将梯度投影算法运用于求解非概率可靠性指标, 并给出收敛方法和准则。实际算例表明, 梯度投影法在非概率可靠性分析中的可行性和有效性。

2 非概率区间模型可靠性指标

非概率可靠性分析是将结构的不确定参数描述为区间变量, 并将结构或构件性能的波动范围与失效准则进行比较, 通过引入并分析可靠性指标以确定结构的可靠性程度^[7]。若结构的不确定参数 x_i 在某区间内变化, 其上、下界分别为 x_i^u 和 x_i^l , 则称 $x_i \in [x_i^l, x_i^u]$ 为区间变量, 引入 x_i 的中值和偏差为

$$x_i^c = \frac{1}{2}(x_i^u + x_i^l), \quad x_i^d = \frac{1}{2}(x_i^u - x_i^l) \quad (1, 2)$$

收稿日期: 2012-01-18; 修改稿收到日期: 2012-08-16.
基金项目: 国家自然科学基金(10972084); 国家科技支撑计划(2008BAC36B03)资助项目.
作者简介: 李世军(1978-), 男, 博士生;
樊建平*(1957-), 男, 教授, 博士生导师
(E-mail: jpfan@mail.hust.edu.cn).

进一步对 x_i 作正则化处理得

$$x_i = x_i^c + x_i^s \delta_i \quad (3)$$

则 $\delta_i \in [-1, 1]$ 为正则化区间变量。同概率可靠性一样,由结构的失效准则确定的功能函数为

$$M = g(\boldsymbol{\delta}) = g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in C_\delta = \{\boldsymbol{\delta}: |\delta_i| \leq 1, i=1, 2, \dots, n\} \subset C_\delta^\infty = \{\boldsymbol{\delta}: \delta_i \in (-\infty, +\infty), i=1, 2, \dots, n\}$, C_δ 是由 $\boldsymbol{\delta}$ 张成的对称凸域, C_δ^∞ 是 C_δ 在无限空间中的扩展。称式(4)为 C_δ 与 C_δ^∞ 空间中的标准化失效面,则对任意连续的功能函数式,基于区间模型的结构非概率可靠性指标为^[7]

$$\eta = \min(\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty) \quad (5)$$

式中 $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty = \max\{|\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_n|\}$ 为正则化区间变量的无穷范数,表示从坐标原点到最可能失效点的距离(按无穷范数 $\|\cdot\|_\infty$ 度量)。若 $\eta > 1$,则结构性能的实际波动范围与失效域不相交,表明结构是可靠的。

由式(4,5)可知,非概率可靠性指标 η 的求解可以表示为如下优化形式。

$$\min \max\{|\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_n|\} \quad (6)$$

s. t.

$$M = g(\boldsymbol{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0 \quad (7)$$

可以看出,求解过程本质上有等式约束的优化问题。对于线性功能函数,可以进一步导出求解 η 的计算公式。但一般工程中,功能函数呈非线性状态,精确的解析方法受到限制。本文首次在非概率可靠性分析中采用梯度投影算法,能够有效地处理非线性功能函数,而且计算精度高、通用性强。

3 求解可靠性指标的梯度投影算法

进行无约束优化设计,沿目标函数的负梯度方向为最速下降方向。在有约束情况下,沿最速下降方向移动可能进入非可行域。早期由 Rosen^[11] 提出,后经 Goldfarb 和 Lapidus^[12] 改进的梯度投影法,既改进目标函数值,又保持移动的可行性。准确地说,当迭代点在可行域内部时,取该点的负梯度方向为可行下降方向;当迭代点在可行域边界上时,取可行下降方向为该点负梯度在可行域边界的投影。梯度投影算法的原理和投影矩阵的构成可参见文献^[13]。进行概率可靠性分析时,Liu^[10] 等已将梯度投影算法用于概率可靠度的求解,并指出该算法是众多概率可靠性指标求解方法中最为有效的方法之一,具有通用性和稳健性的特点。

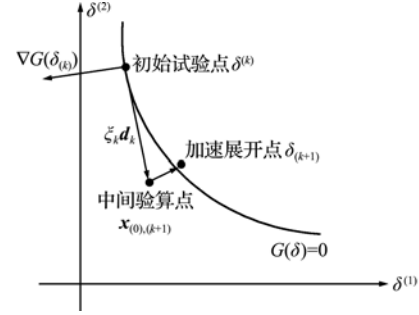


图1 梯度投影迭代算法示意图

Fig. 1 The iterative scheme for the gradient projection method

非概率可靠性指标的求解属于有等式约束的极小值优化问题,功能函数为约束函数,非概率可靠性指标为目标函数。同其他经典的优化算法一样,投影梯度算法属于线性搜索方法,基本量为搜索方向 \boldsymbol{d}_k 和搜索步长 λ_k ,迭代格式为 $\boldsymbol{\delta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(k)} + \lambda_k \boldsymbol{d}_k$ 。由于功能函数通常以非线性形式出现,进行线性搜索后的点并不一定落在极限状态曲面上,需经拟牛顿迭代,将搜索点拉回到 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 面上来。具体过程如图1所示。

在概率可靠性分析中,可靠性指标 β 为标准正态空间中坐标原点到失效面 $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ 的最短距离,即 $\beta = F(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} / 2$ 。显然,目标函数的梯度表达式为 $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 。而对于非概率可靠性指标的求解,目标函数为 $F(\boldsymbol{\delta}) = \max(|\delta_i|)$ ($i=1, 2, \dots, n$),其值为标准化失效面上点的坐标分量最大绝对值,仅与某点的一个坐标分量有关,不存在解析表达式,难以给出目标函数的负梯度方向,传统的梯度投影法不能直接用于非概率可靠性指标的求解。根据梯度的数学意义,本文构造类似目标函数的梯度矢量为 $\nabla F(\boldsymbol{\delta}^{(k)}) = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)^T$ (± 1 的位置对应于 $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ 中绝对值分量最大的位置,且分量为正数时取1,反之取-1),以此作为目标函数 $F(\boldsymbol{\delta})$ 的梯度,再按梯度投影算法将矢量 $\nabla F(\boldsymbol{\delta}^{(k)})$ 投影到曲面(曲线)上,在此基础上定义搜索方向为

$$\boldsymbol{d}^{(k)} = -\left[\boldsymbol{I} - \frac{\nabla G^T(\boldsymbol{\delta}^{(k)}) \nabla G(\boldsymbol{\delta}^{(k)})}{|\nabla G(\boldsymbol{\delta}^{(k)})|^2} \right] \cdot \nabla F(\boldsymbol{\delta}^{(k)}) \quad (8)$$

显然,如此定义的搜索方向满足

$$\begin{aligned} \nabla G \cdot \boldsymbol{d} &= -\nabla G (\boldsymbol{I} - (\nabla G^T \nabla G / |\nabla G|^2)) \cdot \nabla F \\ &= -(\nabla G - (\nabla G^T \cdot \nabla G \nabla G / |\nabla G|^2)) \cdot \nabla F \\ &= -(\nabla G - \nabla G) \cdot \nabla F = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

说明 \boldsymbol{d} 方向沿着失效面的切线方向。同时,

$$\begin{aligned} \nabla F \cdot \boldsymbol{d} &= -\nabla F (\boldsymbol{I} - (\nabla G^T \nabla G / |\nabla G|^2)) \cdot \nabla F \\ &= -(\nabla F^T \cdot \nabla F - (\nabla G^T \cdot \nabla F \nabla G^T \cdot \nabla F / |\nabla G|^2)) \\ &= (|\nabla G^T \cdot \nabla F|^2 - |\nabla G|^2 \cdot |\nabla F|^2) / |\nabla G|^2 \\ &= -|\nabla F|^2 [1 - \cos(\nabla G, \nabla F)] < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

说明 \mathbf{d} 指向目标函数 $F(\boldsymbol{\delta})$ 的下降方向。

关于步长的选取,一般采用 Armijo-Goldstein^[13]非精确一维搜索算法,即 Armijo-Goldstein 准则。其基本思想是在每次迭代中,通过一维搜索得到每次迭代所用步长,以保证目标函数有满意的下降量,在每次迭代运算中需要对目标函数求导。由于非概率可靠性的目标函数 $F(\boldsymbol{\delta}) = \max(|\delta_i|) (i=1, 2, \dots, n)$ 不方便求导,本文不采用 Armijo-Goldstein 准则。考虑到数值计算中目标函数值易于获得,采用精度适当的固定步长,经若干次迭代后,目标函数值的误差在允许范围内时,终止迭代。本文根据目标函数值选择初始步长,当前目标函数值下降较快时,下一步可适当增大步长,若目标函数值出现增加,则将本次迭代的步长缩小后重新迭代。为方便起见,初始步长选为 1,当出现 $F(\boldsymbol{\delta})$ 增加后,改变步长为 $\alpha|\boldsymbol{\delta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)}|$ (取 α 为 0.2~0.5), $\boldsymbol{\delta}^{(k+1)}$ 为 $F(\boldsymbol{\delta})$ 出现增加时的迭代点,将步长改变后,以 $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ 为展开点重新开始迭代。通过控制步长的选择来获得满足精度的目标函数值,也兼顾迭代的效率。

最后是初始点的选择和确定,对于一般的迭代搜索算法,合适地选择初始点,能够迅速得到迭代收敛点,并保证理想的精度。但初始点的选择依赖于对研究对象的熟悉程度和丰富的工程经验,进行算法研究时,希望放宽初始点的选择条件。本文考虑初始点只要落约束方程上,即满足约束条件 $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 上即可,这一点是容易做到的。

4 空间降维法

为了有效确定最可能失效点,采用的空间搜索方法依赖于两个要素:搜索方向 \mathbf{d} 和搜索步长 λ 。对于具有一般形式的目标函数 $F(\boldsymbol{\delta})$, $F(\boldsymbol{\delta})$ 是自变量的连续且光滑函数时,由于 \mathbf{d} 的方向总是指向目标函数的下降方向,且当搜索迭代点趋近于最可能

失效点时,不断缩小搜索步长,一定能够在功能函数 $M=G(\boldsymbol{\delta})$ 所构成的超曲面上确定最可能失效点,如图 2 所示。

由于本文研究的目标函数具有 $F(\boldsymbol{\delta}) = \max(|\delta_i|) (i=1, 2, \dots, n)$ 的形式,该函数在 $|\delta_i| = |\delta_j| (j \neq i)$ 平面上既不连续,又不光滑。对 $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 超平面进行如下处理:利用 $|\delta_i| = |\delta_j| (j \neq i)$ 平面对 $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 超平面进行分区,当 F 含有两个自变量时, $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 被划分为两个区域,每个区域为平面上的一段曲线;当 $F(\boldsymbol{\delta})$ 含有 3 个自变量时, $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 被划分为四个区域,每个区域为空间上的一片曲面;当 $F(\boldsymbol{\delta})$ 含有 n 个自变量时, $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 被划分为 2^{n-1} 个区域,每个区域为多维空间上的一片超曲面。当最可能失效点落在某一区域内部时,采用上述搜索方法仍能够确定最可能失效点,但当最可能失效点落在区域的边界面上时,搜索路径在接近最可能失效点的一个微小范围内时, $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ 与其自身比较高阶小量时,导致搜索方向在某一区域内基本不变,出现搜索路径在接近最可能失效点的两个区域内迂回震荡如图 3 所示。可以看出,此时不论搜索步长如何减小,只能搜索到最可能失效点的临近点,而无法达到准确的最可能失效点。此时,若在 $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 超平面内,令 $|\delta_i| = |\delta_j|$,往下的优化搜索限制在 $G(\boldsymbol{\delta})=0 \cap |\delta_i| = |\delta_j|$ 所定义的 $n-1$ 维超平面内;由于独立变量数量减少,称此方法为空间降维法。

非概率可靠性指标求解的迭代步骤如下:

- Step 1 在 $G(\boldsymbol{\delta})=0$ 上选择初始迭代点,置 $k=0$,步长取 1,计算 $F(\boldsymbol{\delta}^{(k)})$ 。
- Step 2 计算 $(\nabla G(\boldsymbol{\delta}^{(k)}))$ 和 $(\nabla F(\boldsymbol{\delta}^{(k)}))$ 。
- Step 3 利用式(8)计算搜索方向 \mathbf{d}_k 。
- Step 4 若 $\|\mathbf{d}_k\| \leq \epsilon_1$ 或者 $\|F(\boldsymbol{\delta}^{(k)}) - F(\boldsymbol{\delta}^{(k-1)})\| \leq \epsilon_2$, ϵ_1 和 ϵ_2 为允许误差,停止迭代, $\eta = F(\boldsymbol{\delta}^{(k)})$ 输出 η 值;否则,置 $i=0$ 。

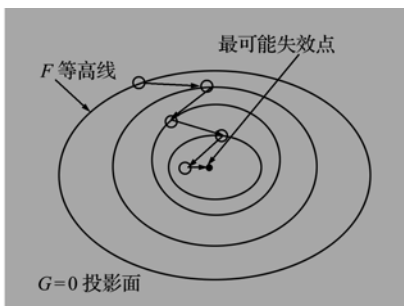


图 2 $G=0$ 投影面上最可能失效点的搜索路径示意图 (理想目标函数)

Fig. 2 The search scheme for the most possible failure point in the projection plane $G=0$ (the ideal objective function)

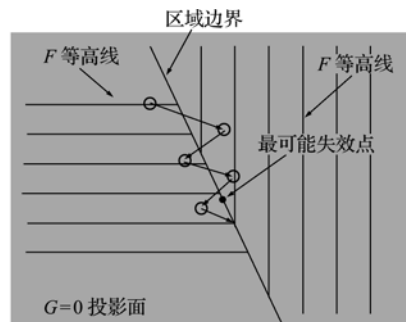


图 3 $G=0$ 投影面上最可能失效点的搜索路径示意图 (实际目标函数)

Fig. 3 The search scheme for the most possible failure point in the projection plane $G=0$ (the practical objective function)

Step 5 选择步长,若 $F(\boldsymbol{\delta}^{(k)}) < F(\boldsymbol{\delta}^{(k-1)})$,步长保持不变,否则步长取 $0.4|\boldsymbol{\delta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)}|$ 。

Step 6 令 $\boldsymbol{\delta}^{(0),(k+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{d}_k$ 。

Step 7 计算

$$\boldsymbol{\delta}^{(i+1),(k+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(i),(k+1)} - \frac{G(\boldsymbol{\delta}^{(i+1),(k+1)})}{|\nabla G(\boldsymbol{\delta}^{(k)})|^2} \nabla G^T(\boldsymbol{\delta}^{(k)})$$

使 $G(\boldsymbol{\delta}^{(i+1),(k+1)}) = 0$ 。

Step 8 令 $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \boldsymbol{\delta}^{(i+1),(k+1)}$, $k = k + 1$,若 $i \neq j$, $\|\boldsymbol{\delta}_i\| - \|\boldsymbol{\delta}_j\| \leq \epsilon_3$ 时,令 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 中 $\delta_i = \pm \delta_j$,转到 Step 2。

在第 8 步中,若 δ_i, δ_j 同号,则降维时, $\delta_i = \delta_j$;反之,取 $\delta_i = -\delta_j$ 。

5 数值算例

算例 1 考察已经标准化的非线性功能函数 $G(\boldsymbol{\delta}) = (\delta_1 - 7/4)^2 + (\delta_2 - 4/5)^2 - 4\delta_3 + 5.5$, 极限状态曲面 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 与 45° 直线 $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ 交于点 $D(1.5172, 1.5172, 1.5172)$, 可以计算出极限状态曲面的极值点 $E(1.75, 0.8, 1.375)$ 。若在 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 上选择初始点为 $(2.457, 0.8, 1.5)$, 按上面所述的迭代步骤搜索,过程见表 1。

表 1 算例 1 搜索迭代过程

Tab. 1 Search iteration procedures for example 1

次数	δ_1	δ_2	δ_3	$F(\delta)$	步长
1	2.457	0.8	1.5	2.457	1
2	1.54	0.8	1.3860	1.54	1
4	1.1793	0.8	1.4564	1.4564	0.3719
6	1.3218	0.8	1.4208	1.4208	0.1471
8	1.3794	0.8	1.4093	1.4093	0.0587
13	1.4062	0.8	1.4045	1.4062	0.0015
14	1.4040	0.8	1.4049	1.4049	0.0012
16	1.4048	0.8	1.4048	1.4048	6.0131e-4

由表 1 可知,搜索只在面 $\delta_2 = 0.8$ 内进行,搜索截止点为 $A(1.4048, 0.8, 1.4048)$, 有 $\eta = 1.4048$ 。若在 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 上选择初始点为 $(1.75, 0, 1.535)$, 最终搜索点为 $B(1.4069, 0.7014, 1.4069)$, 有 $\eta = 1.4069$; 若在 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 上选择初始点为 $(1.75, 1.6, 1.535)$, 最终搜索点为 $C(1.4069, 0.8986, 1.4069)$, 有 $\eta = 1.4069$ 。点 A、B、C、D 和 E 都在 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 超曲面上,按 η 的定义,正确的搜索目标点应为 A 点,对应的可靠性指标 $\eta = 1.4048$ 。根据上述计算结果可知:(1) 极限状态曲面 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 上的极值点(E 点)不是最可能失效点, 45° 直线与极限状态曲面 $G(\boldsymbol{\delta}) = 0$ 的交点(D 点)也不是最可能失效点;(2) 不采用空间降维法,所计算的最可

能失效点依赖于初始点的选择,尽管它们数值接近,但存在精度误差。

算例 2 某非线性功能函数 $G = 567RS - 0.5H^2$, 其中 $R \in [0.528, 0.672]$, $S \in [2.071, 2.289]$, $H \in [31.16, 34.44]$ 为不相关的区间变量。对基本区间变量作正则化变换 $R = 0.6 + 0.072\delta_R$, $S = 2.18 + 0.109\delta_S$, $H = 32.8 + 1.64\delta_H$, 代入功能函数,可得标准化失效面: $G(\boldsymbol{\delta}) = 203.716 + 88.99632\delta_R + 37.0819\delta_S + 4.449816\delta_R\delta_S - 53.792\delta_H - 1.3448(\delta_H)^2 = 0$, 选择极限状态曲面上的点 $(2.5; -6.4979; 2)$ 为初始点,迭代过程见表 2。

表 2 算例 2 搜索迭代过程

Tab. 2 Search iteration procedures for example 2

次数	δ_R	δ_S	δ_H	$F(\delta)$	步长
1	2.5	-6.4979	2	6.4979	1
2	2.1563	-5.6225	2.3390	5.6225	1
4	1.5028	-3.8303	2.9399	3.8313	1
6	0.6864	-3.2013	2.3912	3.2013	1
8	-0.1131	-2.5245	1.8022	1.5245	1
11	-1.1404	0.8508	1.3487	1.3487	1
16	-1.1755	-1.1090	1.1525	1.1755	0.16
23	-1.1624	-1.1224	1.1643	1.1643	0.041
29	-1.1631	-1.1229	1.1631	1.1631	2.6213e-4

由表 2 可知,搜索截止点 $[-1.1631; -1.1229; 1.1631]$, $\eta = 1.1631$, 并未达到目标点。而点 $[-1.1631; -1.1229; 1.1631]$ 中第一分量与第三分量绝对值相等。进一步取 $-\delta_R = \delta_H$, 再以初始点 $[-1.1631; -1.1229]$ 为起点进行了搜索,最终搜索截止于 $[-1.1556; -1.1556]$, $\eta = 1.1556$, 与文献[14]结果相同。

算例 3 图 4 所示的悬臂梁,在距固定端 b_1 和 b_2 处分别作用两个集中载荷。假定当 $\|m_{\max}\| \geq m_{cr}$ 时失效, m_{cr} 为临界弯矩, m_{\max} 为梁中最大弯矩。设基本区间变量为 $P_1 \in [4.4, 5.6]$, $P_2 \in [1.7, 2.3]$, $b_1 \in [1.8, 2.2]$, $b_2 \in [4.5, 5.5]$, $m_{cr} \in [32, 40]$ 。

针对该梁的失效准则,确定功能函数为

$$M = m_{cr} - P_1 b_1 - P_2 b_2 \tag{11}$$

作正则化变换,得到正则化失效面:

$$G(\boldsymbol{\delta}) = 36 + 4\delta_1 - (5 + 0.6\delta_2)(2 + 0.2\delta_3) - (2 + 0.3\delta_4)(5 + 0.5\delta_5) = 0 \tag{12}$$

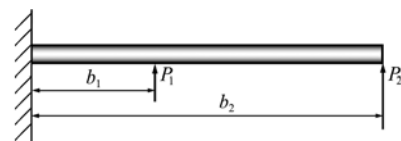


图 4 悬臂梁受力图

Fig. 4 Bending of a cantilever beam subjected to two concentrated forces

选择极限状态曲面上的点 $(-4; 0; 0; 0; 0)$ 为初始点, 经过 28 次搜索后截止于点 $[-1.7816; 1.7400; 1.6281; 1.7816; 1.6928]$, $\eta = 1.7816$ 。做降维处理 $-\delta_1 = \delta_4$, 以 $[-1.7816; 1.7400; 1.6281; 1.6928]$ 为起始点进行搜索, 搜索至 $[-1.7558; 1.7558; 1.7105; 1.7138]$, $\eta = 1.7558$ 。再做降维处理 $-\delta_1 = \delta_2$, 以起始点: $[-1.7558; 1.7105; 1.7138]$, 可搜索至 $[-1.7474; 1.7474; 1.7263]$, $\eta = 1.7474$ 。依此进行下去, 最终搜索截止点 $[-1.7446; 1.7446]$, $\eta = 1.7446$ 为本算例的最终解, 与文献[7]结果相同。采用梯度投影法进行计算时, 选择初始点落在失效曲面上, 这一点容易做到。进一步选择适当步长和空间降维, 就能够逐步达到最可能失效点, 且该算法不受功能函数复杂程度和变量个数的影响, 容易实现程序化计算。

6 结 论

与传统概率可靠度相比较, 非概率可靠性模型不需要足够的数定义概率模型, 只需参数满足有界性, 对原始数据要求低, 因而具有重要的工程应用价值。梯度投影算法因数学意义明确、算法简捷, 能够广泛运用于概率可靠性分析。本文基于区间模型, 将梯度投影算法引入到非概率可靠性指标的求解。针对非概率可靠性指标的特殊性, 构造了迭代格式, 给出迭代收敛判定准则。数值算例表明, 计算精度高及适用性强。

参考文献(References):

- [1] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures; from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. *Computers & Structures*, 1995, **56**(6): 871-895.
- [2] Ben-Haim Y. Convex models of uncertainty in radial pulse buckling of shells[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**(3): 683-688.
- [3] Elishakoff I, Elisseff P. Non-probabilistic, convex-theoretic modeling of scatter in material properties [J]. *AIAA Journal*, 1994, **32**(4): 843-849.
- [4] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. *Structural Safety*, 1994, **14**(4): 227-245.
- [5] Elishakoff I. Discussion on a non-probabilistic concept of reliability[J]. *Structural Safety*, 1995, **17**(3): 195-199.
- [6] Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models[J]. *Structural Safety*, 1995, **17**(2): 91-109.
- [7] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. *计算力学学报*, 2001, **18**(1): 56-60. (GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou, FENG Yuan-sheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, **18**(1): 56-60. (in Chinese))
- [8] 郭书祥, 吕震宙. 结构体系的非概率可靠性分析方法[J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(3): 332-335. (GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou. A procedure of the analysis of non-probabilistic reliability of structural systems [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(3): 332-335. (in Chinese))
- [9] 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构可靠性优化设计[J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(2): 198-201. (GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou. Optimization of uncertain structures based on non-probabilistic reliability[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(2): 198-201. (in Chinese))
- [10] Liu P, Kiureghlan A. Optimization algorithms for structural reliability [J]. *Structural Safety*, 1991, **9**(3): 161-177.
- [11] Rosen J. The gradient projection method for nonlinear programming (Part II) nonlinear constraints[J]. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 1961, (9): 514-532.
- [12] Goldfarb D, Lapidus L. Conjugate gradient method for nonlinear programming problems with linear constraints[J]. *I. and E. C. Fundamentals*, 1968, **7**(1): 142-151.
- [13] 谢 政, 李建平, 陈 攀. 非线性最优化理论与方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (XIE Zheng, LI Jiang-pan, CHEN Zhi. *Nonlinear Optimization: Theory and Application* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [14] 郭书祥, 张 陵, 李 颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. *计算力学学报*, 2005, **22**(2): 227-230. (GUO Shu-xiang, ZHANG Ling, LI Ying. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(2): 227-231. (in Chinese))

The gradient projection method for non-probabilistic reliability index based on interval model

LI Shi-jun¹, FAN Jian-ping^{*1}, QI Wei², CHEN Xu-yong³

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. Communications and Information Center of The Department of Transportation of Hubei Province, Wuhan 430030, China;

3. School of Environment and Civil Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A new search algorithm for effectively solving non-probabilistic reliability index is presented and discussed using the interval model of uncertain in this study. Based on the basic concept of function gradient, the gradient projection method, which conventionally used to analyze probabilistic reliability, is adopted to solve non-probabilistic reliability index by creating search directions and establishing iterative computation formulation. When the convergence point is not the most possible failure one, the spatial dimensional reduction is proposed. The calculation steps of the gradient projection method are also presented. The numerical examples have illustrated the search efficiency and validity of the proposed algorithm.

Key words: reliability index; non-probabilistic reliability; the gradient projection method; interval model; infinite norm

~~~~~  
(上接第 179 页)

## Power spectrum determination of system response via the Wavelet-Galerkin technique

KONG Fan<sup>1</sup>, LI Jie<sup>\*1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092;

2. State Key Laboratory Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** This paper presents a wavelet-Galerkin technique based approach for the determination of the power spectrum density (PSD) of the response of the SDOF system subject to stochastic excitation. Specifically, first the Periodic Generalized Harmonic Wavelet (PGHW) is presented and the connection coefficients of the PGHW are derived, based on the analytical form and the orthogonality of the wavelets. Further, the deterministic response of the system is obtained via the wavelet-Galerkin technique and the connection coefficients. Next, based on the relationship between the mean square value of the wavelet coefficients and the power spectrum density of the stochastic process, the excitation-response PSD relationship is derived. Finally, the numerical example demonstrates the reliability of the approach over the pertinent Monte Carlo simulation.

**Key words:** wavelet transform; harmonic wavelet; connection coefficients; Wavelet-Galerkin; power spectral density