

基于高斯过程分类的结构贝叶斯可靠性分析

曹鸿钧*, 朱玉强, 张 功

(西安电子科技大学 电子设备结构教育部重点实验室, 西安 710071)

摘要:贝叶斯可靠性方法是处理不完备信息条件下结构可靠性问题的有效途径之一。在实际应用中,由于可靠性分析的计算量较大,常须采用各种近似替代模型以提高计算效率。传统的替代模型方法是对结构的功能函数予以近似建模。这种方法不易定量考虑模型误差对可靠性分析的影响,且难以应用于诸如功能函数不连续和失效域不连通等情况。为此,本文提出一种基于高斯过程分类的替代模型,直接辨识结构的极限状态曲面,并将其应用于结构贝叶斯可靠性分析之中。分析了替代模型不确定性对可靠性预测结果的影响,给出了失效概率分布参数的方差算式,进而提出了改善模型精度的补充采样准则。通过算例验证了方法的适用性和有效性。

关键词:贝叶斯可靠性;不完备信息;替代模型;模型不确定性;高斯过程分类

中图分类号:TB114.3;O213.2 **文献标志码:**A

1 引言

结构在不确定因素影响下的可靠性问题,已历经数十年的研究,提出了众多可靠性分析方法,并可处理多种类型的不确定因素。通常,不确定因素按所掌握信息的多寡,可分为三类:即^[1]完备概率信息、不完备信息和“未知然而有界”信息。其中,对完备概率信息的研究最为成熟,大多数经典的可靠性分析方法均是在假定随机参数的分布概型为已知的前提下发展起来的。对“未知然而有界”信息,近年来也获得了一定研究,提出了一些处理模型和方法^[2,3]。对不完备信息的研究则相对较少^[1,4-6]。文献^[1,6]等采用贝叶斯方法给出了失效概率的分布概型,为不完备信息下的可靠性分析问题提供了较为合理的解决方案。

可靠性分析的计算量一般较大,需要多次结构重分析。为了减少重分析次数,常用的处理方法是在分析中引入所谓替代模型(Surrogate models)。传统的替代模型方法是对功能函数予以近似建

模^[7]。用近似模型替代有限元仿真过程,可以较大程度提高可靠性分析的计算效率,然而它存在如下两个不足之处。

(1) 它不是直接对可靠度或失效概率予以近似,而是先对功能函数建模,再对近似模型予以可靠性分析。因而替代模型所提供的信息是间接的,不便于定量考虑模型不确定性^[8]对可靠性预测结果的影响。

(2) 在某些情况下(如结构非线性分析、动力分析等),结构的功能函数常常是不连续的。结构的失效域有时存在多个不连通区域。此时,功能函数的替代模型往往难以反映设计空间的这种复杂性,常规的可靠性分析方法(包括贝叶斯可靠性分析)也难以直接应用。针对这一问题,文献^[9,10]采用支撑向量分类模型对失效面(极限状态曲面)予以辨识,表明分类模型可有效应用于此类情况,但未考虑模型不确定性对可靠性预测结果的影响。

本文提出采用高斯过程分类模型直接建立失效面的替代模型。高斯过程模型固有的统计背景,便于定量考虑模型不确定性对可靠性计算结果的影响。在贝叶斯可靠性方法的框架下,推导出失效概率分布参数的方差算式,进而提出了改善模型精度的补充采用准则,通过算例验证了方法的适用性和有效性。

收稿日期:2011-07-31;修改稿收到日期:2012-01-15.

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金
(JY10000904008);国家自然科学基金
(51175398)资助项目.

作者简介:曹鸿钧*(1968-),男,博士,副教授
(E-mail: hongjun.cao@gmail.com);
朱玉强(1987-),男,硕士生;
张 功(1987-),男,硕士生.

2 高斯过程分类模型

设结构的功能函数为 $G(\mathbf{x}, \mathbf{U})$, 其中 \mathbf{x} 为确定性变量(向量), \mathbf{U} 为随机向量。本文用大写字母表示随机变量, 相应的小写字母表示随机变量的一个实现。本节暂不考虑结构参数的随机性, 只考虑失效面替代模型的建立问题。参数的随机性将在下节予以考虑。

记结构参数为 $\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{u}]^T \in R^m$ 。结构失效与否可归结为一个二分类问题。用分类变量 $c = +1$ 表示结构功能失效 ($g > 0$), $c = -1$ 表示结构未失效 ($g \leq 0$)。高斯过程分类模型将分类概率 (\mathbf{y} 落于失效域的概率) 表示为^[11,12]:

$$\pi(\mathbf{y}) \triangleq p\{c = +1 | \mathbf{y}\} = \sigma(f(\mathbf{y}))$$

式中 $f(\mathbf{y})$ 称为隐层函数(Latent function), $\sigma(\cdot)$ 为逻辑函数, $\sigma(f) = 1/[1 + \exp(-f)]$ 。

通俗地说, 逻辑函数相当于把隐层函数 f 的取值“挤到” $[0, 1]$ 之间, 使得 $\pi(\mathbf{y})$ 满足“概率”的取值要求。

对隐层函数 $f(\mathbf{y})$ 采用高斯过程先验假设: $f(\mathbf{y}) \sim GP(0, k(\mathbf{y}, \mathbf{y}'))$ 。即认为 $f(\mathbf{y})$ 为一平稳高斯随机过程的一个实现, $k(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 为协方差函数, 本文采用平方指数(Squared Exponential^[11])形式的协方差函数。

为建立分类模型, 须在参数变化范围内进行试验设计 DOE(Design of Experiment)。设试验设计的数据集(简称为 DOE 点集)为

$$D = \{(\mathbf{y}_i, c_i) | i = 1, 2, \dots, N_{\text{doe}}\} = \{\mathbf{Y}, \mathbf{c}\}$$

记 $\mathbf{f} = [f(\mathbf{y}_1), f(\mathbf{y}_2), \dots, f(\mathbf{y}_{N_{\text{doe}}})]^T$ 为 DOE 点对应的隐层向量。对于一个新点 $\mathbf{y}^* \notin D$, 其对应隐层函数 $f^* = f(\mathbf{y}^*)$ 的概率密度可通过其条件概率对后验分布予以积分, 即

$$p\{f^* | \mathbf{y}^*, D\} = \int_{\mathbf{f}} p\{f^* | \mathbf{y}^*, \mathbf{Y}, \mathbf{f}\} \cdot p\{\mathbf{f} | D\} d\mathbf{f} \quad (1)$$

由于后验分布 $p(\mathbf{f} | D)$ 的函数形式较复杂, 式(1)的积分难以给出解析解。文献[11]采用拉普拉斯近似积分方法, 将 $p\{f^* | \mathbf{y}^*, D\}$ 用高斯分布 $q\{f^* | \mathbf{y}^*, D\}$ 来近似, 其均值和方差分别为

$$E_q[f^* | \mathbf{Y}, \mathbf{c}, \mathbf{y}^*] = \mathbf{k}(\mathbf{y}^*, \mathbf{Y})^T \cdot \nabla \ln p(\mathbf{c} | \hat{\mathbf{f}}) \quad (2)$$

$$V_q[f^* | \mathbf{Y}, \mathbf{c}, \mathbf{y}^*] = \mathbf{k}(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{k}(\mathbf{y}^*, \mathbf{Y})^T \cdot$$

$$(\mathbf{K} + \mathbf{W}^{-1})^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{y}^*, \mathbf{Y}) \quad (3)$$

式中 $\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} p\{\mathbf{f} | D\}$, $\mathbf{W} = -\nabla^2 \ln p(\mathbf{c} | \hat{\mathbf{f}})$ 。 $k(\cdot, \cdot)$ 为协方差函数, $\mathbf{k}(\mathbf{y}^*, \mathbf{Y})$ 为点 \mathbf{y}^* 与 DOE 点之间的协方差向量, \mathbf{K} 为 DOE 点对应的协方差矩阵。相应地, 分类概率的均值可近似地由如下一维积分得到:

$$\bar{\pi}^* \approx E_q[\pi^* | D, \mathbf{y}^*] = \int \sigma(f^*) q\{f^* | D, \mathbf{y}^*\} df^* \quad (4)$$

式中参数 \mathbf{y}^* 为确定性变量, 即尚未考虑结构参数的随机性。分类概率隐含的不确定性反映了对失效域情况的未确知, 是根据现有数据(DOE 数据)对 \mathbf{y}^* 失效与否的推断。因而分类概率自身便直接反映了模型不确定性。最不确定点(如 $\bar{\pi}^* = 0.5$ 对应的点)要么落于失效面附近, 要么位于 DOE 点极度稀疏的区域。对这两个区域都是感兴趣的, 并希望能在失效面附近具有较高的模型精度(局部精度), 而在 DOE 点极度稀疏区域布点又可从整体上提高模型的预测精度(全局精度)。 $\bar{\pi}^* = 0.5$ 对应的点集实际上反映了在当前 DOE 数据的条件下对极限状态曲面的推断, 因而该模型实质上是对极限状态曲面的近似预测(或辨识)。

3 失效概率的预测

现进一步考虑结构参数的随机性。设由于信息不完备, 随机变量 \mathbf{U} 的概率分布未知, 而仅知道 N_s 个样本数据, 记为 $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N_s}]$ 。为了利用样本数据提供的统计信息, 可对每个样本点失效与否予以判断, 贝叶斯可靠性将这一过程视为一个 Bernoulli 试验, 若用 r 表示该试验中不可行点的个数, 则失效概率服从如下 Beta 分布^[1,6]:

$$P_F \sim \text{Beta}(r+1, N_s - r+1)$$

由于模型不确定性的影响, 在 Bernoulli 试验中, 每次试验结果不再是确定的, 而是具有概率 $\bar{\pi}$ 。 N_s 个统计样本中, 落入失效域的样点数目也不再是确定的整数, 而是一个连续型随机变量, 其均值和方差分别为

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{N_s} \bar{\pi}(\mathbf{y}_i), \quad \sigma_r^2 = \sum_{i=1}^{N_s} \text{Var}[\pi(\mathbf{y}_i)] \quad (5,6)$$

式中分类概率的方差由隐层函数的不确定性所引起,故

$$\text{Var}(\pi_i) \triangleq \text{Var}[\pi | D, \mathbf{y}_i] = \int \sigma^2(f) q\{f | D, \mathbf{y}_i\} df - \bar{\pi}_i^2 \quad (7)$$

式中 $\bar{\pi}_i = \bar{\pi}(\mathbf{y}_i)$ 。式(7)的一维积分也难以给出解析解,本文采用高斯积分法求其数值解。

3.1 模型不确定性对失效概率的影响

由贝叶斯可靠性理论可知,失效概率服从如下 Beta 分布:

$$P_F \sim \text{Beta}(\bar{r}+1, N_s - \bar{r}+1) \quad (8)$$

模型不确定性会影响 Beta 分布的均值(位置参数)和方差(尺度参数)。由 Beta 分布的性质可知其均值和方差分别为

$$\mu_B = \frac{\bar{r}+1}{N_s+2}, \quad \sigma_B^2 = \frac{(\bar{r}+1)(N_s - \bar{r}+1)}{(N_s+3)(N_s+2)^2}$$

由模型不确定性所引起的 μ_B 的均方差为

$$\sqrt{\text{Var}(\mu_B)} = \sigma_r / (N_s+2) \quad (9)$$

至于 σ_B^2 的均方差,可由其一阶泰勒级数获得,即

$$\sqrt{\text{Var}(\sigma_B^2)} \approx [|N_s - 2\bar{r}| / (N_s+3)(N_s+2)^2] \sigma_r \quad (10)$$

为定量考察模型不确定性的影响,记

$$\text{NSR}_{\mu_B} = \sqrt{\text{Var}(\mu_B)} / \mu_B \quad (11)$$

$$\text{NSR}_{\sigma_B^2} = \sqrt{\text{Var}(\sigma_B^2)} / \sigma_B^2 \quad (12)$$

分别称为 μ_B 和 σ_B^2 的噪信比。用下式表示模型不确定性对失效概率的综合影响:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\text{NSR}_{\mu_B} + \text{NSR}_{\sigma_B^2}) \quad (13)$$

式中 ϵ 越大,表明模型的预测误差越大。

3.2 补充采样准则

对可靠性问题来说,为节省建模费用,没必要在整个参数空间都具有较高的模型精度。新的样本点应尽可能集中在失效面附近,以便在该区域具有较高的局部精度。因此,可通过求解如下优化问题来产生新样点如下。

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{y}_{add} \\ \text{Min. } - \min_{j=1, \dots, N_{doe}} (\| \mathbf{y}_{add} - \mathbf{y}_{doe}^j \|) \\ \text{s. t. } | \bar{\pi}(c_{add} = +1 | \mathbf{y}_{add}) - 0.5 | \leq \delta \\ \mathbf{y}_{add} \in [\mathbf{y}^L, \mathbf{y}^U] \end{cases} \quad (14)$$

式中 \mathbf{y}_{add} 为新产生的样本点, $\mathbf{y}_{doe}^j \in \mathbf{Y}$ 为现有的 DOE 点。该问题的目标函数为最大化新 DOE 点与已有 DOE 点之间的最短距离,以避免出现重复样点或因样点间距过小而导致协方差矩阵 \mathbf{K} 奇异。 \mathbf{y}^L 和 \mathbf{y}^U 分别为新样点取值的上下限,参数 δ 控制分类概率接近 0.5 的程度,本文取为 0.01。若要产生多个样点,只需重复求解该问题。该问题的求解较简单,不需要调用有限元分析,因而重复求解不会过多地增加计算量。每次求解所产生的新样点加入 DOE 点集中,并逐步更新分类模型,直至 ϵ 小于给定的精度要求。

4 算例

用本文方法对若干算例进行了计算,既有失效域不连通的情况,也有功能函数不连续的情况,均得到较好的结果。限于篇幅仅给出了一个算例^[9]。

图 1 为两直边筒支拱壳结构,弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa,受集中荷载 $F = 6400$ N 的作用, $\theta = 14^\circ$,中面曲率半径 $R = 8$ m;拱宽度 L 和壳厚度 t 为随机变量,其中 $L \sim N(200, 20^2)$, $t \sim N(7.0, 0.5^2)$,单位为 mm。假设由于统计数据不完备,不知随机参数的分布密度,而仅有 N_s 个样本点。设 N_s 分别为 50、80 和 120 个,考察三种情况下该结构的屈曲概率。

结构的功能函数为 A 点的 z 向位移 u_{Az} 。结构发生屈曲时,由于平衡状态的跃变,导致 u_{Az} 出现突变,从而功能函数不连续。传统的对功能函数建立替代模型的做法难以直接应用于这种情况。

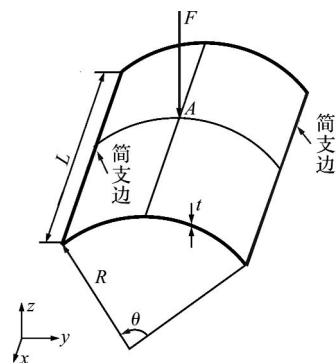


图 1 拱壳结构
Fig. 1 Arch structure

变量 L 和 t 的采样范围分别为 $L \in [150, 500]$ mm 和 $t \in [3, 10]$ mm。首先用拉丁超方体采样法在参数变动范围内生成 21 个 DOE 点, 建立初始分类模型。初始分类模型对应的分类概率等值线如图 2(a) 所示。为考察该模型的预测能力, 对 $N_s = 50$ 时的失效概率进行了计算。若不采用替代模型, 失效概率对应的 Beta 分布均值, $\mu_B = 0.34$, 方差 $\sigma_B^2 = 0.0043$ 。采用替代模型时, 相关的计算结果列入表 1。从图 2(a) 可以看出, 该模型的预测精度较差, 等值线较分散。 μ_B 的噪信比为 16.0% 见表 1, 波动较大。为改善模型精度, 采用补充采样准则对该模型进行了三次更新, 每次新增 3 个 DOE 点。对应的分类概率等值线分别如图 2(b ~ d) 所示。图中方框点为新产生的样本点, 实心点为可行点, 空心圆点为失效点(屈曲)。从图 2 可以看出, 新样点大多聚集于极限状态曲线附近, 较大程度地提高了模型的预测精度。

表 1 列出了每次模型更新后的预测结果。在 $N_{doe} = 30$ 时, 得到了较满意的结果, μ_B 的噪信比降为 7.88%。图 3 给出了各模型对应的失效概率分布曲线。从图 3 可以看出, 随着 DOE 样点的增加, 预测曲线逐步接近于真实曲线(图中虚线)。

进一步, 用 $N_{doe} = 30$ 对应的模型, 对 N_s 分别为 80 和 120 两种情况下的失效概率进行了计算。计算结果列入表 2, 对应的 Beta 曲线如图 4 所示。图中虚线对应真实 Beta 分布曲线, 实线为分类模型给出的预测曲线。由图可见预测曲线与真实曲线十分接近, 说明该模型的精度较好。此时由模型不确定性引起的 μ_B 和 σ_B^2 的均方差都较小(见表 2)。

从计算费用上来说, 采用替代模型的重分析次数为 30 次, 而不采用替代模型的重分析次数分别为 50 次、80 次和 120 次, 表明了该方法的优越性。

表 1 不同 DOE 点数的模型预测结果 ($N_s = 50, \mu_B = 0.34, \sigma_B^2 = 0.0043$)

Tab. 1 Predictive results of models built by different number of DOE points ($N_s = 50, \mu_B = 0.34, \sigma_B^2 = 0.0043$)

DOE 点数 (N_{doe})	$\hat{\mu}_B$	$\sigma(\mu_B)$	$\hat{\sigma}_B^2$	$\sigma(\hat{\sigma}_B^2)$	NSR $_{\mu_B}$	NSR $_{\sigma_B^2}$	ϵ
21	0.4049	0.0648	0.0045	2.3241e-4	16.0%	5.16%	10.56%
24	0.3849	0.0364	0.0045	2.5179e-4	9.46%	5.59%	7.48%
27	0.3721	0.0374	0.0044	1.8046e-4	10.05%	4.1%	7.07%
30	0.3501	0.0276	0.0043	1.5597e-4	7.88%	3.63%	5.75%

表 2 不同统计样本数目的预测结果对比 ($N_{doe} = 30$)

Tab. 2 Comparison of predictive results for different number of statistical data points ($N_{doe} = 30$)

样本数目 (N_s)	分布参数		预测值			
	μ_B	σ_B^2	$\hat{\mu}_B$	$\sigma(\mu_B)$	$\hat{\sigma}_B^2$	$\sigma(\hat{\sigma}_B^2)$
50	0.3400	0.0043	0.3501	0.0276	0.0043	1.5597e-4
80	0.3780	0.0028	0.3834	0.0239	0.0029	6.5572e-5
120	0.4098	0.0020	0.4005	0.0194	0.0020	3.1459e-5

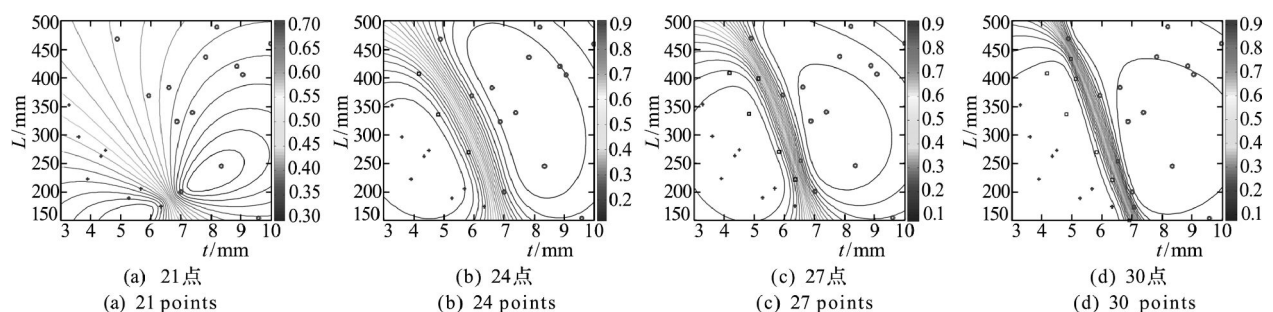
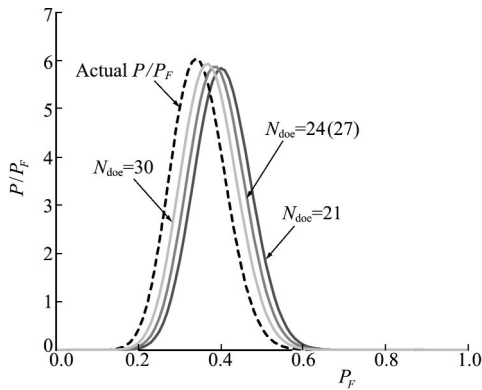
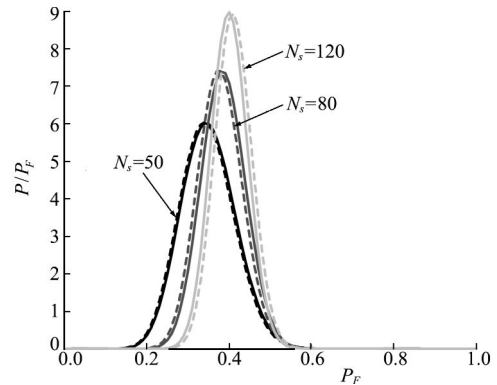


图 2 不同模型分类概率等值线

Fig. 2 Contours of classification probability predicted by different models

图3 不同模型下失效概率的分布密度($N_s=50$)Fig. 3 Densities of failure probability obtained by different models ($N_s=50$)图4 不同样本数下失效概率的分布密度($N_{\text{doc}}=30$)Fig. 4 Densities of failure probability under different number of samples ($N_{\text{doc}}=30$)

5 结论

本文在贝叶斯可靠性方法的基础上,提出了一种基于高斯过程分类的可靠性分析方法,直接识别结构的极限状态曲面,可有效应用于功能函数不连续或存在多个不连通失效域之情况。高斯过程模型的概率背景便于在可靠性分析过程中定量地考虑模型不确定性。本文推导了由模型不确定性带来的失效概率分布参数的均方差算式。这些信息对可靠性预测结果的可信度来说无疑是重要的,也可为可靠性优化的算法设计提供依据。本文在此基础上提出了相应的补充采样准则,可用较少的样本点有效地改善模型的预测精度。

参考文献(References):

- [1] Subroto Gunawan, Panos Y. Papalambros. A bayesian approach to reliability-based optimization with incomplete information[J]. *Journal of Mechanical Design, Transaction of ASME*, 2006, **128**(4): 909-918.
- [2] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. *Structural Safety*, 1994, **14**(4): 227-245.
- [3] 郭书祥,吕震宙,冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. *计算力学学报*, 2001, **18**(1): 56-60. (GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou, FENG Yuan-sheng. A non-probabilistic reliability model for structures based on interval analysis[J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2001, **18**(1): 56-60. (in Chinese))
- [4] Mourelatos Z P, Zhou J. Reliability estimation and design with insufficient data based on possibility theory[J]. *AIAA Journal*, 2005, **43**: 1696-1705.
- [5] Helton J C, Johnson J D, Oberkampf W L, et al. A sampling-based computational strategy for the representation of epistemic uncertainty in model predictions with evidence theory[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(37-40): 3980-3998.
- [6] Dawn An, Joochoi, Junho Won. Integrated bayesian reliability analysis under input variable and metamodel uncertainties[A]. 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamic, and Materials Conference[C]. Aril, Oriando, Florida, 2010.
- [7] Christian Bucher, Thomas Most. A comparison of approximate response functions in structural reliability analysis[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2008, **23**(2-3): 154-163.
- [8] Apley D, Liu J, Chen W. Understanding the effects of model uncertainty in robust design with computer experiments [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2006, **128**(4): 745-958.
- [9] Anirban Basudhar, Samy Missoum. Adaptive explicit decision functions for probabilistic design and optimization using support vector machines[J]. *Computers and Structures*, 2008, **86**(19-20): 1904-1917.
- [10] Anirban Basudhar, Samy Missoum. Antonio harrison sanchez. limit state function identification using support vector machines for discontinuous responses and disjoint failure domains[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2008, **23**(1): 1-11.
- [11] Christopher K I. Williams, David Barber. Bayesian classification with gaussian processes [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, **20**(12): 1342-1351.
- [12] Carl Edward Rasmussen, Christopher K I Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning* [M]. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts London, England, 2006.

Bayesian reliability analysis for structures based on gaussian process classification

CAO Hong-jun* , ZHU Yu-qiang, ZHANG Gong

(MOE Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Bayesian reliability method is one of the efficient approaches for reliability analysis for structures with incomplete probability information. The computational cost of the Bayesian reliability estimation is often prohibitive for real applications. It is necessary to use surrogate models to replace actual models in order to reduce the computational burden. Commonly used surrogate modeling approaches, which construct approximation models for response functions rather than limit state surfaces, are indirect and not easy to take model uncertainties into account. Furthermore, these methods are difficult to be used for problems exhibiting discontinuous responses and disjoint failure domains. In order to handle these difficulties, this paper presents a method to identify the limit state surface by using Gaussian process classification. The variances of distribution parameters of failure probability due to the model uncertainty are derived. An adaptive sampling criterion for updating the surrogate model is proposed. An example is presented to demonstrate the efficiency and effectiveness of the proposed method.

Key words: bayesian reliability; incomplete information; surrogate models; model uncertainty; gaussian process classification

~~~~~  
(上接第 824 页)

## Structural topology optimization with multiple functions

JIANG Bao-shi\* , CUI Chang-yu, CUI Guo-yong

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

**Abstract:** In this paper, extended evolutionary structural optimization (Extended-ESO) method was improved in functions for meeting the requirements of architectural and structural design, increasing its applicability for complex space requirements, and enhancing its calculation efficiency and quality of the new structure. Considering the space limitation of the architecture function, the allowable space of this method was extended to free boundary allowable space and the concept of temporary allowable space was introduced in plane problem. In order to meet the need of structural function, a new method was introduced for creating rational structures with multiple load cases and constraints. Further considering material mechanical properties, tension-only and compress-only structures were studied by extended ESO method. Otherwise, the features of the method were analyzed through several examples and some mechanical properties of the structures derived from the method were discussed. The structure form derived from this method was mainly in a state of uniform tension and compression stress, can reflect the reasonable force transmission and provide some references for concept design.

**Key words:** structural morphogenesis; shape optimization; topology optimization; extended ESO method