

# 弹性地基上 Timoshenko 梁的精确数值解

高兴军, 马海涛\*, 陈太聪

(华南理工大学 土木工程系 亚热带建筑国家重点实验室, 广州 510640)

**摘要:**研究了弹性地基上 Timoshenko 梁的高精度有限元分析方法,利用控制微分方程的基本解建立了单元形函数,提出了弹性地基上 Timoshenko 梁分析的 Trefftz 单元。通过对引入的非节点自由度进行静力凝聚,得到的精确单元与常规单元具有相同的节点自由度。文中还讨论了有效降低计算过程中舍入误差的方法。算例结果表明,采用提出的新单元,只需使用极少的单元即可获得数值精确解。

**关键词:**弹性地基; Timoshenko 梁; Trefftz 单元; 精确数值解

**中图分类号:** O343      **文献标志码:** A

## 1 引言

弹性地基梁在实际工程中有着广泛的应用。许多学者采用 Euler-Bernoulli 梁理论和 Timoshenko 梁理论研究了梁的弯曲、振动和稳定性等问题。Zhou<sup>[1]</sup>获得了非均匀 Winkler 弹性地基上梁振动方程的通解, Wang 等<sup>[2]</sup>采用 Green 函数获得了弹性地基上 Timoshenko 梁的精确解, 纪多毓<sup>[3]</sup>采用广义克雷洛夫函数获得了弹性地基上 Timoshenko 梁的解析解。以上解析方法的数学推导公式较为复杂,且只适用于某些选定的特殊边界条件,不能广泛适用于实际工程。

在实际工程中,一种常用的数值解法是采用 Euler-Bernoulli 梁单元或者 Timoshenko 梁单元模拟结构,用等效节点弹簧模拟弹性地基,相关研究见文献[4-9]。这种简化处理方法仅能得到近似数值解答,为了获得较高精度的结果,需要将弹性地基梁划分为多个单元,计算代价将明显增大。

采用精确有限单元可以有效地解决无法将解析解应用于实际工程这一难题,能以较小的计算代价得到数值精确解。Tong<sup>[10]</sup>和 Kanok-Nukulchai<sup>[11]</sup>等已经给出证明,若单元的位移形函数能满足 Euler 控制方程,则无需网格细化,即可获得精确的节点

位移。

最近, Ma<sup>[12]</sup>针对弹性杆件的轴向振动分析提出了一种新型的有限单元和振型分析的精确算法。单元的位移形函数根据轴向振动微分控制方程的位移通解形式确定,由此构造得到了精确的单元刚度矩阵和质量矩阵,并提出了一种基于常规特征值解法精确计算自振频率和相应振动模态的迭代算法。由于该种单元具备明确的位移形函数、刚度矩阵及质量矩阵,且自振频率的求解基于标准的特征值求解算法,因此可以方便地在通用有限元软件中实现对自振频率和相应模态的精确求解。Ma<sup>[13]</sup>还将这一方法推广到框架结构的动力分析。陈太聪和马海涛<sup>[14]</sup>基于文献[12,13]的思想,研究了框架结构屈曲分析的精确有限单元和迭代算法。以上文献中构造得到的精确单元可看成是特殊的 Trefftz 单元<sup>[15]</sup>,因构造并采用的形函数满足对应于一定特征值的控制方程。

本文研究考虑横向剪切变形时弹性地基梁静力分析的高效率精确数值求解,提出了一个 2 节点 Trefftz 单元。首先,根据弹性地基上 Timoshenko 梁微分控制方程的位移通解构造了单元形函数,继而基于最小势能原理建立了单元刚度矩阵。采用的位移场含有一个非节点自由度,通过静力凝聚,得到了与常规单元具有相同的自由度的单元。算例表明,与常规 Timoshenko 梁单元必须将网格细分才能得到较准确结果不同,采用精确有限单元即使用很少单元仍可获得高精度解。文中还研究了舍入误差对计算结果的影响,提出了降低此影响以获得数值精确解的有效方法。

收稿日期:2010-05-13;修改稿收到日期:2010-09-06.

基金项目:华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室  
自主研究课题 2008ZA08,2008ZC21 资助项目.

作者简介:高兴军(1985-),男,博士研究生;  
马海涛\*(1962-),男,博士,教授,博士生导师  
(E-mail: maht@scut.edu.cn);  
陈太聪(1977-),男,博士,讲师.

## 2 单元构造

### 2.1 平衡控制方程组及其通解

图 1 所示为一受侧向荷载作用下 Winkler 弹性地基上的梁。采用 Timoshenko 梁理论,即考虑梁的横向剪切变形。考虑等截面梁的情况,关于横向位移和截面转角的平衡控制方程组可写为<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{k_w}{\kappa_s GA} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{k_w}{EI} w(x) = \\ \frac{1}{EI} P(x) - \frac{1}{\kappa_s GA} P'(x) \\ \theta(x) = \frac{dw}{dx} + \frac{1}{\kappa_s GA} \int [P(x) - k_w w(x)] dx \end{cases} \quad (1)$$

式中  $w(x)$  为梁截面的横向位移,  $\theta(x)$  为梁截面的转角位移,  $L$  为梁的长度,  $A$  为梁截面面积,  $\kappa_s$  为梁截面的有效横向剪切系数,  $I$  为梁截面的惯性矩,  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切模量,  $k_w$  为弹性地基模量,  $P(x)$  为梁上作用的侧向荷载。

横向剪切应变  $\gamma$  可由梁的轴线转角  $dw/dx$  和梁截面转角  $\theta$  表示为

$$\gamma = \frac{dw}{dx} - \theta \quad (2)$$

引入无量纲参数得

$$r = \frac{x}{L}, \quad v(r) = \frac{w(x)}{L} \quad (3)$$

则有

$$\frac{d^i v(r)}{dr^i} = \frac{1}{L^{i-1}} \frac{d^i w(x)}{dx^i} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

不考虑横向分布荷载的作用,即取  $P(r)=0$ ,式(1)中的方程组可写为

$$\begin{cases} \frac{d^4 v(r)}{dr^4} - \alpha \frac{d^2 v(r)}{dr^2} + \beta v(r) = 0 \\ \theta(r) = \frac{dv}{dr} - \alpha \int v(r) dr \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  为无量纲参数有

$$\alpha = \frac{k_w L^2}{\kappa_s GA}, \quad \beta = \frac{k_w L^4}{EI}$$

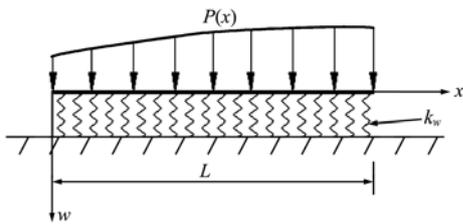


图 1 受横向荷载作用的弹性地基梁

Fig. 1 A beam on elastic foundation under lateral loads

工程上将  $\sqrt[4]{\beta/4}$  称为柔度系数,是表征 Winkler 地基梁的相对刚柔程度的一个无量纲值<sup>[16]</sup>。

式(5)中方程组的通解有三种不同形式,定义临界弹性地基模量为

$$\bar{k}_w = \frac{4(\kappa_s GA)^2}{EI}$$

则通解可表示为

(1) 当  $k_w > \bar{k}_w$  时

$$\begin{aligned} v(r) &= D_1 \sinh(\xi r) + D_2 \cosh(\xi r) + \\ &D_3 \sinh(\eta r) + D_4 \cosh(\eta r) \\ \theta(r) &= D_1 \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi}\right) \cosh(\xi r) + D_2 \left(\xi - \frac{\alpha}{\xi}\right) \sinh(\xi r) + \\ &D_3 \left(\eta - \frac{\alpha}{\eta}\right) \cosh(\eta r) + D_4 \left(\eta - \frac{\alpha}{\eta}\right) \sinh(\eta r) + D_5 \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\xi$  和  $\eta$  分别定义为

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})/2} \\ \eta &= \sqrt{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})/2} \end{aligned} \quad (7)$$

(2) 当  $k_w = \bar{k}_w$  时

$$\begin{aligned} v(r) &= D_1 \sinh(\xi r) + D_2 \cosh(\xi r) + \\ &D_3 r \sinh(\xi r) + D_4 r \cosh(\xi r) \\ \theta(r) &= -D_1 \xi \cosh(\xi r) - D_2 \xi \sinh(\xi r) + \\ &D_3 [3 \sinh(\xi r) - r \xi \cosh(\xi r)] + \\ &D_4 [3 \cosh(\xi r) - r \xi \sinh(\xi r)] \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\xi = \sqrt{\alpha/2} \quad (9)$$

(3) 当  $k_w < \bar{k}_w$  时

$$\begin{aligned} v(r) &= D_1 \cos(\eta r) \sinh(\xi r) + D_2 \cos(\eta r) \cosh(\xi r) + \\ &D_3 \sin(\eta r) \sinh(\xi r) + D_4 \sin(\eta r) \cosh(\xi r) \\ \theta(r) &= D_1 \{ \xi q_1 \cos(\eta r) \cosh(\xi r) - \eta q_2 \sin(\eta r) \sinh(\xi r) \} + \\ &D_2 \{ \xi q_1 \cos(\eta r) \sinh(\xi r) - \eta q_2 \sin(\eta r) \cosh(\xi r) \} + \\ &D_3 \{ \xi q_1 \sin(\eta r) \cosh(\xi r) + \eta q_2 \cos(\eta r) \sinh(\xi r) \} + \\ &D_4 \{ \xi q_1 \sin(\eta r) \sinh(\xi r) + \eta q_2 \cos(\eta r) \cosh(\xi r) \} + D_5 \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\xi, \eta, q_1$  和  $q_2$  分别定义为

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt[4]{\beta} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \eta = \sqrt[4]{\beta} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ q_1 &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{\beta}}, \quad q_2 = 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $\varphi = \arctan(\sqrt{4\beta - \alpha^2}/2), \varphi \in (0, \pi/2)$ 。

### 2.2 单元位移形函数的构造

利用式(6,8,10)给出的位移通解,可以构造对应的形函数,具体推导过程如下。

根据相应的位移通解表达式,梁上任意一点处

的横向位移  $w(x)$  和转角  $\theta(x)$  可用广义自由度  $D_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  表示成以下形式:

$$\begin{Bmatrix} w(r) \\ \theta(r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\theta \end{bmatrix} \mathbf{D} \quad (12)$$

式中  $\mathbf{N}_v$  和  $\mathbf{N}_\theta$  分别为横向位移和转角的形函数矩阵, 其形式由式(6, 8)或(10)确定,  $\mathbf{D}$  为单元广义自由度向量即  $\mathbf{D} = \{D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5\}^T$ .

故在梁单元的两端点处, 以下关系成立:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Lv|_{r=0} \\ \theta|_{r=0} \\ Lv|_{r=1} \\ \theta|_{r=1} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{D} \quad (13)$$

式中的矩阵  $\mathbf{A}$  可表示为  $\mathbf{A} = [\mathbf{M} \ \mathbf{C}_0]$ , 其中  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{C}_0$  为子矩阵, 且有以下关系式:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{M}^b, & k_w > \bar{k}_w \\ \mathbf{M}^c, & k_w = \bar{k}_w \\ \mathbf{M}^s, & k_w < \bar{k}_w \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{M}^b = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & L \\ P_1 & 0 & P_2 & 0 \\ L\sinh(\xi) & L\cosh(\xi) & L\sinh(\eta) & L\cosh(\eta) \\ P_1 \cosh(\xi) & P_1 \sinh(\xi) & P_2 \cosh(\eta) & P_2 \sinh(\eta) \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \xi - \frac{\alpha}{\xi}, \quad P_2 = \eta - \frac{\alpha}{\eta}$$

$$\mathbf{M}^c = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 3 \\ L\sinh(\xi) & L\cosh(\xi) & L\sinh(\xi) & L\cosh(\xi) \\ -\xi \cosh(\xi) - \xi_1 \sinh(\xi) & m_{43}^c & m_{44}^c & \end{bmatrix}$$

$$m_{43}^c = 3\sinh(\xi) - \xi \cosh(\xi), \quad m_{44}^c = 3\cosh(\xi) - \xi \cosh(\xi)$$

$$\mathbf{M}^s = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & 0 \\ \xi q_1 & 0 & 0 & \eta q_2 \\ m_{31}^s & m_{32}^s & m_{33}^s & m_{34}^s \\ m_{41}^s & m_{42}^s & m_{43}^s & m_{44}^s \end{bmatrix}$$

$$m_{31}^s = L\cos(\eta)\sinh(\xi), \quad m_{32}^s = L\cos(\eta)\cosh(\xi)$$

$$m_{33}^s = L\sin(\eta)\sinh(\xi), \quad m_{34}^s = L\sin(\eta)\cosh(\xi)$$

$$m_{41}^s = \xi q_1 \cos(\eta)\cosh(\xi) - \eta q_2 \sin(\eta)\sinh(\xi)$$

$$m_{42}^s = \xi q_1 \cos(\eta)\sinh(\xi) - \eta q_2 \sin(\eta)\cosh(\xi)$$

$$m_{43}^s = \xi q_1 \sin(\eta)\cosh(\xi) + \eta q_2 \cos(\eta)\sinh(\xi)$$

$$m_{44}^s = \xi q_1 \sin(\eta)\sinh(\xi) + \eta q_2 \cos(\eta)\cosh(\xi)$$

由式(13)可以得到单元广义自由度向量的表达式为

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}} \quad (15)$$

式中  $\bar{\mathbf{d}}$  为单元自由度向量  $\bar{\mathbf{d}} = \{\mathbf{d} \ \mathbf{D}_5\}^T$ ,  $\mathbf{R}$  为转换矩阵, 由下式给出得

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

将式(15)代入式(16)可得位移场表达式为

$$\begin{Bmatrix} v(r) \\ \theta(r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\theta \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\theta \end{bmatrix} \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}} \quad (16)$$

将式(16)代入式(2)可得横向剪切应变:

$$\gamma(r) = v'(r) - \theta(r) = (\mathbf{N}'_v - \mathbf{N}_\theta) \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}} \quad (17)$$

### 2.3 单元刚度矩阵的确定

在横向分布荷载作用下 Timoshenko 梁的能量泛函表达式为

$$\Pi = H_1 + H_2 + H_3 - \int_0^L P(x)w(x)dx \quad (18)$$

式中  $H_1, H_2$  和  $H_3$  分别为梁的剪切变形和弯曲变形以及弹性地基的变形对单元总势能的贡献, 而最后一项为单元分布荷载的外力势能, 且有

$$H_1 = \frac{1}{2} \kappa_s GA \int_0^L \gamma^2(x) dx = \frac{1}{2} \kappa_s GA \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{H}}_1 \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[ \frac{d\theta(x)}{dx} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{H}}_2 \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}}$$

$$H_3 = \frac{1}{2} k_w \int_0^L [w(x)]^2 dx = \frac{1}{2} k_w L^3 \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{H}}_3 \mathbf{R}\bar{\mathbf{d}}$$

$$\int_0^L P(x)w(x)dx = \frac{EI}{L} \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{R}^T \int_0^1 \mathbf{N}_v^T P(r) dr$$

式中

$$\bar{\mathbf{H}}_1 = \int_0^1 (\mathbf{N}'_v - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}'_v - \mathbf{N}_\theta) dr$$

$$\bar{\mathbf{H}}_2 = \int_0^1 \mathbf{N}_\theta'^T \mathbf{N}_\theta' dr$$

$$\bar{\mathbf{H}}_3 = \int_0^1 \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v dr$$

由最小势能原理可得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{P}} = 0 \quad (19)$$

式中

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EI}{L} \mathbf{R}^T \left( \frac{\beta}{\alpha} \bar{\mathbf{H}}_1 + \bar{\mathbf{H}}_2 + \beta \bar{\mathbf{H}}_3 \right) \mathbf{R}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{EI}{L} \int_0^1 \mathbf{N}_v^T P(r) dr = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2.4 非节点自由度的凝聚

由于梁单元中只有梁端横向位移  $w_1, w_2$  及截面转角  $\theta_1, \theta_2$  四个自由度,  $D_5$  是在推导过程中引入的一个非节点自由度参数, 故需要采用凝聚法将其消去。对  $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{P}}$  进行分块可得

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ D_5 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

由式(19,21)可得

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{12} D_5 = \mathbf{P}, \mathbf{K}_{21} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{22} D_5 = 0 \quad (22)$$

由其中的第二式可得

$$D_5 = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{d} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)第1式,可得

$$(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (24)$$

从而可得凝聚后的单元刚度阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (25)$$

### 3 算例

#### 3.1 算例 1

考虑图 2 所示弹性地基上长度为  $L=16\text{ m}$  的 C60 混凝土梁,梁的中部施加一大大小为  $P=1.0 \times 10^5\text{ N}$  的集中力。弹性地基的刚度  $k_w=8.0 \times 10^6\text{ N/m}^2$ ,梁的矩形截面尺寸为  $b \times h=0.3\text{ m} \times 0.4\text{ m}$ ,弹性模量  $E=3.6 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,剪切模量  $G=1.5 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,泊松比  $\nu=0.2$ ,截面的有效横向剪切系数  $\kappa_s=1/1.2$ 。要求计算梁单元在荷载作用下梁端的位移和转角。对于该算例,  $\bar{k}_w=4(\kappa_s GA)^2/EI=1.5625 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ ,问题属于  $k_w < \bar{k}_w$  的情况。端部位移计算结果见表 2。

从表 1 和表 2 给出的结果可知,采用本文提出的新单元,仅将梁划分为 2 个单元就可以得到收敛解,亦即数值精确解,此时若采用常规的 Timoshenko 梁单元,即使将梁划分为 320 个单元(即将弹性地基等效表达为 321 个弹簧单元),得到的解仍然有一定的误差。

表 1 采用常规单元的端部位移计算结果

Tab.1 Solutions with conventional element

No. of elements	2	4	160	320
$w_1(\text{m})$	-1.6111e-05	-2.2182e-04	-3.2248e-04	3.2261e-04
$\theta_1(\text{rad})$	2.8641e-04	4.6835e-05	9.5462e-05	9.5548e-05

表 2 采用新单元的端部位移计算结果

Tab.2 Solutions with proposed element

No. of elements	2	4	8
$w_1(\text{m})$	-3.2265e-04	-3.2265e-04	-3.2265e-04
$\theta_1(\text{rad})$	9.5577e-05	9.5577e-05	9.5577e-05

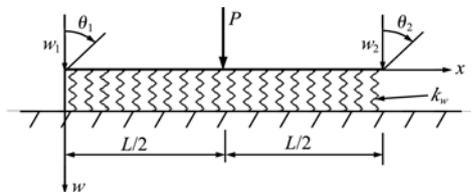


图 2 Winkler 地基梁受集中力

Fig.2 A beam on Winkler foundation under point load

#### 3.2 算例 2

继续考虑图 2 所示的地基梁,取梁长  $L=2\text{ m}$ ,弹性地基的刚度  $k_w=1.8 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ ,其他参数与算例 1 相同。此算例属  $k_w > \bar{k}_w$  的情况,计算结果见表 3 和表 4,同样可以得到与算例 1 相同的结论。

#### 3.3 算例 3

仍考虑图 2 所示的地基梁,弹性地基刚度  $k_w=3 \times 10^9\text{ N/m}^2$ ,其他条件与算例 1 相同。分别用 32 位和 64 位计算机进行计算,结果见表 5。

由表 5 可知,将梁划分为 2 个新单元时,在 32 位计算机上的计算结果存在着较大的误差,而在 64 位计算机上得到的结果仍然是收敛解,为数值精确解。这说明了使用此方法计算时,计算机存储精度的不足可能会引起较大的舍入误差,影响分析结果的精度。在这种情况下,采用以下两种途径之一仍可由新单元获得高精度的数值解。

(1) 采用存储字节更多的计算机。

(2) 将网格细分,保证参数保持在一定的安全范围之内。

针对舍入误差可能引起的精度损失进行的数值试验和研究发现,若能保证式(7,9,11)中定义的参数  $\xi \leq 10.0$ ,舍入误差对解的精度影响可以忽略不计。这意味着当弹性地基梁与梁的抗剪或抗弯刚度相比较小时,需要进行网格细分缩小单元长度,以保证计算过程的舍入误差不至于影响计算精度,从而得到高精度的分析结果。

表 3 采用常规单元的端部位移计算结果

Tab.3 Solutions with the conventional element

No. of elements	2	4	160	320
$w_1(\text{m})$	9.5320e-10	-1.1047e-08	-1.3422e-08	-1.3449e-08
$\theta_1(\text{rad})$	7.4469e-07	3.8483e-07	1.2689e-07	1.2704e-07

表 4 采用新单元的端部位移计算结果

Tab.4 Solutions with the proposed element

No. of elements	2	4	8
$w_1(\text{m})$	-1.3459e-08	-1.3459e-08	-1.3459e-08
$\theta_1(\text{rad})$	1.2709e-07	1.2709e-07	1.2709e-07

表 5 计算机字长、单元划分与端部位移解的精度

Tab.5 Meshes and solution accuracy

	32 bit			64 bit
	2 elements	4 elements	8 elements	2 elements
$w_1(\text{m})$	-1.3795e-12	-1.3154e-12	-1.3154e-12	-1.3154e-12
$\theta_1(\text{rad})$	2.4550e-11	2.4368e-11	2.4368e-11	2.4368e-11
$w_2(\text{m})$	-1.2966e-12	-1.3154e-12	-1.3154e-12	-1.3154e-12
$\theta_2(\text{rad})$	2.4278e-11	2.4368e-11	2.4368e-11	2.4368e-11

## 4 结 语

本文基于弹性地基上 Timoshenko 梁平衡微分方程的通解构造了单元形函数,提出了一种可用以获得高精度数值解的 Trefftz 单元。文中还讨论了计算机舍入误差对解的精度影响以及相应的处理方法。

应当指出的是,本文方法可以推广应用于其他问题,包括变截面梁的分析。构造 Trefftz 单元的关键之一在于求得控制微分方程的通解,当精确的通解无法获得时,近似解(例如,含有效项的级数解)也可用来构造单元形函数,但这样得到的单元只能用来给出较高精度的结果。在此情况下,必须通过细分单元才能得到收敛的数值解。

## 参考文献(References):

- [1] Zhou D. A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation[J]. *Computers & Structures*, 1993, **47**(1): 83-90.
- [2] Wang C M, Lam K Y, He X Q. Exact solutions for Timoshenko beams on elastic foundations using Green's functions[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1998, **26**: 101-113.
- [3] 纪多辙. 铁摩辛柯基础梁的解析解和广义克雷洛夫函数[J]. *力学与实践*, 2002, **4**(1): 33-35. (JI Duo-zhe. The analytic solution for Timoshenko beams on elastic foundations and generalized Kerlov function[J]. *Mechanics in Engineering*, 2002, **4**(1): 33-35. (in Chinese))
- [4] Eisenberger M, Clastoinik J. Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation [J]. *Journal of Sound Vibration*, 1997, **115**: 233-241.
- [5] Lee H P. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass [J]. *Applied Acoustics*, 1998, **5**(3): 203-215.
- [6] Malekzadeh P, Karami G, Farid M. DQEM for vibration analysis of Timoshenko beams on elastic foundations[J]. *Computational Mechanics*, 2003, **31**: 219-228.

- [7] Chen W Q, Lu C F, Bian Z G. A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2004, **28**(10): 877-890.
- [8] Girgin C Z, Girgin K. A numerical method for static or dynamic stiffness matrix of non-uniform members resting on variable elastic foundations[J]. *Engineering Structure*, 2005, **27**(9): 1373-1384.
- [9] Malekzadeh P, Karami G. A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, **32**(7): 1381-1394.
- [10] Tong P. Exact solutions of certain problems by finite-element methods[J]. *AIAA Journal*, 1969, **7**: 178-179.
- [11] Kanok-Nukulchai W, Dayawansa PH, Karasudhi P. An exact finite model for deep beams[J]. *International Journal of Structures*, 1981, **1**: 1-7.
- [12] Ma H. Exact solutions of axial vibration problems of elastic bars[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2008, **75**(2): 241-252.
- [13] Ma H. Exact solutions of vibration problems of frame structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2010, **26**(5): 587-596.
- [14] 陈太聪, 马海涛. 框架结构屈曲的精确有限元求解[J]. *力学学报*, 2009, **41**(6): 953-960. (CHEN Tai-cong, MA Hai-tao. Exact finite element solutions of buckling analysis of frame structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, **41**(6): 953-960. (in Chinese))
- [15] Qin Q H. Trefftz finite element method and its applications [J]. *Applied Mechanics Review*, ASME, 2005, **58**: 316-337.
- [16] 莫海鸿, 杨小平. 基础工程[M]. 北京: 中国建筑出版社, 2003. (MO Hai-hong, YANG Xiao-ping. *Foundation Engineering*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2003. (in Chinese))

## Exact numerical solutions of Timoshenko beams on elastic foundations

GAO Xing-jun, MA Hai-tao\*, CHEN Tai-cong

(State Key Laboratory of Subtropical Building Science, Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** This paper presents a study on the exact finite element solution of Timoshenko beams on elastic foundation. New shape functions are constructed using the general solution of governing differential equations of equilibrium and a Trefftz element is developed. The proposed exact element has the same nodal degrees of freedom as the conventional element after the nodeless degree of freedom introduced in the derivation is condensed at the element level. Methods for avoiding possible numerical errors due to roundoff errors are also discussed. Numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the new element.

**Key words:** elastic foundations; Timoshenko beams; Trefftz element; exact numerical solutions