

在 Cap-cyclide 坐标中 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的高精度数值计算

黄 华*, 恰汗·合孜尔, 宋艳萍, 努尔古丽·艾力

(新疆农业大学 数理学院, 乌鲁木齐 830052)

摘 要:在 Cap-cyclide 坐标中, Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 为特征值函数且解析式中包含第一类完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数。为实现 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的高精度数值计算, 首先利用迭代法对第一类完全椭圆积分进行数值计算, 得到的数值解与理论值基本一致; 其次利用 Jacobi 椭圆函数的恒等式实现其数值计算, 数值解的有效数字达到了 14 位以上。基于此, 分两个步骤实现 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的高精度数值计算。本文的结论为进一步探讨 Wangerin 函数的收敛性和稳定性问题提供基础, 具有一定的工程实际价值。

关键词:数值计算; Cap-cyclide 坐标; Wangerin 函数; 第一类完全椭圆积分; Jacobi 椭圆函数

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

1 引 言

在核聚变实验中, 如何获得稳态的等离子体是基于托卡马克实验装置开发核聚变能的关键问题之一。文献 [1-3] 在 Cap-cyclide 坐标下, 基于 Wangerin 函数对非圆截面等离子体稳定性问题进行了研究。在研究过程中证实了, Wangerin 函数的数值计算结果在很大程度上制约着等离子体的稳定性。因此, 本文通过改进第一类完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的数值计算方法, 进而实现 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值计算, 得到高精度的数值解, 从而为进一步研究 Wangerin 函数的收敛性和稳定性问题奠定基础。

2 预备知识

2.1 Cap-cyclide 坐标^[4]

空间中任意一点 P 由有序三元组 (μ, v, ψ) 完全决定, 该点在空间直角坐标系中的坐标 (x, y, z) 可由式(1)求得

$$\begin{cases} x = (\text{sn}\mu \text{dn}v \cos\psi) / \Gamma \\ y = (\text{sn}\mu \text{dn}v \sin\psi) / \Gamma \\ z = \sqrt{k} \left(\frac{1 - \text{dn}^2\mu \text{sn}^2v}{k} + \text{cn}^2\mu \text{cn}^2v - 1 \right) / 2\Gamma \end{cases} \quad (1)$$

式中 $0 \leq \mu \leq K, -K' \leq v \leq K', 0 \leq \psi < 2\pi, K' = K(k'^2), k' = \sqrt{1 - k^2}, \Gamma = 1 - \text{cn}^2\mu \text{cn}^2v + (1 - \text{dn}^2\mu \text{sn}^2v) / k + (2\text{cn}\mu \text{dn}\mu \text{sn}v \text{cn}v / \sqrt{k}), K$ 为第一类完全椭圆积分, k 和 k' 分别为第一类完全椭圆积分的模和补模 ($|k| < 1$), $\text{sn}\mu, \text{cn}\mu$ 和 $\text{dn}\mu$ 分别为 Jacobi 椭圆函数。本文把有序三元组 (μ, v, ψ) 叫做空间点 P 的 Cap-cyclide 坐标。

2.2 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$

在 Cap-cyclide 坐标中, 对 Laplace 方程 $\nabla^2 V = 0$, 基于变量分离法, 可得常微分方程为

$$\frac{d^2 N(v)}{dv^2} - \frac{k'^2 \text{sn}v \text{cn}v}{\text{dn}v} \frac{dN(v)}{dv} + [-\text{dn}^2v + \alpha + n^2 \left(\text{dn}^2v + \frac{k^2}{\text{dn}^2v} \right)] N(v) = 0 \quad (2)$$

称式(2)的解 $N_m^n(v)$ 为 Wangerin 函数^[4], 解析式为

$$N_m^n(v) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C_j (1 - \text{dn}^2v)^j \quad (3)$$

式中 m 和 n 分别为环状表面的弯曲度, $C_0 = 1$,

$$C_j = \frac{1}{j \left(\frac{1}{2} - j \right)} \sum_{m=1}^j C_{(j-m)} f_m(j-m) \quad (j=1, \dots, \infty),$$

$$f_m(\beta) = \beta A_m + X_m + \alpha Y_m, \quad A_m = (-1)^{m+1} \left[1 + \frac{1}{2k'^{2m}} \right],$$

$$X_m = \frac{(-1)^{m+1}}{4} \left[n^2 m + \frac{n^2}{k^2} - \frac{k^2(n^2 - 1) + n^2}{k^2 k'^{2m}} \right],$$

$$Y_m = (-1)^{m+1} \frac{k'^{2m} - 1}{4k^2 k'^{2m}}, \text{其余符号同式(1), 下同。}$$

收稿日期: 2010-06-08; 修改稿收到日期: 2010-12-15.

基金项目: 新疆农业大学校内前期(XJAU200923)资助项目.

作者简介: 黄 华* (1981-), 男, 硕士, 讲师

(E-mail: huanghua10086@yahoo.cn).

3 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值计算

在 Cap-cyclide 坐标下, Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 包含第一类完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数。为获得 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的高精度数值计算结果, 通过改进数值计算方法以提高第一类完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的数值计算精度, 从而进一步实现 Wangerin 函数的数值计算。

3.1 第一类完全椭圆积分的数值计算

第一类完全椭圆积分是在勒让德第一类椭圆积分的基础上定义的^[5]。其中勒让德第一类椭圆积分的表达式为

$$\mu(k^2, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} \quad (4)$$

当 $\varphi = \pi/2$ 时, 得第一类完全椭圆积分为

$$K(k^2) = \mu(k^2, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} \quad (5)$$

关于第一类完全椭圆积分的数值计算方法很多, 其中文献[6]利用 DE(Double Exponential Formula) 积分公式对第一类完全椭圆积分进行数值计算, 解的精度达到了 6~7 位有效数字。然而, 为了获得 Wangerin 函数的高精度数值解, 本文利用迭代法^[7,8], 首先提高第一类完全椭圆积分的计算精度, 该迭代算法的流程图如图 1 所示。

根据流程图(令 $\text{eps} = 10^{-14}$), 利用计算机编程实现第一类完全椭圆积分的数值计算, 其数值解列入表 1。为比较该迭代算法的优越性, 表中第 2 列和第 3 列分别给出了基于 DE 积分公式的计算结果和第一类完全椭圆积分对应的理论值。

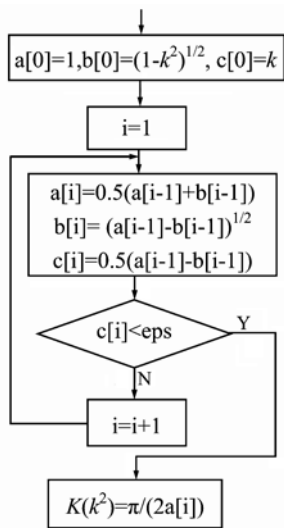


图 1 第一类完全椭圆积分迭代算法流程图
Fig. 1 The flow chart of iterative method

表 1 第一类完全椭圆积分的数值解和理论值
Tab. 1 The numerical results and theoretic values of complete elliptic integral of the first kind

k^2	迭代法	DE 积分公式	理论值
0.0	1.57079632679489	1.57079629164380	1.57079632679489
0.1	1.61244134872022	1.61244131203884	1.61244134872022
0.2	1.65962359861053	1.65962355972763	1.65962359861053
0.3	1.71388944817879	1.71388940659452	1.71388944817879
0.4	1.77751937149125	1.77751932662720	1.77751937149125
0.5	1.85407467730137	1.85407462881582	1.85407467730137
0.6	1.94956774980603	1.94956769686128	1.94956774980603
0.7	2.07536313529247	2.07536306832756	2.07536313529247
0.8	2.25720532682085	2.25720523490900	2.25720532682085
0.9	2.57809211334817	2.57809209225525	2.57809211334817
0.92	2.68355140631523	2.68355115184957	2.68355140631523
0.94	2.82075249675587	2.82075181583637	2.82075249675587
0.96	3.01611249247765	3.01611254333101	3.01611249247765
0.98	3.35414144569916	3.35414211899544	3.35414144569916
0.99	3.69563736298987	3.69562978412724	3.69563736298987

由表 1 可知, 利用迭代算法得到的数值解相比于 DE 积分公式, 计算精度得到了明显提高, 并且与第一类完全椭圆积分的理论值基本一致。从计算的效率比较, 该迭代法经过 100 次迭代则满足精度要求, 而 DE 积分公式为无穷积分形式, 其计算效率明显不如该迭代算法。至此, 第一类完全椭圆积分的高精度数值解为进一步计算 Jacobi 椭圆函数和 Wangerin 函数奠定了基础。

3.2 Jacobi 椭圆函数的数值计算

Jacobi 椭圆函数是定义在勒让德第一类椭圆积分的基础上^[5]。关于 Jacobi 椭圆函数的数值计算, 一方面, 利用 Jacobi 椭圆函数的泰勒展开式进行近似计算^[9], 但计算的误差较大; 另一方面, 利用泰勒展开式, 基于精细积分算法^[10,11]进行数值计算, 计算精度得到了一定的提高。而本文在不作任何近似展开的情况下, 利用 Jacobi 椭圆函数的恒等式进行数值计算。当模 $k \neq 0$ 时, Jacobi 椭圆函数的三个恒等式为

$$\text{sn}(\mu) = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi\mu}{2K} \right]}{1 - q^{2n+1}} \quad (6)$$

$$\text{cn}(\mu) = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi\mu}{2K} \right]}{1 + q^{2n+1}} \quad (7)$$

$$\text{dn}(\mu) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos \left[\frac{n\mu\pi}{K} \right]}{1 + q^{2n}} \quad (8)$$

式中 $q = e^{-\pi K'/K}$ 。特别地, 当 $k = 0$ 时, Jacobi 椭圆函数蜕化为

$$\text{sn}\mu|_{k=0} = \sin\mu, \text{cn}\mu|_{k=0} = \cos\mu, \text{dn}\mu|_{k=0} \equiv 1 \quad (9)$$

由于 Jacobi 椭圆函数的三个恒等式为无穷级数形式,从计算精度和计算复杂度两方面综合考虑,通过试算本文取级数的前 30 项,利用式(6~9)编程实现 Jacobi 椭圆函数的数值计算,下面从两个方面对数值结果进行误差分析。

3.2.1 特殊点验算

令 $\mu = K(k^2)$, Jacobi 椭圆函数的特殊点表达式为

$$\operatorname{sn}\mu = 1, \operatorname{cn}\mu = 0, \operatorname{dn}\mu = k' \quad (10)$$

当 k^2 取区间(0,1)中不同的值,令 $\mu = k(k^2)$ 分别计算 $\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ 和 $\operatorname{dn}\mu$, 结果见表 2。利用式(10)进行验算得知, Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{sn}\mu$ 和 $\operatorname{cn}\mu$ 的值等于精确值, $\operatorname{dn}\mu$ 数值解的有效数字达到了 14 位以上。

表 2 k^2 取不同值, Jacobi 椭圆函数

$\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ 和 $\operatorname{dn}\mu$ 的数值解($\mu = K(k^2)$)

Tab. 2 The numerical results of Jacobi elliptic functions $\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ and $\operatorname{dn}\mu$ when k^2 takes different values

k^2	$\operatorname{sn}K(k^2)$	$\operatorname{cn}K(k^2)$	$\operatorname{dn}K(k^2)$
0.1	1	0	0.948683298050514
0.3	1	0	0.836660026534075
0.5	1	0	0.707106781186547
0.7	1	0	0.547722557505165
0.9	1	0	0.316227766016834

3.2.2 恒等式验算

Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ 和 $\operatorname{dn}\mu$ 具有如下恒等式为

$$\operatorname{sn}^2\mu + \operatorname{cn}^2\mu = 1, k^2\operatorname{sn}^2\mu + \operatorname{dn}^2\mu = 1 \quad (11)$$

例如,取 $k^2 = 0.1, \mu$ 取不同值时, Jacobi 椭圆函数的数值解列入表 3。利用式(11)验算,其相对误差均小于 10^{-15} , 说明该方法的有效性。这为下一步计算 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值解建立了基础。

表 3 $k^2 = 0.1$ 时, Jacobi 椭圆函数

$\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ 和 $\operatorname{dn}\mu$ 的数值解

Tab. 3 The numerical results of Jacobi elliptic functions $\operatorname{sn}\mu, \operatorname{cn}\mu$ and $\operatorname{dn}\mu$ when $k^2 = 0.1$

μ	$\operatorname{sn}\mu$	$\operatorname{cn}\mu$	$\operatorname{dn}\mu$
0.1	0.099816867185991	0.995005825623737	0.999501705502556
0.2	0.198539719995694	0.980092842328742	0.998027152916394
0.3	0.295098124304370	0.955466952349501	0.995636334061390
0.4	0.388467294050245	0.921462512234372	0.992425975146423
0.5	0.477687300072390	0.878529933098213	0.988524903244706
0.6	0.561878379595889	0.827219853813179	0.984088039076926
0.7	0.640251706645456	0.768165185450096	0.979289423619881
0.8	0.712115422551563	0.702062408169109	0.974314714297398
0.9	0.776876146860919	0.629653438359969	0.969353570810905
1.0	0.834036546189630	0.551709198418944	0.964592299348283

3.3 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值计算

为决定式(3)中的参数 α , 在区间 $[-K', K']$ 上对其进行 Fourier 级数展开, 得

$$N_m^n(v) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{im\pi v/K'} \quad (12)$$

式中 $a_m = \frac{1}{2K'} \int_{-K'}^{K'} N_m^n(v) e^{im\pi v/K'} dv$

将式(12)代入式(3), 可以证明 α 是式(13)中矩阵 F 的特征值^[4]。

$$(F - \alpha I) \alpha = 0 \quad (13)$$

式中 $F_{mp} = \frac{1}{K'} \int_0^{K'} \left[U_m \cos\left(\frac{(m-p)\pi mv}{K'}\right) - V_m \sin\left(\frac{(m-p)\pi mv}{K'}\right) \right] dv$

$$U_m = \left(\frac{m\pi}{K'}\right)^2 + \operatorname{dn}^2 v - n^2 \left(\operatorname{dn}^2 v + \frac{k^2}{\operatorname{dn}^2 v}\right)$$

$$V_m = \frac{m\pi k'^2 \operatorname{sn}v \operatorname{cn}v}{K' \operatorname{dn}v}$$

综上可知, 在区间 $[-K', K']$ 上, Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 是特征值函数。因此, 可分为两个步骤实现 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值计算。

3.3.1 矩阵 F 的特征值计算

为便于讨论 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的收敛性和稳定性, 本文取 m 为 0~8 的整数, 并令 $p = m$, 则矩阵 F 为 9 阶方阵。根据式(13)利用计算机编程, 计算 k^2 取 0.1, 0.2, ..., 0.9 时矩阵 F 的特征值, 限于篇幅, 仅列出部分结果见表 4。

3.3.2 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值解

将表 4 中矩阵 F 的特征值分别代入式(3), 实现对 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的数值计算, 计算出对应的数值解。例如, 取 $k^2 = 0.1$, 环状表面的弯曲度 $m = 0, 1, \dots, 8$, (n 取固定值 1) 时, 取区间 $[-K', K']$ 上的 721 个等分点, 计算得 Wangerin 函数 $N_m^n(v)$ 的

表 4 $k^2 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ 时, 矩阵 F 的特征值

Tab. 4 The eigenvalues of F when

$$k^2 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

$k^2 = 0.1$	$k^2 = 0.2$...	$k^2 = 0.9$
-0.40113519683899	-0.50360938808403	...	-0.94917702738784
1.11817280714608	1.45431992882768	...	2.84703734836120
5.57275463156720	7.26563005398961	...	14.2351865143361
12.9968114683001	16.9510775146309	...	33.2154351220659
23.3910966637519	30.5109020630665	...	59.7877831803828
36.7553108819374	47.9450048592368	...	93.9522306855400
53.0891855472818	69.2533349093184	...	135.708777636844
72.4005494461865	94.4382260045577	...	185.057424114615
94.1440964687879	123.159671376306	...	241.995371566203

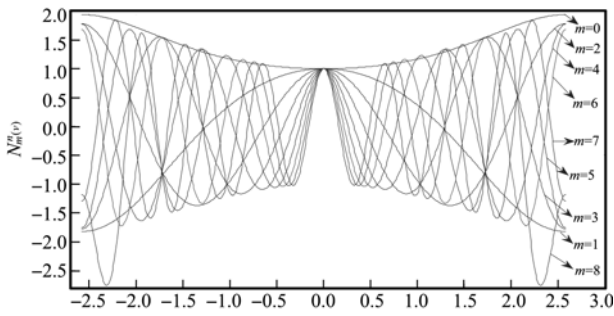


图2 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 的曲线图($k^2 = 0.1, n = 1$)

Fig.2 Graph of Wangerin function $N_m^n(\nu)$ ($k^2 = 0.1, n = 1$)

数值解,部分结果见表5。利用表5中 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 的数值解,基于数值可视化处理得 Wangerin 函数的曲线图,如图2所示。

表5 $k^2 = 0.1, n = 1$ 时, Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 的数值解

Tab.5 The numerical results of Wangerin function $N_m^n(\nu)$ when $k^2 = 0.1, n = 1$

$m = 0$	$m = 1$...	$m = 8$
1.9383055928496	-1.8239618261001	...	-1.1816128401699
1.9382637010018	-1.8238815366164	...	-1.1842629488220
1.9381380462371	-1.8236406715037	...	-1.1921965971652
1.9379286908555	-1.8232392408126	...	-1.2053638404419
...
1.0	1.0	...	1.0
1.0000077219358	0.99996876279773	...	0.99758429196462
1.0000308883376	0.99987505002206	...	0.99034861618387
1.0000695009940	0.99971885816754	...	0.97832726449150
...
1.9249105699861	-1.7979804224355	...	-1.9027685027273
1.9323085379611	-1.8124061550626	...	-1.5353065479722
1.9367996640734	-1.8210717592372	...	-1.2752754430354
1.9383055928496	-1.8239618261001	...	-1.1816128401699

4 结 论

本文通过改进第一类完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的数值计算方法,得到较高精度的数值解。在此基础上,结合 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 是特征值函数等特性,利用计算机编程实现 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 的数值计算,并通过数值的可视化处理,获得 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 的曲线图。如图2所示, Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 是偶函数,而且曲线呈发散趋势,例如 $m = 8$ 时,曲线极不稳定,此时势必影响核聚变实验中等离子体的稳定性。因此,下一步的研究重点是在 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 数值计算的基础上,进一步探讨 Wangerin 函数 $N_m^n(\nu)$ 收敛性和稳定性问题。

参考文献 (References) :

[1] 恰汗·合孜尔,单洪森,金晓龙,等. 基于 Cap-cyclide 坐标的非圆截面等离子体的稳定性研究[J]. 新疆农业大学学报, 2005, **28**(2): 59-62. (Qiahan · Hezier, SHAN Hong-shen, JIN Xiao-long, et al. Research on the stability of non-circular toroidal plasma based on Cap-cyclide coordinates[J]. *Journal of Xinjiang Agricultural University*, 2005, **28**(2): 59-62. (in Chinese))

[2] 恰汗·合孜尔,冯波. 位于导体壁中的非圆截面等离子体的伸长对等离子体稳定性的影响[J]. 新疆农业大学学报, 2006, **29**(4): 66-69. (Qiahan · Hezier, FENG Bo. The influence of elongation of non-circular toroidal plasma in wall on the stability of plasma[J]. *Journal of Xinjiang Agricultural University*, 2006, **29**(4): 66-69. (in Chinese))

[3] 恰汗·合孜尔. 导体壁对非圆截面等离子体稳定性影响的研究[J]. 核聚变与等离子体物理, 2007, **27**(3): 182-187. (Qiahan · Hezier. Research of influence of wall on the stability of non-circular toroidal plasma [J]. *Nuclear Fusion and Plasma Physics*, 2007, **27**(3): 182-187. (in Chinese))

[4] Moon P, Spencer D E. *Field Theory for Engineers* [M]. Princeton, N. J., D. Van Nostrand Co, 1960.

[5] William H, Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling et al. *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing* [M]. New York: Cambridge University Pres, 2007.

[6] 单洪森,恰汗·合孜尔. Cap-cyclide 坐标中 Jacobi 第一种完全椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的数值计算[J]. 新疆师范大学学报, 2005, **24**(2): 28-31. (SHAN Hong-sen, Qiahan · Hezier. Numerical calculation of the first jacobi entire oval integral of jacobi oval function in cap-cyclide coordinate [J]. *Journal of Xinjiang Normal University*, 2005, **24**(2): 28-31. (in Chinese))

[7] Milton A bramowitz, Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graph S, and Mathematical Tables* [M]. Washington D. C. : National Bureau of Standards, 1996: 569-618.

[8] 孙雁,钟万颢. 二维边界层方程的迭代求解[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(3): 385-390. (SUN Yan, ZHONG Wan-xie. Iterative solution for two-dimensional boundary layer equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(3): 385-390. (in Chinese))

- [9] Alois Schett, Properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions[J]. *Math. Comp.*, 1976, **30**:143-147.
- [10] 姚 征, 钟万勰. 椭圆函数的精细积分改进算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2008, **29**(4): 251-260. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. The improved precise integration method for elliptic functions[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2008, **29**(4): 251-260. (in Chinese))
- [11] 李永强, 王 薇, 刘 杰, 等. 含高阶余项的非线性动力系统数值计算法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(5): 555-559. (LI Yong-qiang, WANG Wei, LIU Jie, et al. A high -precision numerical method for non-linear dynamic systems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(5): 555-559. (in Chinese))

The high precision numerical calculation of Wangerin function $N_m^n(v)$ based on Cap-cyclide coordinates

HUANG Hua^{*}, Qihan • Hezier, SONG Yan-ping, Nurgul • Eli

(School of Mathematics & Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China)

Abstract: In Cap-cyclide coordinates, the Wangerin function $N_m^n(v)$, which is eigenvalue function, includes complete elliptic integral of the first kind and Jacobi elliptic functions. To get the high precision numerical solutions of Wangerin function $N_m^n(v)$, firstly, the iterative method is applied to take numerical calculation in complete elliptic integral of the first kind. The numerical results are as accurate as theoretic values. Secondly, we carry on numerical calculation with the identical equations of Jacobi elliptic functions, and the number of numerical solutions' significant digits is up to 14. Then, based on these results, we procure the high precision numerical solutions of Wangerin function $N_m^n(v)$ upon these two steps. The result provides the theoretical basis for further research on convergence and stability of Wangerin function $N_m^n(v)$, and shows that it is very useful to practical engineering.

Key words: numerical calculation; Cap-cyclide coordinates; Wangerin function; complete elliptic integral of the first kind; Jacobi elliptic functions