

平面棱柱铰内考虑摩擦效应的接触分析

罗晓明, 齐朝晖*, 孔宪超

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要:研究了多体系统中平面棱柱铰内的摩擦接触分析。在忽略铰内的碰撞效应的前提下,根据接触力系与约束反力的等效关系,以及各个角点接触力自身满足的互补关系,得到了接触力系关于摩擦力的线性互补方程。结合库仑摩擦定律,确定了铰内角点处的接触反力以及摩擦合力;另外,由接触力曲线可以得到铰内的接触形式,以及各个接触形式发生改变的时点。通过 ADAMS 算例验证,这些接触形式转换的时点就是铰内发生碰撞的时点,为高效率地研究铰内碰撞提供了可能。

关键词:平面滑移铰;摩擦接触;线性互补方程;多体系统
中图分类号:O313.7 **文献标志码:**A

1 引言

由于制造精度及安装要求,几乎所有机械系统中的铰链内都存在间隙。机械系统的动力学行为也为其发生了变化。为了避免摩擦接触带来的不利效应,铰内的摩擦接触对于机械系统来说是非常重要的。

对于接触问题的研究,迄今为止有两类^[1-4]:不连续方法和连续方法。不连续方法认为碰撞在很短的时间内发生,碰撞后的状态依赖于恢复系数。连续方法认为接触力与接触深度和接触的相对速度有关。针对上述两种不同的接触模型,很多学者研究了铰内的接触碰撞效应。Flores^[5,6]研究了平面旋转铰内的接触问题,认为铰的运动学约束不复存在,铰所连接的两个物体通过接触力来实现;文献[6-8]研究了空间旋转铰内的接触问题,Flores^[9]提出了一种分析空间球铰的接触策略。其他类型铰内的接触分析也有很多研究^[10,11]。

对于空间问题,当铰内存在多个缝隙函数时,计算效率非常低。为了快速求解,García Orden^[7]给出了一种不需考虑缝隙函数的计算策略,但该方法无法计算相应接触力。文献[12]提出了一种求解典型铰内接触分析的方法,该方法不必计算铰内的相对运动,但是可以得到关于接触的所有细节。

但由于问题的复杂性,文献[12]没有研究滑移铰的摩擦接触问题。

本文依据文献[13]所述递推方法求解动力学方程。根据平面滑移铰内接触力系与约束反力的等效关系,以及角点处接触力自身满足的互补关系,得到接触力系关于摩擦力的线性互补方程。结合库仑摩擦定律带来的补充方程,得到了铰内各个角点处的接触反力以及铰内的摩擦力。

2 考虑摩擦的多体动力学方程

含有闭环的多体系统,在进行动力学分析时,通常转化为树状系统。对应切断铰的作用转换为约束方程和约束反力。如果不考虑铰内的摩擦力,那么系统的动力学方程可以写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_q^T \\ \mathbf{\Phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 \mathbf{M} 是广义质量矩阵, \mathbf{q} 是系统广义坐标, $\mathbf{\Phi}_q$ 是约束雅可比矩阵, $\boldsymbol{\lambda}$ 是约束反力乘子列阵, \mathbf{F} 是广义外力, $\boldsymbol{\xi}$ 是约束方程右端项。

$$\boldsymbol{\xi} = -\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{\Phi}}_l \quad (2)$$

如果不考虑铰内的摩擦效应,上述方程可以直接求解,相应的系统状态以及约束反力也即得到。如果考虑铰内的摩擦效应,由于摩擦力对系统做功,系统的广义力里应该包含摩擦力的贡献。另外,摩擦合力的大小与铰内所有接触点的接触力有关。然而,接触点的位置和大小依赖于铰的理想约束反力^[12]。因而,铰内摩擦合力的大小与系统广义加速

收稿日期:2011-01-04;修改稿收到日期:2011-06-15.

基金项目:国家自然科学基金(10972044)资助项目.

作者简介:罗晓明(1981-),男,博士生;

齐朝晖*(1964-),男,博士,教授

(E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn).

度有关。考虑摩擦效应对应的系统动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \lambda) \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 \mathbf{T} 是表示滑移轴方向的矩阵, $\boldsymbol{\eta}$ 是对应的描述摩擦力乘子的列阵。由式(3)可知, 方程右边出现了与广义加速度有关的量。为了求解上述问题, 还需要一组补充方程, 这组补充方程来源于库仑摩擦定律^[12]。然后, 在每个积分步长内迭代解出系统铰内的摩擦合力。

3 考虑摩擦的铰约束反力

为了得到补充方程, 需要知道铰内所有接触点的接触反力, 而接触反力可以根据铰约束反力计算。由式(3)可得, 系统的广义加速度可以写为 $\boldsymbol{\eta}$ 的线性组合:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5,6)$$

系统加速度给出以后, 就可以从末端物体到 0 号物体逐个计算铰内的约束反力^[13]。当物体 i 成为系统末端物体时, 物体 i 的运动学方程可以表示为

$$\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{Z}}^i = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^i + \mathbf{N}^i \lambda + \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta} + \mathbf{S}^i \quad (7)$$

式中 \mathbf{M}_i 是物体 i 的广义质量矩阵, \mathbf{F}^0 是物体 i 所受的外力列阵, \mathbf{N}^i 由切断铰约束方向的矢量组成, \mathbf{T}^i 是由切断铰自由方向的矢量组成, \mathbf{S}^i 是铰 i 上内接铰点处的约束反力。

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \tilde{\mathbf{c}}_i \\ m_i \tilde{\mathbf{c}}_i & \mathbf{J}_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^i = - \begin{bmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{c}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}^i = [\mathbf{r}_i \quad \boldsymbol{\omega}_i]^T \quad (9,10)$$

式中 \mathbf{c}_i 是物体质心矢量, \mathbf{J}_i 是物体转动惯量, \mathbf{r}_i 是物体 i 连体坐标系坐标原点相对总体坐标系的矢量, $\boldsymbol{\omega}_i$ 是物体 i 的角速度。物体 i 的加速度矢量可以根据方程(4)得出, 记为

$$\dot{\mathbf{Z}}^i = \mathbf{A}^i + \mathbf{B}^i \boldsymbol{\eta} \quad (11)$$

式中 \mathbf{A}^i 和 \mathbf{B}^i 的计算见文献[13]。将式(11)代入式(7)中可得铰相对内接铰点的约束反力为

$$\mathbf{S}^i = (\mathbf{M}_i \mathbf{A}^i - \mathbf{F}^0 - \mathbf{F}^i - \mathbf{N}^i \lambda) + (\mathbf{M}_i \mathbf{B}^i - \mathbf{T}^i) \boldsymbol{\eta} \quad (12)$$

铰约束反力给出以后, 下一步是进行面棱柱铰内的摩擦接触分析。

4 平面棱柱铰的摩擦接触分析

对于现有的不考虑碰撞效应的摩擦接触分析, 大都不考虑铰内的接触形式, 而是用一组等效的接触力计算对应的摩擦力^[14], 这样可以快速地计算摩擦力, 但这只是真实解的近似。为了正确地得到铰内摩擦力, 铰的实际形状不可以忽略, 摩擦合力的计算必须依赖于所有接触点的接触力。

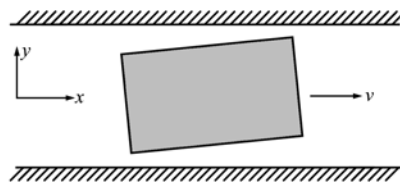


图1 平面滑移铰
Fig. 1 Planar prismatic joint

实际上, 铰约束反力来源于铰内的接触。铰内所有接触点的力的总和应该与铰约束反力等效。图1所示为一平面滑移铰, 铰内的间隙认为很小。图2所示为滑块与导轨的可能接触点和接触力, 接触力系的合力应该与约束反力等效。从而可以得到:

$$\mathbf{K} [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4]^T = (\mathbf{S}^c)_{1,2,6} \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & \kappa \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -a - c\kappa & a - c\kappa & -a + c\kappa & a + c\kappa \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $\kappa = -\mu \text{sign}(v)$, $2a$ 为滑块长度, $2c$ 为滑块高度, \mathbf{S}^c 为式(12)中铰约束反力 \mathbf{S}^i 转移到滑块中心点的约束反力, $(\mathbf{S}^c)_{1,2,6}$ 表示 \mathbf{S}^c 的第1,2,6个分量, 记

$$\mathbf{y} = [F_1 \quad F_2]^T, \quad \mathbf{x} = [F_3 \quad F_4]^T \quad (15)$$

由式(13)的第2,3个方程可得

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a - c\mu & -1 \\ a + c\mu & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{S}^c)_{2,6} \quad (16)$$

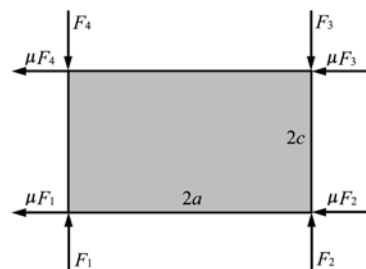


图2 可能接触点
Fig. 2 All the possible contact points

由于 $0 \leq y \perp x \geq 0$, 所以式(16)是一个线性互补方程。由于 \mathbf{K} 是单位矩阵, 方程存在唯一解。由此可以得到所有的接触力; 另外, 式(13)的第一个式子正是求解系统运动学参数的补充方程。在每个积分步长内, 铰内的摩擦合力计算过程如下。

- (1) 给出摩擦合力初始值 $\boldsymbol{\eta}$ 。
- (2) 由式(12)计算铰约束反力。
- (3) 由式(16)计算铰内各个角点的接触力。
- (4) 由库仑摩擦计算铰受到的摩擦合力 \mathbf{f} 。
- (5) 如果 $\text{abs}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}) < \text{tolerance}$, 计算成功。否则, 更新 $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} + \Delta\boldsymbol{\eta}$ 。
- (6) 重复步骤(2)~(5), 直到结果收敛。

5 数值算例

如图3所示平面结构, 所有的旋转铰都是理想铰。假设滑移铰为间隙铰, 铰内的间隙是小量, 碰撞效应不予考虑, 曲柄以恒定角速度 $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$ 运动, 系统物体的几何和质量参数列入表1。为了避免静摩擦带来的数值困难, 本文采用如图4所示连续的库仑摩擦模型。动摩擦系数 $\mu_0 = 0.3$, 动静摩擦

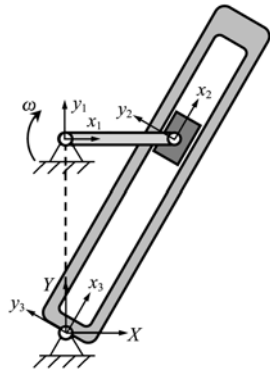


图3 平面机构
Fig. 3 A planar mechanism

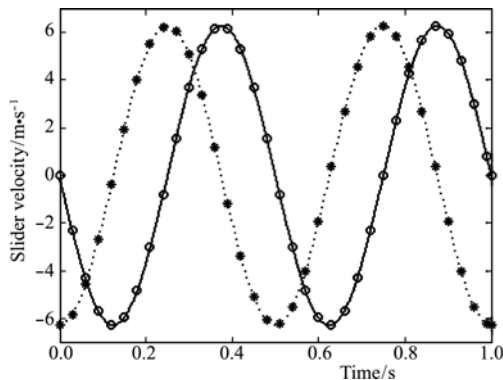


图5 滑块速度
Fig. 5 Velocity of the slider

表1 物体几何和惯性参数

Tab. 1 Geometric and inertia data

Body	Length/m	Mass/kg	Moment of inertia/kg · m ²
Crank	0.5	39.005	3.28292083
Slider	0.2	15.602	0.06500833
Guide	1.6	41.850	32.5078317

表2 仿真参数

Tab. 2 Simulation data

	Method	Step	Tolerance
This paper	ODE45	0.01	0.0001
ADAMS	Gstiff	0.01	0.0001

转换速度容限 $v_c = 0.0001 \text{ m/s}$ 。

为了检验本文所述方法的有效性, 在 ADAMS 中建立了同样的模型, 积分参数列入表2。图5所示为滑块的速度曲线。图6所示为1号旋转铰处的铰约束反力。图7所示为滑移铰滑移自由度方向上所受到的摩擦力的合力。从图7可以看出, 本文方法计算结果与 ADAMS 结果一致。

另外, 采用本文所述方法还可以得到滑块角点处的接触力如图8所示。从图8可以看出, 在曲柄

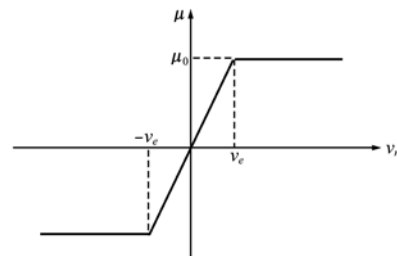


图4 连续的库仑摩擦模型
Fig. 4 A simple continuous friction model

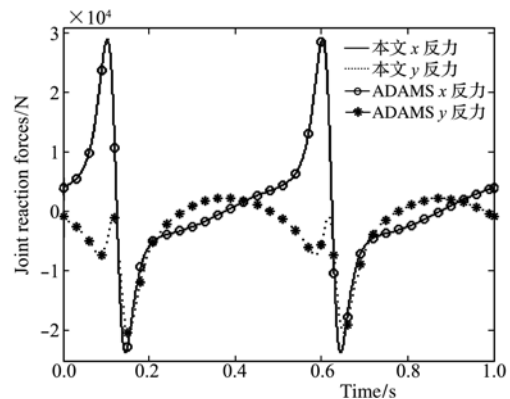


图6 1号旋转铰处约束反力
Fig. 6 Joint reaction forces of the revolute joint between the ground and crank

运行一周内,滑块与导轨之间的接触形式一共有两种,如图9所示。但是在ADAMS中,摩擦铰中的摩擦力是根据约束反力的等效关系计算的^[14],所以在ADMAS中,摩擦铰中的接触力和接触模式无法得到。由图8可知,在曲柄运行一周内发生了两次接触形式的转换:在 $0.5 \times (k-1) + 0.125$ s,从接触形式(2)转换到接触形式(1);在 $0.5 \times (k-1) + 0.375$ s,从接触形式(1)转换到接触形式(2)。k表

示曲柄运行到第k周。这种接触形式的转换意味着铰内发生了碰撞效应。发生碰撞对应的结构的构型如图10所示。

为了检验碰撞时刻的正确性,在ADAMS中,如图4所示的滑移摩擦铰替换为一个滑块与导轨之间的接触副,如图11所示。导轨与滑块之间的间隙设置为0.1 mm,选择GSTIFF方法计算。计算精度设置为 $1e-7$,积分步长设置为0.0001 s。

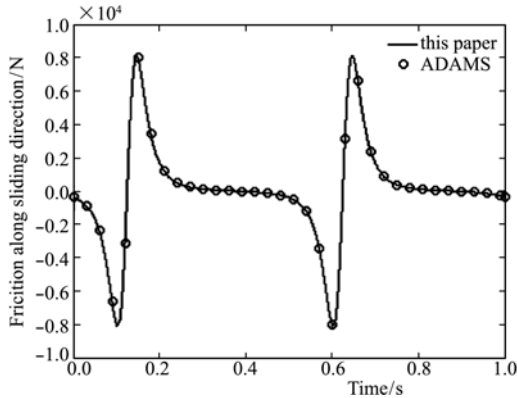


图7 滑移方向摩擦力合力
Fig. 7 Friction along relative motion

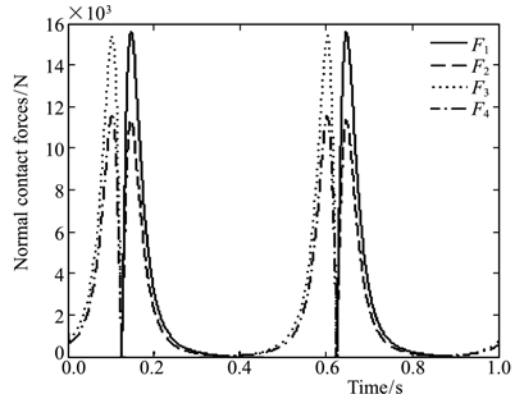


图8 滑块上各个角点接触力
Fig. 8 Normal contact forces of the slider

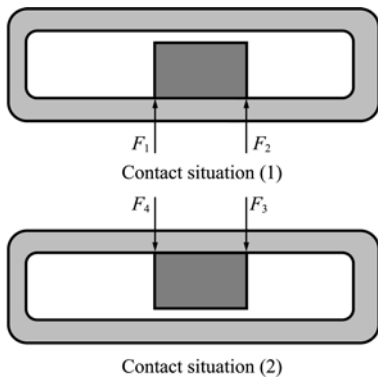


图9 滑块与导轨之间的两种接触形式
Fig. 9 Two contact situations between the slider and guide

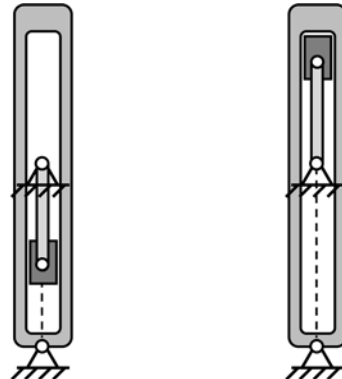


图10 发生碰撞效应时机构的构型
Fig. 10 Two mechanism configurations of the impact instants

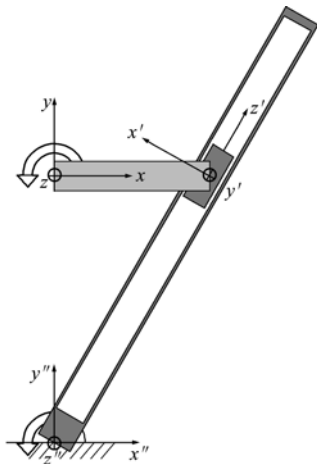


图11 ADAMS中的接触模型
Fig. 11 The contact model in ADAMS

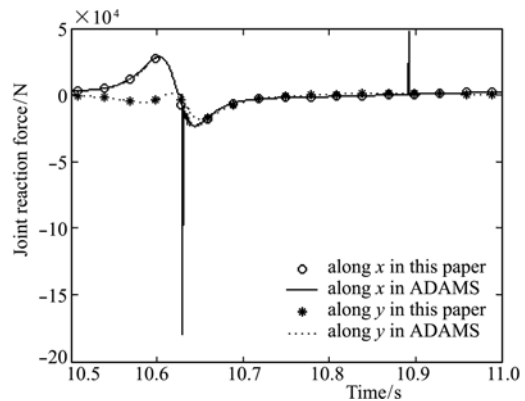


图12 2号旋转铰处约束反力
Fig. 12 Joint reaction force between the crank and slider

ADAMS 中,为了消除初始间隙带来的数值病态,进行了一个较长时间的仿真。在 10.5 s ~ 11 s 之间,曲柄与滑块之间旋转铰上的约束反力对比图如图 12 所示。从图 12 可以看出,除了在一些尖峰时刻,本文方法计算结果与 ADAMS 结果一致。ADAMS 出现尖峰的时刻即为碰撞发生的时刻,其时刻为 10.63 s 和 10.892 s。而本文探测到的碰撞发生时刻为 10.625 s 和 10.875 s。大概比 ADAMS 的时刻提前大约 0.005 s。这是由于 ADAMS 中的间隙引起的。ADMAS 中间隙越小,发生碰撞的时刻与本文结果越接近。

6 结 论

本文提出了一种分析平面滑移铰内摩擦接触的方法。根据铰内接触力系与约束反力的等效关系,以及各个角点处接触力满足的互补关系,得到接触力系关于摩擦力的线性互补方程。根据库仑摩擦定律提供的补充方程,得到每个积分步长内接触的所有细节。由数值算例可知,该方法避免了传统方法处理铰内接触问题的低效性和数值仿真的难度;并且,利用该方法可以判断出滑移铰内发生碰撞的时刻。

参考文献(References):

- [1] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京:科学出版社, 2008. (QI Zhao-hui, *Dynamics of Multibody Systems* [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese))
- [2] Pfeiffer F, Glocker C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*[M]. Wiley, New York, 1996.
- [3] 董富祥,洪嘉振. 平面柔性多体系统正碰撞动力学建模理论研究[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(6): 1042-1048. (DONG Fu-xiang, HONG Jia-zhen, Study on the modeling theory of the normal impact dynamics for the planar flexible multibody system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(6): 1042-1048. (in Chinese))
- [4] 刘才山,陈 滨. 多柔体系统碰撞动力学研究综述[J]. 力学进展, 2000, **30**(1): 7-14. (LIU Cai-shan, CHEN Bin, A global review for the impact dynamic research of flexible multibody systems[J]. *Advances in Mechanics*, 2000, **30**(1): 7-14. (in Chinese))

- [5] P Flores, J Ambrósio. Revolute joints with clearance in multibody systems[J]. *Computers and Structures*, 2004, **82**: 1359-1369.
- [6] P Flores, Ambrósio J, Claro J C P, Lankarani H M. *Kinematics and Dynamics of Multibody Systems with Imperfect Joints: Models and Case Studies* [M]. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 34. Springer, Berlin (2008).
- [7] J C García Orden. Analysis of joint clearances in multibody systems[J]. *Multibody System Dynamics*, 2005, **13**: 401-420.
- [8] Evtim Zakhariiev. Dynamics of rigid multibody systems with clearances in the joints[J]. *Mech Struct & Mach*, 1999, **27**: 63-87.
- [9] P Flores, J Ambrósio, J C P Claro, H M Lankarani. Dynamics of multibody systems with spherical clearance joints[J]. *Journal of Computational and Non-linear Dynamics*, 2006, **1**: 240-247.
- [10] 尉立肖,刘才山. 圆柱铰间隙运动学分析及动力学仿真[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2005, **41**(5): 679-687. (YÜ Li-xiao, LIU Cai-shan, Dynamic simulation and kinetic description of revolute joint with spatial clearance[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2005, **41**(5): 679-687. (in Chinese))
- [11] Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach[J]. *Multibody Syst Dyn*, 2010, **23**: 165-190.
- [12] 齐朝晖,罗晓明,黄志浩. 多体系统中典型铰的摩擦力计算模型[J]. 动力学与控制学报, 2008, **6**(4): 294-300. (QI Zhao-hui, LUO Xiao-ming, HUANG Zhi-hao. Frictions in joints of multibody systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, **6**(4): 294-300. (in Chinese))
- [13] 齐朝晖,许永生,罗晓明. 含非理想约束多柔体系统递推建模方法[J]. 力学学报, 2008, **40**(5): 686-694. (QI Zhao-hui, XÜ Yong-sheng, LUO Xiao-ming, Recursive Methods for modeling closed-loop flexible multibody systems with non-ideal constraints[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(5): 686-694. (in Chinese))
- [14] The C++ version of Adams/Solver[EB]. MSC Software Corporation, 2005.

Non-colliding contact analysis with friction in the planar prismatic joint

LUO Xiao-ming, QI Zhao-hui*, KONG Xian-chao

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: The frictional contact analysis without impact in the planar prismatic joint of multi-body systems is studied in this paper. The corresponding contact forces are obtained from the equivalence of the contact forces and joint reaction force, and finally lead to a linear complementary equation in terms of the resultant frictional force based on the complementary conditions between themselves. An additional equation is introduced based on the Coulomb's law of friction to make the problem solvable. The actual contact situation is obtained from the contact forces. The instants of switching from one situation to another can be also captured using the method proposed in this paper, and it is verified in ADAMS that the very instants are the impact instants. This provides a high-efficient way to study the impact effects in joints.

Key words: planar prismatic joint; frictional contact; linear complementary equation; multi-body systems

~~~~~  
(上接第 367 页)

## A fast and robust parallelizable moving mesh algorithm for multi-block structured grids

HUANG Li-keng\*, GAO Zheng-hong, ZUO Ying-tao

(National Key Laboratory of Aerodynamic Design and Research, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** A grid deformation method has been developed for the movement of multi-block, structured grids due to large surface deformation arising from complex geometry optimization in large design space, because traditional moving-mesh methods can't handle this kind of surface deformation. As the new geometry in the optimization procedure have same topology with the origin geometry, this method uses a volume spline interpolation technique to compute the deformation of block vertices and get a new grid topology after surface deformation. After that, the deformation of block edges, faces and volumes is computed by a modified arc-length-based one-, two-, three-dimensional transfinite interpolation (TFI) method, which is performed independently on local processors where the blocks reside. The newly deformed grid is obtained by adding the interpolated displacements to the original grid points and a smoothing operator is applied to the points of the block face boundaries and edges to maintain grid smoothness and grid angles. This method can greatly improve the grid generate efficiency beside retain the grid quality. Computational results of a wing-body have validated this method's applicability for complex geometry design optimizations in large design space.

**Key words:** multi-block, moving mesh, volume spline interpolation, transfinite interpolation