

# 宽翼缘梁温差自应力级数解

张元海<sup>\*1</sup>, 李乔<sup>2</sup>, 蔺鹏臻<sup>1</sup>

(1. 兰州交通大学 土木工程学院, 兰州 730070; 2. 西南交通大学 土木工程学院, 成都 610031)

**摘要:**为了充分反映宽翼缘梁的温差自应力分布特点,克服按梁理论计算温差自应力时的不足,本文从弹性力学的分析方法入手,按平面应力状态分析翼缘板和腹板的温差应力。根据翼缘板与腹板连接处的变形协调及平衡条件建立补充方程,求解艾瑞应力函数中的积分常数,导出翼缘板与腹板的温差应力及位移的解析式。对一宽翼缘 T 梁的计算表明,当翼缘板相对于腹板发生温差变化时,沿其宽度的纵向温差自应力分布很不均匀,在翼缘板根部较大而在悬臂端则显著减小,按通常基于梁理论的计算方法,无法反映这种应力分布规律。

**关键词:**宽翼缘梁;温差自应力;级数解;平面应力问题;艾瑞应力函数

**中图分类号:**U441.5 **文献标志码:**A

## 1 引言

宽翼缘梁在土木工程结构中被广泛应用。在翼缘板和腹板的相对温差作用下,梁内会产生数值较大的温差应力,这是导致混凝土梁开裂的主要原因之一。无论在超静定梁还是静定梁内,上述温差作用都会产生自应力。目前,对于梁的温差自应力计算,主要采用基于平截面假定的梁理论分析方法<sup>[1-5]</sup>,这对于一般可作为杆系结构分析的窄梁是可行的,但对于跨宽比较小的宽翼缘梁,由于截面变形不再符合平截面假定,这种分析方法就不再适用。文献[6]按平面应力问题的级数解法分析矩形截面简支梁的日照温度应力,文献[7]按平面应变问题分析梁的横向温差自应力。本文的目的在于寻求一种适合于分析宽翼缘梁温差自应力的解析方法。

## 2 变形协调及平衡条件

宽翼缘 T 梁横截面如图 1(a)所示,结构简图及坐标系如图 1(b)所示。图中, $h$  为梁高, $b_1$  为翼缘板全宽, $t_f$  和  $t_w$  分别为翼缘板和腹板的厚度, $b$  为翼缘板单侧外伸长度, $l$  为梁长。假设翼缘板发生均匀温度变化  $\Delta T$ ,腹板无温度变化,不计其他外荷载作用,并认为翼缘板和腹板均处于平面应力状态。

翼缘板在温度变化  $\Delta T$  的作用下,当不考虑来自腹板的约束时,沿  $x$  轴任意位置处的纵向自由温度位移分量为  $u_{Tf}$ ,但实际上由于受到腹板的约束,翼缘板的这种变位并不能自由发生,于是就在翼缘板和腹板内产生了温度自约束应力(自应力),这种约束应力又将由于结构的弹性而引起位移。因此,翼缘板在其根部(与腹板交接处)沿  $x$  轴任意位置处总的纵向位移分量应为  $u_f|_{z=0} + u_{Tf}$ ,其中  $u_f|_{z=0}$  即为由于温度变化作用引起的翼缘板根部沿  $x$  轴的纵向约束位移分量。对于腹板,因无温度变化,故腹板顶部(与翼缘板交接处)沿  $x$  轴的纵向位移分量仅为约束位移分量部分,即为  $u_w|_{y=0}$ 。由于翼缘板与腹板在沿  $x$  轴位置整体相连,故应有下面的变形协调条件:

$$u_f|_{z=0} + u_{Tf} = u_w|_{y=0} \quad (1)$$

从梁内截出翼缘板与腹板连接处的棱柱体,在其左、右截面上作用有来自翼缘板的剪应力,在棱柱体的下部截面上作用有来自腹板的剪应力。分析单位长度棱柱体的纵向平衡,则有平衡条件:

$$2t_f \cdot \tau_{zxf}|_{z=0} = -t_w \cdot \tau_{y,w}|_{y=0} \quad (2)$$

式中  $\tau_{zxf}|_{z=0}$  为  $xoz$  平面内的单侧翼缘板根部剪应力, $\tau_{y,w}|_{y=0}$  为  $xoy$  平面内的腹板顶部剪应力。

## 3 温差自应力和位移分量的求解

首先分析翼缘板的温差自应力及位移分量。位于  $xoz$  平面内的单侧翼缘板,其艾瑞应力函数  $\Psi_f$  可设为

收稿日期:2009-04-09;修改稿收到日期:2009-11-13.

基金项目:甘肃省自然科学基金(3ZS042-B25-032);甘肃省高等学校研究生导师科研(0804-09)资助项目.

作者简介:张元海\*(1965-),男,博士,教授  
(E-mail: zyhl7012@163.com).

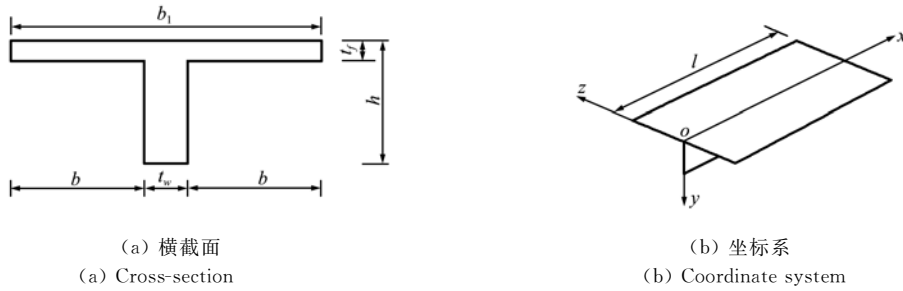


图1 宽翼缘梁简图  
Fig. 1 Sketch of wide-flange beam

$$\Psi_f = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sin \alpha_m x \cdot (A_m \operatorname{sh} \alpha_m z + B_m \operatorname{ch} \alpha_m z + C_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + D_m z \operatorname{ch} \alpha_m z) \quad (3)$$

式中  $A_m, B_m, C_m$  和  $D_m$  为由边界条件决定的常数,  $\alpha_m = m\pi/l$  ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ),  $m$  之所以取奇数, 是由翼缘板纵向位移的对称性条件决定的。

容易验证, 上述应力函数满足平面应力问题的相容方程  $\nabla^4 \Psi_f = 0$ , 从而可求得各应力分量为<sup>[8]</sup>

$$\sigma_{xf} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \cdot \left[ \left( A_m + \frac{2D_m}{\alpha_m} \right) \operatorname{sh} \alpha_m z + \left( B_m + \frac{2C_m}{\alpha_m} \right) \operatorname{ch} \alpha_m z + C_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + D_m z \operatorname{ch} \alpha_m z \right] \quad (4)$$

$$\sigma_{zf} = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \cdot (A_m \operatorname{sh} \alpha_m z + B_m \operatorname{ch} \alpha_m z + C_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + D_m z \operatorname{ch} \alpha_m z) \quad (5)$$

$$\tau_{zxf} = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m x \cdot \left[ \left( B_m + \frac{C_m}{\alpha_m} \right) \operatorname{sh} \alpha_m z + \left( A_m + \frac{D_m}{\alpha_m} \right) \operatorname{ch} \alpha_m z + D_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + C_m z \operatorname{ch} \alpha_m z \right] \quad (6)$$

在式(4,5)基础上, 通过物理方程和几何方程, 可求得翼缘板的纵、横向位移分量为

$$u_f = - \frac{1}{E} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \alpha_m \cos \alpha_m x \cdot \left\{ \left[ (1 + \mu) A_m + \frac{2D_m}{\alpha_m} \right] \operatorname{sh} \alpha_m z + \left[ (1 + \mu) B_m + \frac{2C_m}{\alpha_m} \right] \operatorname{ch} \alpha_m z + (1 + \mu) C_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + (1 + \mu) D_m z \operatorname{ch} \alpha_m z \right\} \quad (7)$$

$$w_f = - \frac{1}{E} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sin \alpha_m x \cdot \left\{ \left[ (1 + \mu) \alpha_m A_m + 2\mu D_m \right] \operatorname{ch} \alpha_m z + \left[ (1 + \mu) \alpha_m B_m + 2\mu C_m \right] \operatorname{sh} \alpha_m z + C_m (1 + \mu) (\alpha_m z \operatorname{ch} \alpha_m z - \operatorname{sh} \alpha_m z) + D_m (1 + \mu) (\alpha_m z \operatorname{sh} \alpha_m z - \operatorname{ch} \alpha_m z) \right\} \quad (8)$$

由位移边界条件:  $z = 0$  时,  $w_f = 0$ , 可求得

$$A_m = \lambda D_m / \alpha_m$$

式中

$$\lambda = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \quad (9)$$

由应力边界条件:  $z = b$  时,  $\sigma_{zf} = 0, \tau_{zxf} = 0$ , 可求得

$$B_m = - \frac{\kappa_m}{\alpha_m} D_m, \quad C_m = - \rho_m D_m$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \kappa_m &= \frac{(\alpha_m b)^2 + \lambda \operatorname{sh}^2 \alpha_m b}{\alpha_m b + \operatorname{sh} \alpha_m b \operatorname{ch} \alpha_m b} \\ \rho_m &= \frac{\lambda + \operatorname{ch}^2 \alpha_m b}{\alpha_m b + \operatorname{sh} \alpha_m b \operatorname{ch} \alpha_m b} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将  $A_m, B_m$  和  $C_m$  代入式(4~6), 可得翼缘板各应力分量为

$$\sigma_{xf} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \cdot \left( \frac{\lambda + 2}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m z - \frac{\kappa_m + 2\rho_m}{\alpha_m} \operatorname{ch} \alpha_m z - \rho_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + z \operatorname{ch} \alpha_m z \right) \quad (11)$$

$$\sigma_{zf} = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \cdot \left( \frac{\lambda}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m z - \frac{\kappa_m}{\alpha_m} \operatorname{ch} \alpha_m z - \rho_m z \operatorname{sh} \alpha_m z + z \operatorname{ch} \alpha_m z \right) \quad (12)$$

$$\tau_{zxf} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \alpha_m^2 \cos \alpha_m x \cdot \left( \frac{\kappa_m + \rho_m}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m z - \frac{\lambda + 1}{\alpha_m} \operatorname{ch} \alpha_m z - z \operatorname{sh} \alpha_m z + \rho_m z \operatorname{ch} \alpha_m z \right) \quad (13)$$

根据结构纵向位移对称性条件, 应有  $x = l/2$  时,  $u_f = 0$ , 则由式(7)可知  $\cos m\pi/2 = 0$ , 可见,  $m$  只能取奇数。

由式(7,13)可知,

$$u_f \Big|_{x=l/2} = \frac{1}{E} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \cos \alpha_m x \cdot \left[ (1 + \mu) \kappa_m + 2\rho_m \right] \quad (14)$$

$$\tau_{zxf} \Big|_{x=l/2} = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (\lambda + 1) D_m \alpha_m \cos \alpha_m x \quad (15)$$

对于  $xoy$  平面内的腹板,其应力和位移分量表达式也可同理导出,从而可得

$$\tau_{y,xw} |_{y=0} = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \alpha_m C'_m \cos \alpha_m x \cdot (\eta_m - \xi_m) \quad (16)$$

$$u_w |_{y=0} = - \frac{2}{E} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} C'_m \cos \alpha_m x \quad (17)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= \frac{(\alpha_m h)^2}{\alpha_m h - \operatorname{sh} \alpha_m h \operatorname{ch} \alpha_m h} \\ \eta_m &= \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_m h)}{\alpha_m h - \operatorname{sh} \alpha_m h \operatorname{ch} \alpha_m h} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(15,16)代入平衡方程(2),可求得

$$C'_m = - D_m \cdot \frac{2t_f}{t_w} \cdot \frac{1 + \lambda}{\eta_m - \xi_m} \quad (19)$$

不受腹板约束时,翼缘板的纵向自由温度应变为  $\epsilon_{Tf} = \alpha \cdot \Delta T$ ,其中  $\alpha$  为材料线膨胀系数。对  $x$  积分得,  $u_{Tf} = \alpha \cdot \Delta T \cdot x + C_T$ ,由  $x = l/2$  时,  $u_{Tf} = 0$  的条件知,  $C_T = - \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta T \cdot l$ ,则

$$u_{Tf} = \alpha \cdot \Delta T \cdot (x - \frac{l}{2}) \quad (20)$$

对上述位移函数  $u_{Tf}$  进行偶延拓后,展为傅立叶级数,可得

$$u_{Tf} = - \frac{4\alpha \cdot \Delta T}{l} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \cos \alpha_m x \quad (21)$$

将式(14,17,21)代入协调方程(1),并注意  $C'_m$  与  $D_m$  的关系式(19),可解得

$$D_m = \frac{\frac{E \cdot \alpha \cdot \Delta T}{\alpha_m^2 l}}{\frac{1 + \mu}{4} \kappa_m + \frac{\rho_m}{2} - \frac{t_f}{t_w} \cdot \frac{1 + \lambda}{\eta_m - \xi_m}} \quad (22)$$

常数  $D_m$  和  $C'_m$  确定后,翼缘板和腹板的全部应力和位移分量即可求得。

### 4 数值算例

选取文献[9]中的宽翼缘 T 梁进行分析。梁长  $l = 6.4 \text{ m}$ ,梁高  $h = 1 \text{ m}$ ,腹板厚度  $t_w = 0.15 \text{ m}$ ,翼缘板厚度  $t_f = 0.11 \text{ m}$ ,翼缘板全宽  $b_1 = 4.85 \text{ m}$ ,单侧外伸长度  $b = 2.35 \text{ m}$ 。翼缘板和腹板的材料弹性模量均为  $3.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,泊松比为 0.167,材料线膨胀系数  $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ 。分析翼缘板发生均匀温度变化  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  时的温差应力。

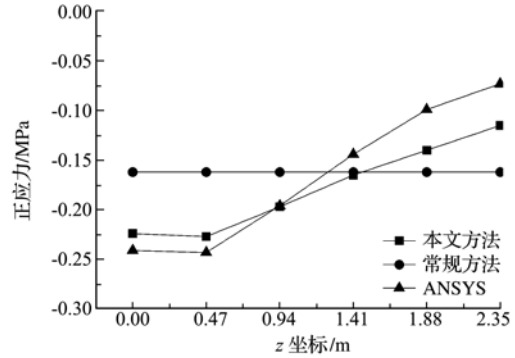


图 2 跨中截面翼缘板正应力分布图  
Fig. 2 Normal stress distribution of flange plate at mid-span section

首先按本文方法和常规方法对跨中截面翼缘板 6 个点处(单侧)的纵向正应力进行计算,为了验证本文方法和公式的正确性,再用结构有限元分析软件 ANSYS 中的板壳单元计算 6 个点处的正应力。按上述 3 种方法的计算结果一并绘于图 2 中,图中横坐标  $z$  的原点参见图 1(b),负值应力表示压应力。可以看出,按本文方法计算的翼缘板应力与 ANSYS 有限元结果吻合良好,而按常规方法计算的翼缘板应力严重失真。按常规方法求得的翼缘板正应力沿其宽度数值不变,而真实的翼缘板应力沿其宽度有很大变化,在翼缘板根部附近有数值较大的压应力,但在翼缘板悬臂端的压应力则大大减小,用常规计算方法无法反映翼缘板的这种应力分布。值得指出的是,按本文方法计算的跨中截面翼缘板各点压应力的平均值为  $\bar{\sigma} = -0.181 \text{ MPa}$ ,这恰与按常规方法求得的常值压应力  $\sigma_0 = -0.162 \text{ MPa}$  较接近。

按本文方法计算时,对翼缘板和腹板的大部分计算点,应力级数收敛很快,取级数的前 4 项已有很好的精度,只是在翼缘板与腹板相连附近的计算点处,级数收敛性稍差些,实际计算这些点处的应力时,可适当多取几项。本算例中,所有各点的应力都统一取用级数的前 16 项,并通过编写的程序段进行计算。

按三种方法计算的跨中截面腹板正应力都很接近,基本上呈同一条直线,这表明腹板的变形是符合平截面假定的。按本文方法和常规方法计算的跨中截面腹板应力分布如图 3 所示。当腹板高度较大时,其正应力分布仍与直线分布偏离较大,此时,常规方法就不能反映其实际应力分布情况。

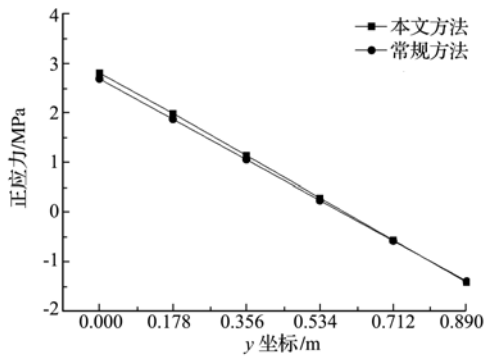


图3 跨中截面腹板正应力分布图

Fig. 3 Normal stress distribution of web plate at mid-span section

图4给出了按本文方法和常规方法计算的四分之一跨截面翼缘板的正应力分布。值得指出的是,按常规分析方法得到的各横截面上正应力都是相同的,即应力不随跨度而变,这与实际应力分布不相符,本文方法能够客观反映温差应力随跨度的变化情况。

随着翼缘板宽度的减小,其正应力分布应趋于均匀。为了证实这种变化,将翼缘板外伸长度以0.4 m的级差由2.35 m减小至0.35 m,分别计算了每一外伸长度时跨中截面翼缘板的悬臂端和根部的正应力,计算结果正确显示了预期的分布规律,这也进一步验证了本文分析方法的正确性。

## 5 结论

本文基于弹性力学原理,将翼缘板和腹板按处于平面应力状态进行分析,提出了一种计算宽翼缘梁温差自应力的级数解法。通过建立翼缘板与腹板连接处的变形协调条件及平衡条件,求解艾瑞应力函数中的积分常数,推导了宽翼缘T梁温差自应力的解析式,其正确性得到ANSYS有限元软件的验证。所推导的公式可全面反映翼缘板应力的不均匀分布特点,克服了按梁理论计算温差应力时的不足。本文方法为进一步研究宽翼缘箱梁特别是城市高架桥上应用较多的所谓展翅梁的温差应力奠定了基础。

## 参考文献(References):

[1] 刘兴法. 预应力箱梁温度应力计算方法[J]. 土木工程学报, 1986, **19**(1): 31-42. (LIU Xing-fa. Computation of temperature stresses for prestressed concrete box girders[J]. *China Civil Engineering Journal*, 1986, **19**(1): 31-42. (in Chinese))

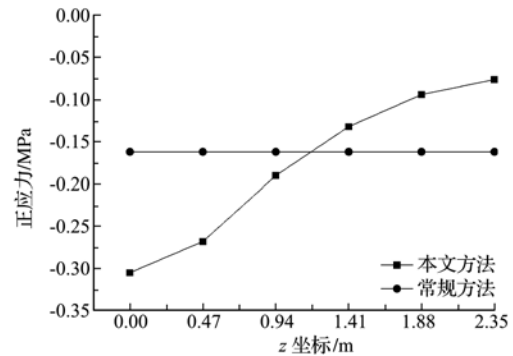


图4 四分之一跨截面翼缘板正应力分布图

Fig. 4 Normal stress distribution of flange plate at quarter-span section

- [2] Mirambell E, Aguado A. Temperature and stress distributions in concrete box girder bridges[J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1990, **116**(9): 2388-2409.
- [3] Barr P J, Stanton J F, Eberhard M O. Effects of temperature variations on precast, prestressed concrete bridge girders[J]. *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, 2005, **10**(2): 186-194.
- [4] 郑海荣. 预应力混凝土空心板梁的温度应力分析[J]. 力学与实践, 1999, **21**(3): 34-37. (ZHENG Hai-rong. The temperature stress analysis of the prestressed concrete hollow beam[J]. *Mechanics in Engineering*, 1999, **21**(3): 34-37. (in Chinese))
- [5] 张元海, 李乔. 预应力混凝土连续箱梁桥温度应力分析[J]. 土木工程学报, 2006, **39**(3): 98-102. (ZHANG Yuan-hai, LI Qiao. Analysis of thermal stress for prestressed concrete continuous box-girder bridges[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2006, **39**(3): 98-102. (in Chinese))
- [6] 陈玉骥. 静定混凝土梁在日照温度作用下应力的级数解[J]. 长沙大学学报, 2003, **17**(2): 45-47. (CHEN Yu-ji. Progression solutions of temperature stresses in static concrete beams[J]. *Journal of Changsha University*, 2003, **17**(2): 45-47. (in Chinese))
- [7] 彭友松, 强士中. 混凝土桥梁结构温度自应力计算方法探讨[J]. 西南交通大学学报, 2006, **41**(4): 452-455. (PENG You-song, QIANG Shi-zhong. Investigations into computational method of self-equilibrating thermal stresses in concrete bridges[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2006, **41**(4): 452-455. (in Chinese))
- [8] 徐芝纶. 弹性力学(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982. (XU Zhi-lun. *Mechanics of Elasticity* (2ed)

- [M]. Beijing: Higher Education Press, 1982. (in Chinese))
- [9] 程翔云. 梁桥理论与计算[M]. 北京:人民交通出版社, 1990. (CHENG Xiang-yun. *Beam Bridge Theory and Calculation*[M]. Beijing: China Communications Press, 1990. (in Chinese))

## Series solution of temperature difference self-stress in wide-flange beams

ZHANG Yuan-hai<sup>\*1</sup>, LI Qiao<sup>2</sup>, LIN Peng-zhen<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In order to reveal fully the distribution of the temperature difference self-stress in wide-flange beams and improve the conventional beam-based analysis method, a refined analytical method is presented which is based on the mechanics of elasticity. The flange and web plates are considered to be in a state of plane stress under temperature difference. The condition of the deformation compatibility and equilibrium at the connection of the flange and web plates is used to establish additional equations by which the constants of integration in the Airy stress function are evaluated. The analytical expressions of the temperature difference stress and displacement in the flange and web plates are derived. Numerical results of a wide-flange T-shape beam show that, the longitudinal self-stress in the flange plate under temperature difference to web plate is distributed very non-uniformly along its width. Greater stress occurs near the fixed edge while much smaller stress at the free edge in the flange plate. This distribution characteristic of the temperature difference self-stress can't be reflected by the conventional analytical method based on the beam theory.

**Key words:** wide-flange beam; temperature difference self-stress; series solution; plane stress problem; Airy stress function