

基于 Cosserat 理论的广义协调元法

邢本东*, 张若京

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要:首次将广义协调元理论与 Cosserat 理论相结合,构造了一个基于 Cosserat 理论的平面四节点广义协调等参元。依据常应力与线性应力下的广义协调条件,推导了广义协调位移,进而得到有限元列式。利用广义协调元,一方面克服了协调元过于刚硬的缺点,另一方面消除了非协调元不一定收敛的弱点。分析了带有圆孔的应力集中问题,可以看出,该单元的数值精度准确和计算效率高。

关键词:Cosserat 理论;广义协调条件;广义协调等参元

中图分类号:O242.21 **文献标志码:**A

1 引言

Cosserat 理论最早由法国的 Cosserat 兄弟^[1]提出,相对于经典的连续力学理论,增加了独立的转动自由度。20 世纪 60 年代, Toupin^[2] 和 Mindlin 等^[3,4] 提出了更为一般的弹性偶应力理论,除了考虑旋转梯度外,还引入了拉伸梯度。近年来, Fleck 和 Hutchison^[5,6] 提出了拉伸和旋转梯度塑性理论, Gao 和 Huang^[7] 又提出了基于位错机制的应变梯度塑性理论等。

一些学者研究了应变梯度理论的有限单元法。Herrmann^[8] 针对约束转动的 Cosserat 理论,讨论了四种 C0 连续的混合单元,但由于混合元变量众多,给存储和求解带来了困难; Wood^[9] 从板单元中得到启发,利用一阶应力函数来构造单元; Providas^[10] 构造了适用于 Cosserat 理论的位移型协调三角形单元,可是协调元较其它方法精度差一些;肖其林等^[11,12] 构造了非协调元和杂交混合元;李雷等^[13,14] 构造了非协调元与杂交应力元,但是非协调元有不一定收敛的弱点。本文首先介绍了 Cosserat 理论,然后推导出常应力与线性应力下的广义协调条件,进一步推导了基于 Cosserat 理论的平面四节点广义协调等参元的单元列式,最后通过求解小孔应力集中问题,来检验单元的数值性能。

2 Cosserat 理论

2.1 平衡微分方程

对于不计体力的平面问题, Cosserat 理论增加了两个偶应力 m_x 和 m_y , 剪应力不再相等, 平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1,2)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0 \quad (3)$$

2.2 几何方程

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \phi, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \phi, \quad \kappa_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4 \sim 6) \end{aligned}$$

式中 κ_x 和 κ_y 是对应于偶应力的变形,称为曲率。

2.3 物理方程

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gl^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Gl^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{yx} \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中 $A = \lambda + 2G, B = G + G^c, C = G - G^c, G^c = cG, \lambda$ 和 G 为拉梅系数, l 为材料的特征尺寸常数, c 为剪切模量比。

3 常应力与线性应力下的广义协调条件

相对于协调元^[15], 广义协调元对协调条件加

收稿日期:2009-06-28;修改稿收到日期:2009-10-28.

基金项目:国家自然科学基金(10772136);教育部博士点基金(20060247016);上海市重点学科建设(B302)资助项目.

作者简介:邢本东*(1984-),男,硕士

(E-mail: xbd19841118@163.com).

以放宽,只要求在平均意义下满足协调条件:

$$\oint_{\partial A^e} T_c^T(u - \tilde{u}) ds = 0, \oint_{\partial A^e} M_c(\phi - \tilde{\phi}) ds = 0 \quad (8)$$

式中 T_c 和 M_c 为常应力状态下的单元边界力。为了提高精度,这里采用该条件的一种强形式:

$$\oint_{\partial A^e} T^T(u - \tilde{u}) ds = 0, \oint_{\partial A^e} M(\phi - \tilde{\phi}) ds = 0 \quad (9)$$

式中 T 和 M 为常应力与线性应力组合状态下的单元边界力。由于在单元边界上,有

$$u_q - \tilde{u} = 0, \phi - \tilde{\phi} = 0 \quad (10)$$

式中 u_q 为线位移的协调部分,转角 ϕ 只含协调部分。所以,广义协调条件变为

$$\oint_{\partial A^e} T^T u_\lambda ds = 0 \quad (11)$$

假设线性应力状态取如下形式:

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 \eta, \sigma_y = \beta_3 + \beta_4 \xi, \sigma_{xy} = \beta_5 + \beta_6 \eta$$

$$\sigma_{yx} = \beta_7 + \beta_8 \xi, m_x = \beta_9, m_y = \beta_{10} \quad (12)$$

令 n_x 和 n_y 为单元边界外法线方向余弦,单元边界力为

$$T = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x(\beta_1 + \beta_2 \eta) + n_y(\beta_5 + \beta_6 \eta) \\ n_y(\beta_3 + \beta_4 \xi) + n_x(\beta_7 + \beta_8 \xi) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

将上式代入广义协调条件中,得到 8 个广义协调条件如下:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A^e} n_x u_\lambda ds &= 0, \quad \oint_{\partial A^e} n_y v_\lambda ds = 0 \\ \oint_{\partial A^e} n_x \eta u_\lambda ds &= 0, \quad \oint_{\partial A^e} n_y \xi v_\lambda ds = 0 \\ \oint_{\partial A^e} n_y u_\lambda ds &= 0, \quad \oint_{\partial A^e} n_x v_\lambda ds = 0 \\ \oint_{\partial A^e} n_y \eta u_\lambda ds &= 0, \quad \oint_{\partial A^e} n_x \xi v_\lambda ds = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

4 广义协调位移

广义协调位移设为完备二次式

$$u_\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \xi + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \xi^2 + \lambda_5 \xi \eta + \lambda_6 \eta^2 \quad (15)$$

$$v_\lambda = \lambda'_1 + \lambda'_2 \xi + \lambda'_3 \eta + \lambda'_4 \xi^2 + \lambda'_5 \xi \eta + \lambda'_6 \eta^2 \quad (16)$$

将上式代入广义协调条件中,可得

$$\begin{aligned} 3b_3 \lambda_2 - 3b_1 \lambda_3 + 2b_2(\lambda_4 - \lambda_6) &= 0 \\ 3b_1 \lambda_1 + 2b_2 \lambda_3 + b_1 \lambda_4 - b_3 \lambda_5 + 3b_1 \lambda_6 &= 0 \\ 3a_3 \lambda_2 - 3a_1 \lambda_3 + 2a_2(\lambda_4 - \lambda_6) &= 0 \\ 3a_1 \lambda_1 + 2a_2 \lambda_3 + a_1 \lambda_4 - a_3 \lambda_5 + 3a_1 \lambda_6 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 3a_3 \lambda'_2 - 3a_1 \lambda'_3 + 2a_2(\lambda'_4 - \lambda'_6) &= 0 \\ 3a_3 \lambda'_1 + 2a_2 \lambda'_2 + 3a_3 \lambda'_4 - a_1 \lambda'_5 + a_3 \lambda'_6 &= 0 \\ 3b_3 \lambda'_2 - 3b_1 \lambda'_3 + 2b_2(\lambda'_4 - \lambda'_6) &= 0 \\ 3b_3 \lambda'_1 + 2b_2 \lambda'_2 + 3b_3 \lambda'_4 - b_1 \lambda'_5 + b_3 \lambda'_6 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

选取 $\lambda_4, \lambda_6, \lambda'_4$ 和 λ'_6 为独立参数,其余 8 个参数表示如下。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{4Z^2}{9X^2}(\lambda_4 - \lambda_6) - \frac{1}{3}\lambda_4 - \lambda_6 \\ \lambda_2 &= -\frac{2Y}{3X}(\lambda_4 - \lambda_6) \\ \lambda_3 &= \frac{2Z}{3X}(\lambda_4 - \lambda_6), \lambda_5 = \frac{4YZ}{3X^2}(\lambda_4 - \lambda_6) \\ \lambda'_1 &= \frac{4Y^2}{9X^2}(\lambda'_4 - \lambda'_6) - \lambda'_4 - \frac{1}{3}\lambda'_6, \lambda'_2 = -\frac{2Y}{3X}(\lambda'_4 - \lambda'_6) \\ \lambda'_3 &= \frac{2Z}{3X}(\lambda'_4 - \lambda'_6), \lambda'_5 = -\frac{4YZ}{3X^2}(\lambda'_4 - \lambda'_6) \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ b_1 &= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \\ a_2 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ b_2 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ a_3 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ b_3 &= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \end{aligned} \quad (20)$$

$$X = a_1 b_3 - b_1 a_3, Y = a_1 b_2 - b_1 a_2, Z = a_2 b_3 - b_2 a_3 \quad (21)$$

所以,广义协调位移为

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \left[-\frac{4Z^2}{9X^2} - \frac{1}{3} - \frac{2Y}{3X}\xi + \frac{4YZ}{3X^2}\xi\eta + \frac{2Z}{3X}\eta + \xi^2 \right] \lambda_4 + \\ &\quad \left[\frac{4Z^2}{9X^2} - 1 + \frac{2Y}{3X}\xi - \frac{4YZ}{3X^2}\xi\eta - \frac{2Z}{3X}\eta + \eta^2 \right] \lambda_6 \quad (22) \\ v_\lambda &= \left[\frac{4Y^2}{9X^2} - 1 - \frac{2Y}{3X}\xi - \frac{4YZ}{3X^2}\xi\eta + \frac{2Z}{3X}\eta + \xi^2 \right] \lambda'_4 + \\ &\quad \left[-\frac{4Y^2}{9X^2} - \frac{1}{3} + \frac{2Y}{3X}\xi + \frac{4YZ}{3X^2}\xi\eta - \frac{2Z}{3X}\eta + \eta^2 \right] \lambda'_6 \end{aligned} \quad (23)$$

5 有限元列式

这里构造一个基于 Cosserat 理论的平面四节点广义协调等参元,选取四个节点的位移与转角为独立的自由度。位移包含协调部分与广义协调部分,而转角只包含协调部分。

5.1 位移场

$$\{u\} = \{u_q\} + \{u_\lambda\} = N_q q^e + N_\lambda \lambda \quad (24)$$

$$\phi = N_\phi \phi^e \quad (25)$$

式中 N_q 和 N_ϕ 为双线性插值基函数, N_λ 由广义协调位移确定。 $\lambda = \{\lambda_1 \ \lambda_5 \ \lambda'_1 \ \lambda'_5\}^T$, $\phi^e = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4\}^T$, $q^e = \{u_1 \ u_1 \ u_2 \ u_2 \ u_3 \ u_3 \ u_4 \ u_4\}^T$ 。

5.2 应变场

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{yx} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \phi = B_1 q^e + B_\lambda \lambda + B_3 \phi^e \quad (26)$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \phi = B_2 \phi^e \quad (27)$$

5.3 单元方程

在不计体力时, 泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C \epsilon dV + \frac{1}{2} \int_V \chi^T F \chi dV - \int_{S^e} (\bar{T}^T u + M^T \phi) dS \quad (28)$$

式中 $C = \begin{bmatrix} A & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C \\ 0 & 0 & C & B \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} Gl^2 & 0 \\ 0 & Gl^2 \end{bmatrix}$ (29)

将应变及位移表达式代入泛函中, 由泛函的一次变分得到单元方程为

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\lambda} \\ K_{\lambda d} & K_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

式中 $\{d\} = \{\{q^e\}^T \ \{\phi^e\}^T\}^T$ (31)

$$K_{dd} = \begin{bmatrix} \int_V B_1^T C B_1 dV & \int_V B_1^T C B_3 dV \\ \int_V B_3^T C B_1 dV & \int_V B_3^T C B_3 dV + \int_V B_2^T F B_2 dV \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$K_{d\lambda} = \left[\int_V B_1^T C B_\lambda dV \int_V B_3^T C B_\lambda dV \right]^T \quad (33)$$

$$K_{\lambda d} = \left[\int_V B_\lambda^T C B_1 dV \int_V B_\lambda^T C B_3 dV \right]^T \quad (34)$$

$$K_{\lambda\lambda} = \left[\int_V B_\lambda^T C B_\lambda dV \right] \quad (35)$$

凝聚内部自由度后, 可得方程:

$$Kd = Q \quad (36)$$

式中 $K = K_{dd} - K_{d\lambda} K_{\lambda\lambda}^{-1} K_{\lambda d}$ (37)

$$Q = \left\{ \int_{S^e} N_q^T \bar{T} dS \int_{S^e} N_\phi^T \bar{M} dS \right\}^T \quad (38)$$

本文构造的广义协调等参元, 位移采用的是协调位移与广义协调位移的组合, 与传统做法相比, 着眼于各边的平均位移协调而不是节点处的点协调, 因而当网格逐次细分时, 能够保证各边的极限协调, 从而保证解的收敛。由于在位移中加入了满足广义协调条件的广义协调位移, 解的精度较协调元有明显的改善。与混合元和杂交元相比, 广义协调元方法简单易懂, 仅假设位移场, 而且单元方程仍由最小势能原理得到。所以, 广义协调元具有一定的优越性。

6 算 例

本文分析了带圆孔的无限大平板受轴向拉伸载荷作用下的应力集中问题, 其解析解由刘俊^[16]给出。设小孔半径为 0.01, 模型大小为 0.32 * 0.32, 在边界上受拉伸载荷 p_x , 如图 1 所示。

采用 1/4 模型, 共划分 93 个四边形单元, 118 个节点, 如图 2 所示。文献[12] 共划分了 164 个四边形单元和 193 个节点。

在 Cosserat 理论中, 小孔应力集中因子主要与材料特征尺寸 l , 泊松比 ν , 以及剪切模量比 c 有关。首先, 考察 $\theta = 90^\circ$ 时, 应力集中因子随 a/l 的变化情况。由表 1 给出的数值结果可以看出, 由于考虑了偶应力, 应力集中因子减小了, l 越大, 应力集中因子越小, 与刘俊的解析解符合较好, 可以比较准确地刻画小孔应力集中问题的尺度效应。文献[10]

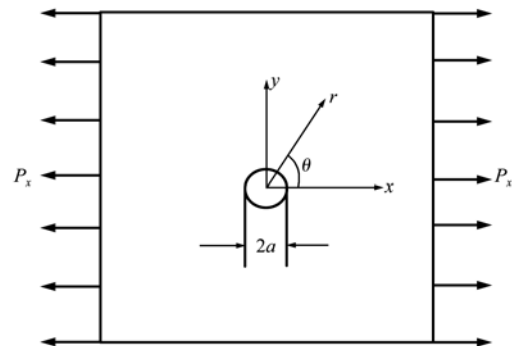


图 1 受均匀拉伸的含圆孔无限大平板
Fig. 1 Circular hole in uniform tension field

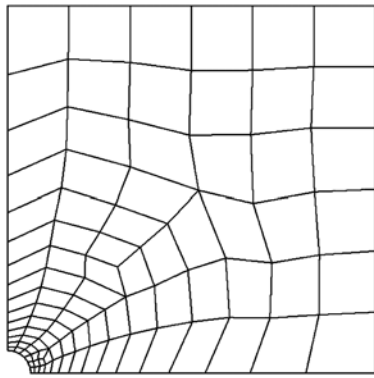


图 2 网格划分情况
Fig.2 Finite element mesh

中($c = 1/3$)划分了 480 个三角形单元,分别采用三种单元形式进行计算,MLINT 误差为(1% ~ 3.6%),MQLT 误差为(1.4% ~ 1.9%),MQUAT 误差为(1.4% ~ 1.8%),可见广义协调等参元计算精度明显高于协调元。

其次,表 2 说明随着泊松比的增大,应力集中因子也随之增大,单元的数值精度有所下降,甚至当材料接近不可压缩时,计算结果偏差较大。

最后,表 3 给出了剪切模量比 c 对应力集中因子的影响。随着剪切模量比 c 的增大,应力集中因子随之减小,而且越来越接近约束转动下 Cosserat 理论的解。

表 1 σ_0/p_x 随 a/l 的变化

($\theta = 90^\circ, \nu = 0.3, c = 0.5, r = a$)

a/l	1	2	3	4	6	8	10
精确解	2.579	2.752	2.844	2.895	2.944	2.966	2.977
本文解	2.588	2.752	2.834	2.879	2.922	2.942	2.952
误差(%)	0.35	0.00	0.35	0.55	0.75	0.81	0.84

表 2 σ_0/p_x 随泊松比 ν 的变化

($\theta = 90^\circ, c = 0.5, r = a, a/l = 1$)

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
精确解	2.490	2.533	2.579	2.628	2.654
本文解	2.496	2.544	2.588	2.661	2.698
误差(%)	0.24	0.43	0.35	1.25	1.65

表 3 σ_0/p_x 随剪切模量比 c 的变化

($\theta = 90^\circ, \nu = 0.3, r = a, a/l = 1$)

c	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8	1.0
精确解	2.818	2.721	2.657	2.579	2.553	2.515	2.489
本文解	2.802	2.722	2.669	2.588	2.563	2.539	2.511
误差(%)	0.57	0.04	0.45	0.35	0.39	0.95	0.88

7 结 论

本文首次推导了基于 Cosserat 理论的平面四节点广义协调等参元,并用其求解了小孔应力集中问题,算例中采用较少的单元而得到较高的计算精度,可见该单元计算效率高。与非协调元相比,该单元采用常应力与线性应力下的广义协调条件既能保证解的收敛又能提高解的精度。该单元列式简单,易于编程。

参考文献(References):

[1] Cosserat E, Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*[M]. Paris: Herman et fils 1909.

[2] Toupin R. Elastic materials with couple-stresses[J]. *Arch Rational Mech Anal*,1962,**11**:385-414.

[3] Mindlin R D. Influence of couple-stress on stress concentrations[J]. *Exp Mech*,1963,**3**:1-7.

[4] Mindlin R D. Microstructure in linear elasticity[J]. *Arch Rational Mech Anal*,1964,**16**:51-78.

[5] Fleck N A, Hutchinson J W. A phenomena logical theory for strain gradient effects in plasticity[J]. *J Mech Phys Solids*,1993,**41**:1825-1857.

[6] Fleck N A, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity[J]. *Applied Mechanics*. New York: Academic Press,1997,**33**:295-361.

[7] Gao H, Huang Y, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity-I. theory [J]. *J Mech Phys Solids*,1999,**47**:1239-1263.

[8] Herrmann L R. Mixed finite elements for couple-stress analysis[A]. Atluri S N, et al. eds. *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*[M]. New York: Wiley,1983:1-17.

[9] Wood R D. Finite element analysis of plane couple-stress problems using first order stress function[J]. *Int J Num Meth Engng*,1988,**26**:489-509.

[10] Providas E, Kattis M A. Finite element method in plane Cosserat elasticity[J]. *Computers and Structures*,2002,**80**:2059-2069.

[11] 肖其林,凌 中,吴永礼. 偶应力问题的杂交/混合元分析[J]. 计算力学学报,2003,**20**(4):427-433. (XIAO Qi-lin, LING Zhong, WU Yong-li. Hybrid/mixed finite element analysis of couple-stress problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2003,**20**(4):427-433. (in Chinese))

- [12] 肖其林, 凌 中, 吴永礼. 偶应力问题的非协调元分析[J]. 中国科学院研究生院学报, 2003, **20**(2): 223-231. (XIAO Qi-lin, LING Zhong, WU Yong-li. Incompatible finite element analysis of couple-stress problems[J]. *Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences*, 2003, **20**(2): 223-231. (in Chinese))
- [13] 李 雷, 吴长春, 谢水生. 基于 Hellinger-Reissner 变分原理的应变梯度杂交元设计[J]. 力学学报, 2005, **30**(3): 301-306. (LI Lie, WU Chang-chun, XIE Shui-sheng. Optimization method of hybrid element stress function for strain gradient theory based on hellinger-reissner principle[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, **37**(3): 301-306. (in Chinese))
- [14] 李 雷, 吴长春. 基于 Cosserat 理论的应变梯度非协调数值研究[J]. 工程力学, 2004, **21**(5): 166-171. (LI Lei, WU Chang-chun. Incompatible finite element analysis of strain gradient theory based on the Cosserat theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(5): 166-171. (in Chinese))
- [15] 龙馥球, 黄民丰. 广义协调等参元[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(10): 871-877. (LONG Yu-qiu, HUANG Min-feng. A generalized conforming isoparametric element [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, **9**(10): 871-877. (in Chinese))
- [16] 刘 俊, 黄 铭, 葛修润. 考虑偶应力影响的应力集中问题求解[J]. 上海交通大学学报, 2001, **35**(10): 1481-1485. (LIU Jun, HUANG Ming, GE Xiu-run. Solution of stress concentration problem considering influence of couple stress[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2001, **35**(10): 1481-1485. (in Chinese))

A generalized conforming element based on the Cosserat theory

XING Ben-dong*, ZHANG Ruo-jing

(School of Aeronautics and Astroautics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A generalized conforming element is developed to deal with the problems considering the Cosserat theory in this paper. It is a 4-nodes element for the Cosserat plane problems. According to the generalized conforming condition of constant stress and linear stress, the generalized conforming displacement is deduced, and the finite element equation is obtained. The generalized conforming element can overcome the weakness of the compatible and incompatible element. The stress concentration around a central circular hole in uni-axial tension is used to check the property of the element. The results show that the element has high efficiency and good accuracy.

Key words: the Cosserat theory; generalized conforming condition; generalized conforming isoparametric element