

粘贴压电层功能梯度材料 Timoshenko 梁的热过屈曲分析

苏厚德^{1,3}, 李世荣^{*1,2}, 高颖¹

(1. 兰州理工大学 理学院, 兰州 730050; 2. 扬州大学 建筑科学与工程学院, 扬州 225009;
(3. 甘肃蓝科石化高新装备股份有限公司, 海洋装备部, 兰州 730070)

摘要:研究了上下表面粘贴压电层的功能梯度材料 Timoshenko 梁在升温及电场作用下的过屈曲行为。在精确考虑轴线伸长和一阶横向剪切变形的基础上,建立了压电功能梯度 Timoshenko 层合梁在热-电-机械载荷作用下的几何非线性控制方程。其中,假设功能梯度的材料性质沿厚度方向按照幂函数连续变化,压电层为各向同性均匀材料。采用打靶法数值求解所得强非线性边值问题,获得了在均匀电场和横向非均匀升温场内两端固定 Timoshenko 梁的静态非线性屈曲和过屈曲数值解。并给出了梁的变形随热、电载荷及材料梯度参数变化的特性曲线。结果表明,通过施加电压在压电层产生拉应力可以有效地提高梁的热屈曲临界载荷,延缓热过屈曲发生。由于材料在横向的非均匀性,即使在均匀升温 and 均匀电场作用下,也会产生拉-弯耦合效应。但是对于两端固定的压电-功能梯度材料梁,在横向非均匀升温下过屈曲变形仍然是分叉形的。

关键词:功能梯度材料; Timoshenko 梁; 压电层合梁; 打靶法; 过屈曲

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

1 引言

关于压电智能结构控制的研究工作主要涉及了梁、板及壳结构的静动态响应控制^[1-15]。Crawley 和 Luis^[1]对于压电层合梁的静动态分析做出了有意义工作,给出了压电材料与结构体之间的静动态耦合模型,并通过实验验证了理论结果的可靠性。由在 Crawley 的梁模型中没有考虑横向剪切变形以及轴向力的影响。周又和等^[2]对表面粘贴压电片的梁式板和变厚度板结构的几何非线性大变形及振动响应智能控制进行了研究。Xia, Shen, Huang 和 Liew 等^[3-5]基于高阶剪切理论和 von Karman 几何非线性方程,同时考虑物性参数的温度依赖效应,采用摄动法对压电-功能梯度板结构的屈曲、过屈曲及振动作了研究,给出结构在热、电载荷对压电功能梯度板的屈曲、振动影响。关于压电驱动的功能梯度薄板的临界屈曲问题的研究还可见丁丽霞等^[6]、刘玮等^[7]的工作。林启荣等^[8]分析了压电驱动器对弹性梁的等效作用,并给出了一

端固支一端简支梁的解析解。于涛和仲政^[9]采用 Airy 应力函数法推导出了压电功能梯度材料悬臂梁二维平面问题解析解。曹志远等^[10]提出了功能梯度板的三维梯度有限元法。成奎成等^[11]对压电桁架作动器/传感器优化问题作了相应的研究。

根据作者文献调研,已有的关于压电层合梁和压电功能梯度材料梁的分析中,没有涉及热-电载荷共同作用下的热过屈曲问题。由于受端部位移约束的弹性梁的热过屈曲是由轴线方向的热膨胀引起的。因此,在分析中必须考虑轴线的伸长。本文拟在文献^[12-15]的基础上,对上下表面粘贴压电层的 FGM 层合梁在横向非均匀升温以及对压电层施加驱动电压载荷下的几何非线性大变形进行定量分析。给出了与热、电载荷参数有关临界载荷曲线或稳定边界以及过屈曲平衡路径,详细分析和讨论了逆压电效应、热载荷和材料梯度性质对变形特性的影响。

2 问题的数学模型

考虑压电材料和功能梯度材料组成的层合梁,其上、下表面层为压电材料,厚度均为 t ,中间层为功能梯度材料,厚度为 h ,梁的长度为 l ,宽度为 b ,总厚度为 h_0 。为研究方便,只考虑逆压电效应,并

收稿日期:2009-03-24;修改稿收到日期:2010-06-08.

基金项目:国家自然科学基金(10872083);教育部博士点基金(200807310002)资助项目.

作者简介:李世荣*(1957-),男,教授
(E-mail:lisr@lut.cn, srli@yzu.edu.cn).

且认为压电层与功能梯度层之间牢固粘贴。这里,研究梁在静态横向非均匀升温载荷和电压作用下的几何非线性静态变形响应,分析通过对压电层的电压驱动实现对梁的热静态变形的调整作用。首先基于轴向伸长几何非线性理论,并考虑一阶横向剪切变形,建立压电功能梯度材料 Timoshenko 梁的几何方程、本构方程以及平衡方程^[11-13]。考虑功能梯度材料层的物性参数沿着厚度方向按幂函数变化,而压电层的物性参数沿厚度不变。在给定上下表面的升温后,中间层的温度分布根据一维热传导方程求得,具体推导和符号定义见文献[15]。

考虑外电压只沿厚度方向作用,则压电层的电场强度可以表示为

$$E'_{ij} = V_j/t_j \quad (1)$$

式中 V_j 为第 j 层的电压, $t_1 = t_3 = t$ 为压电层厚度, $t_2 = h$ 为功能梯度材料层厚度。由于只有上下表层存在电压,所以: $V_2 = 0$ 。

功能梯度材料中间层由陶瓷和金属两种材料组成,并且由上表面的纯陶瓷连续变化为下表面的纯金属。FGM 材料的物性参数(弹性模量 E 、泊松比 ν 、热膨胀系数 α 和热传导系数 K 等)满足下列关系^[13]:

$$P = V_m P_m + V_c P_c, V_m + V_c = 1 \quad (2)$$

式中 V_m 和 V_c 分别为金属和陶瓷的体积分数。这里假设陶瓷体积分数沿厚度方向坐标按幂函数变化,即

$$V_c = (1/2 + z/h)^n \quad (3)$$

式中 n 为陶瓷材料的体积分指数 ($0 \leq n < \infty$)。考虑到功能梯度材料仍属于各向同性材料,所以弹性常数之间满足关系 $G = E/[2(1+\nu)]$ 。

3 无量纲控制方程

为便于计算和分析,引入无量纲量^[13]

$$(\xi, S, U, W) = (x, s_0, u_0, w_0)/l \quad (4a)$$

$$(F_1, F_2, F_4) = (l^2 C_1, l C_2, l^2 C_4)/C_3 \quad (4b)$$

$$(P_H, P_V, P_T, P_E) = l^2 (H, V, N_T, N_E)/C_3 \quad (4c)$$

$$(m, m_T, m_E) = l (M, M_T, M_E)/C_3 \quad (4d)$$

$$\tau = 12\delta^2 \alpha_m T_L, \Phi_1 = 12\delta^2 d_{31} V_1/t \quad (4e)$$

$$\Phi_2 = 12\delta^2 d_{31} V_2/t, \eta = t/h_0 \quad (4f)$$

$$(E_{r1}, E_{r2}) = (E_c, E_p)/E_m \quad (4g)$$

$$(\alpha_{r1}, \alpha_{r2}) = (\alpha_c, \alpha_p)/\alpha_m, \delta = l/h_0 \quad (4h)$$

$$T_r = T_U/T_L, a = 1/(K_{r1} - 1) \quad (4i)$$

式中 x 为变形前梁轴线上任意一点的物质坐标,

且 $x \in [0, l]$, $s_0(x)$ 为梁变形后的轴线弧长, $u_0(x)$ 和 $w_0(x)$ 分别为轴线上的点在 x, z 方向的位移, H 和 V 分别为横截面内的水平和横向内力分量, M 为弯矩, N_T 和 N_E 分别为热轴力和电轴力, M_T 和 M_E 分别为热弯矩和电弯矩, E 和 α 为材料弹性模量和热膨胀系数, 下标 m, c 和 p 分别代表金属、陶瓷和压电材料, C_i 为刚度参数, T_U 和 T_L 分别为上下表面的升温, d_{31} 为压电应变常量。利用上述无量纲变换,可得问题的无量纲控制方程:

$$\frac{dS}{d\xi} = \Lambda_0, \frac{dU}{d\xi} = \Lambda_0 \cos \theta - 1, \frac{dW}{d\xi} = \Lambda_0 \sin \theta \quad (5a \sim 5c)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \{-F_1[m + m_T + m_E] + F_2[P_H \cos \varphi + P_V \sin \varphi + P_T + P_E]\}/(F_1 - F_2^2) \quad (5d)$$

$$\frac{dP_H}{d\xi} = 0, \quad \frac{dP_V}{d\xi} = 0 \quad (5e, 5f)$$

$$\frac{dm}{d\xi} = \Lambda_0(-P_H \sin \theta + P_V \cos \theta) \quad (5g)$$

$$\Lambda_0 = \sqrt{A^2 + B^2}, \gamma = \tan^{-1}(B/A) \quad (6a)$$

$$A = \Lambda_0 \cos \gamma = \{[P_H \cos \varphi + P_V \sin \varphi + P_T + P_E] - F_2[m + m_T + m_E]\}/(F_1 - F_2^2) + 1 \quad (6b)$$

$$B = \Lambda_0 \sin \gamma = \frac{k}{F_4}(P_H \sin \varphi - P_V \cos \varphi) \quad (6c)$$

式中 $\theta(x)$ 为梁变形后轴线切线与 x 轴正向的夹角, Λ_0 为轴线伸长率。由式(6)可知,如果 $B = 0$ 则 $\gamma = 0$, 上述方程就退化为 Euler-Bernoulli 梁的过屈曲控制方程。(5d, 6b) 中的无量纲电轴力与电弯矩的表达式可分两种情形给出^[15]。上下表层电场同向(即 $V_1 = -V_2 = V^{[8]}$) 时

$$P_E = \Phi 2E_{r2}/C'_3, m_E = 0 \quad (7)$$

上下表层电场异向(即 $V_1 = V_2 = V^{[8]}$) 时:

$$P_E = 0, m_E = \Phi(1 - \eta)E_{r2}/(\delta C'_3) \quad (8)$$

考虑梁的约束为两端是固定的,则相应的无量纲边界条件可表示为

$$S(0) = 0, U(0) = 0 \\ W(0) = 0, \varphi(0) = 0 \quad (9)$$

$$U(1) = 0, W(1) = 0, \varphi(1) = 0 \quad (10)$$

4 数值结果与讨论

由于方程(5)的强非线性和多未知量之间的耦合效应,很难获得解析解。因此,本文采用打靶法寻求方程(5)在边界条件(9,10)下的数值解。首先,

表 1 压电-功能梯度层合梁的物性参数
Tab.1 Material property parameters of the piezoelectric FGM beams

	弹性模量		线膨胀系数		导热率	
	E/GPa	泊松比 ν	$\alpha(/{^\circ}\text{C})$	$K(\text{W}/\text{mk})$		
Al/m	70	0.31	23×10^{-6}	204		
ZrO ₂ /m	151	0.2882	10×10^{-6}	2.09		
G-1195N/p	63	0.30	1.2×10^{-4}	0.17		

把两点边值问题转化为包含待定初始参数的初值问题,然后采用 Runge-Kutta 方法对初值问题积分,并用 Newton-Raphson 法不断调整未定的初始参数,使得初值问题的解逐渐满足终点处的边界条件,从而得到相应的边值问题的解。关于采用打靶法求解的具体实现步骤可以参见文献[12-15]。

数值计算中,考虑梁的中间层为陶瓷氧化锆(Zirconia/ZrO₂)和金属铝(Aluminum/Al)两相材料制成的功能梯度材料(记为 ZrO₂/Al),上、下表层为压电材料 G-1195N。其组份的材料物性参数列入表 1^[6,7]。

为了验证上述理论分析和计算程序的正确性,在将压电-功能梯度梁退化为均匀各向同性梁的情况下($n = 0, \eta = 0$)的所得数值结果与已有结果进行了比较。在均匀升温情况下($T_r = 1$),表 2 给出了由本文计算获得的无量纲临界屈曲温度 $\tau_{cr} = 12\delta^2\alpha_c T_{cr}$ 与文献[14]结果的比较。可以看出,两者吻合较好。

图 1 为 FGM 单层梁($\eta = 0$)在均匀升温下($T_r = 1$)热屈曲临界温度 τ_{cr} 与长细比参数 δ 之间的关系曲线。其中 Euler 梁的结果由 Timoshenko 梁退化得到,即在式(2)中令 $B = 0$ 得到。可以看出, Euler 梁的热屈曲临界温度与细长比无关,而 Timoshenko 梁的热屈曲临界温度随细长比增加而

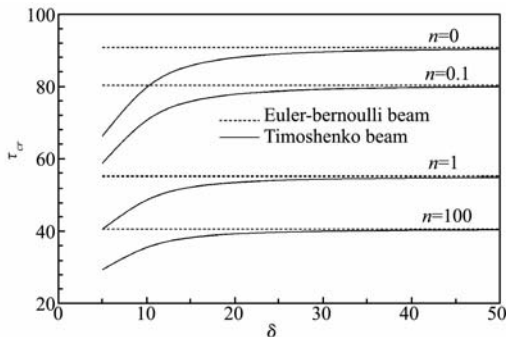


图 1 均匀升温下 FGM 梁的热屈曲临界升温与长细比的关系曲线($\eta = 0, T_r = 1$)
Fig.1 Characteristic curves of aspect ratio δ versus critical temperature rise of FGM beam uniform temperature rise

表 2 具有不同长细比梁的无量纲临界升温值
Tab.2 Non-dimensional critical temperature rise of a pinned-pinned beam for different values of δ

	δ	5	10	15	20	30	
		本文结果	Euler 梁	39.478	39.478	39.477	39.477
		Timoshenko 梁	28.796	35.435	37.469	38.298	39.286
文献[14]	Euler 梁	39.478	39.478	39.478	39.478	39.478	
结果	Timoshenko 梁	28.797	35.436	37.476	38.301	39.361	

表 3 临界载荷曲线(11)中的参数 τ_{0cr}, Φ_{0cr}
Tab.3 Parameters τ_{0cr} and Φ_{0cr} in the critical load curves of Eq. (11)

		$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 100$
		$T_r = 1$	τ_{0cr}	78.82	55.24	45.58
	Φ_{0cr}	44.37	34.99	28.84	26.78	21.79
$T_r = 5$	τ_{0cr}	67.80	38.68	30.96	29.15	24.30
	Φ_{0cr}	44.37	34.99	28.84	26.78	21.79
$T_r = 10$	τ_{0cr}	32.00	11.38	8.680	8.050	6.630
	Φ_{0cr}	44.37	34.99	28.84	26.78	21.79
$T_r = 20$	τ_{0cr}	19.28	6.040	4.570	4.230	3.380
	Φ_{0cr}	44.37	34.99	28.84	26.78	21.79

增加,最终趋于 Euler 梁的热屈曲临界温度。

这里,影响结构屈曲的载荷参数有升温 τ 和电压 Φ 。因此,这是双载荷参数下的稳定性问题。临界载荷是一条曲线,称为稳定边界。计算结果表明,临界载荷曲线为下列直线:

$$\Phi/\Phi_{0cr} + \tau/\tau_{0cr} = 1 \quad (11)$$

式中 τ_{0cr} 和 Φ_{0cr} 分别是 $\Phi = 0$ 和 $\tau = 0$ 情况下的临界载荷参数。表 2 中给出了对应不同陶瓷体积分指数 n 和上下表面升温比值 T_r 值条件下直线(11)的截距 τ_{0cr} 和 Φ_{0cr} 。图 2 所示,临界载荷曲线将载荷空间分为稳定区域和不稳定区域两部分。

图 2 给出了不同无量纲升温下梁的中心无量纲挠度与外加无量纲电压之间的过屈曲平衡路径。结果表明,增加升温减小了临界屈曲电压增大了过屈曲挠度。图 3 给出了非均匀升温下梁的中心无量纲弯矩 $m(0.5)$ 与无量纲电压之间的特征关系曲线。结果表明,在屈曲前只有非均匀升温对弯矩有贡献,而且不随电压变化。在屈曲后,由于梁的轴线离开原来直线平衡状态,由电压产生的电轴力也会产生弯矩,而且随着过屈曲变形的增加而迅速增加。

图 4 给出了同时受热-电载荷作用的压电功能梯度材料梁对应于不同梯度材料参数 n 的过屈曲平衡路径。可以看出,无量纲电压一定时, n 值越大,临界电压减小,无量纲挠度增大。这是由于随着 n 的增大金属含量增大,梁的弯曲刚度减小的缘

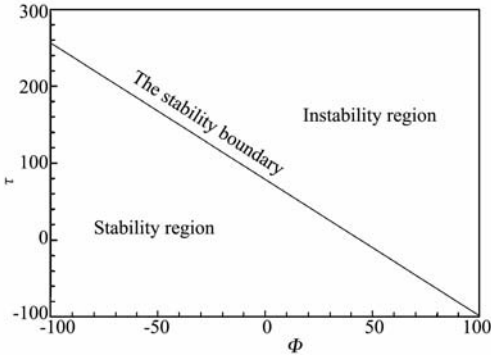


图 2 热 - 电载荷空间中的临界载荷曲线 ($\delta = 20$)
Fig. 2 Curves of critical load in the thermo-electric load space

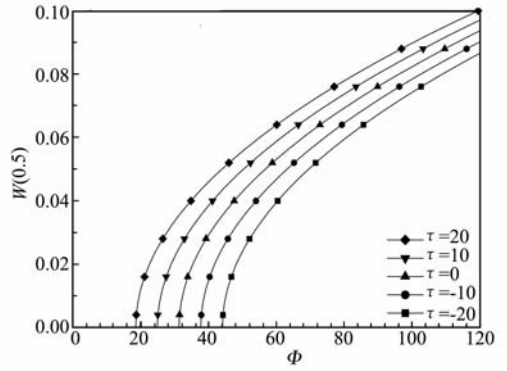


图 3 均匀升温下梁的过屈曲中心挠度与无量纲电压之间关系曲线 ($n = 1, T_r = 1, \delta = 20$)
Fig. 3 Characteristic curves of central non-dimensional deformation versus non-dimensional voltage of FGM beam subject to uniform temperature field

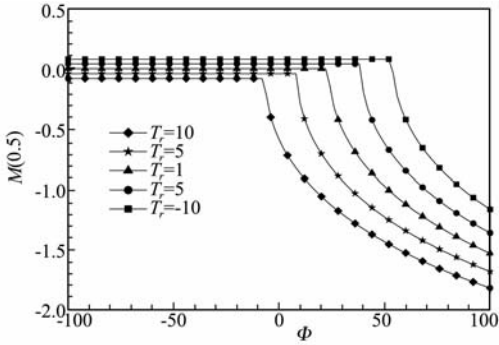


图 4 均匀升温下无量纲弯矩与无量纲电压之间的关系曲线 ($n = 5, \tau = 10, \delta = 20$)
Fig. 4 Curves of central non-dimensional moment versus non-dimensional voltage subject to uniform temperature rise

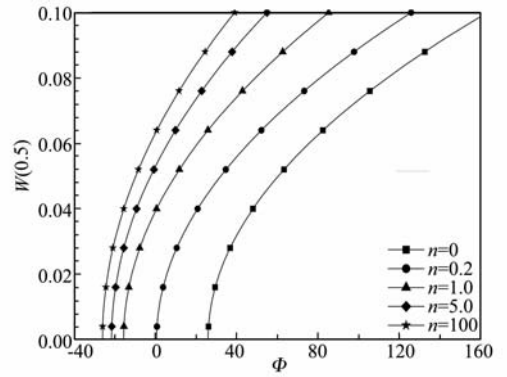


图 5 无量纲中心挠度与无量纲电压的关系曲线 ($T_r = 15, \tau = 10, \delta = 20$)
Fig. 5 Characteristic curves of central non-dimensional deformation versus non-dimensional voltage

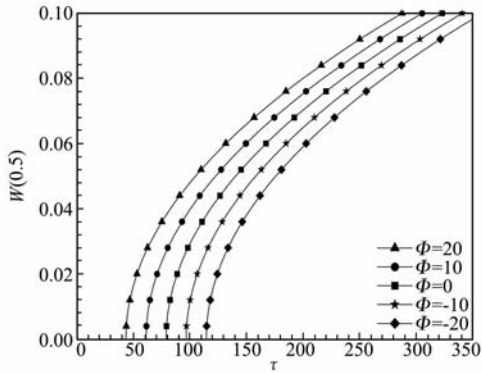


图 6 无量纲中心挠度与无量纲升温之间的关系曲线 ($n = 0, T_r = 1, \delta = 20$)
Fig. 6 Characteristic curves of central non-dimensional deformation versus non-dimensional temperature rise

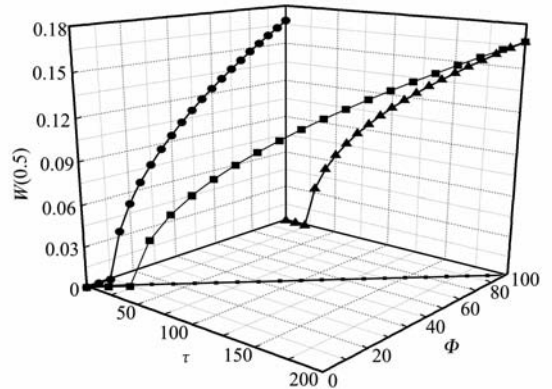


图 7 梁的过屈曲中心挠度与无量纲温度、电压之间关系曲线 ($T_r = 1, n = 0, \delta = 20$)
Fig. 7 Characteristic curves of central non-dimensional deformation versus non-dimensional voltage, non-dimensional temperature of FGM beam subject to uniform temperature field

故。要指出的是,在非均匀升温参数为 $T_r=15, \tau=10$ 时,临界电压为负值。这一结果也可以由式(11)获得。图 5 给出了均匀升温下不同无量纲电压对应的无量纲挠度 $W(0.5)$ 与无量纲升温 τ 之间的过屈曲平衡路径。显然,通过对上下压电层的反向驱动 ($\phi < 0$),可以减小或延缓温度载荷下的热屈曲。在 $\phi = 0$ 时,所得结果为上下对称粘贴压电层的均匀材料梁的热过屈曲平衡路径。

为了反映温度载荷和电压共同对梁的过屈曲变形的贡献,图 6 给出了均匀材料压电层合梁的无量纲中心挠度随着无量纲升温 τ 和无量纲电压 ϕ 连续变化的过屈曲平衡路径。曲线在 $\tau - W(0.5)$ 和 $\phi - W(0.5)$ 平面内的投影分别表示温度和电压

对过屈曲变形的贡献。图中三条曲线都具有分叉解的特点,即过屈曲解是临界载荷点处从原始平衡状态分叉出去的。

4 结 论

本文分析了贴压电层的功能梯度 Timoshenko 梁在热-电载荷共同作用下的过屈曲问题。在数学模型建立中精确考虑轴线伸长和一阶横向剪切变形,通过采用打靶法数值求解所得强非线性边值问题,得到两端固定的压电-FGM层合梁在横向均匀电场和非均匀升温时的屈曲及过屈曲数值解。针对本文算例的模型,由 Timoshenko 梁理论分析和本文的数值结果可以得到如下结论:

(1) 无量纲电压一定时,材料性质梯度变化参数 n 值越大,临界电压减小,无量纲挠度增大。这是由于随着 n 的增大金属含量增大,梁的弯曲刚度减小的缘故。

(2) 得到了用无量纲电压和温度参数定义载荷参数空间 (τ, Φ) 中,给出反映结构失稳的临界载荷曲线或稳定边界,该曲线为近似的直线,它将载荷空间分为稳定区域和不稳定区域两部分。

(3) 通过施加电压在压电层产生拉应力可以有效地提高梁的热屈曲临界载荷,延缓热过屈曲发生。因此,可以通过对上下压电层的反向驱动 $(\Phi < 0)$ 来调整结构的热弹性过屈曲变形。

(4) 由于材料在横向的非均匀性,即使在均匀升温 and 均匀电场作用下,也会产生拉-弯耦合效应。但是,对于两端固定的压电-功能梯度材料梁,在横向非均匀升温下过屈曲变形仍然是分叉形的^[15]。

参考文献(References):

[1] Crawley E F, J de Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures[J]. *AIAA Journal*, 1987, **25**(10):1373-1385.

[2] Zhou Y H, Wang J Z, Zheng X J. Vibration control of variable thickness plates with piezoelectric sensors and actuators based on wavelet theory[J]. *J Sound and Vibration*, 2000, **237**(3):395-410.

[3] Xia X K, Shen H S. Vibration of postbuckled FGM hybrid laminated plates in thermal environment[J].

Engineering Structures, 2008, **30**(9):2420-2435.

- [4] Xia X K, Shen H S. Nonlinear vibration of post-buckled FGM plates with shear deformation[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, **21**(2):120-125.
- [5] Shen H S. Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings[J]. *Int J of Solids and Structures*, 2005, **42**(23):6101-6121.
- [6] 丁丽霞,刘 玮. 压电驱动的功能梯度弹性薄板的屈曲[J]. *功能材料*, 2006, **37**(8):1229-1238. (DING Lixia, LIU Wei. The buckling analysis of functionally gradient thin elastic plate bonded piezoelectric patches[J]. *Journal of Functional Materials*, 2006, **37**(8):1229-1238. (in Chinese))
- [7] 刘 玮,闫 铂. 四边简支压电功能梯度矩形薄板的屈曲[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2006, **44**(6):845-850. (LIU Wei, YAN Bo. Buckling analysis of simply-supported piezoelectric functionally gradient rectangular thin plate[J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2006, **44**(6):845-850. (in Chinese))
- [8] 林启荣,刘正兴,王宗利. 电场作用下压电层合梁的分析[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(9):969-975. (LIN Qi-rong, LIU Zheng-xing, WANG Zong-li. Analysis of beams with piezoelectric actuators [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(9):969-975. (in Chinese))
- [9] 于 涛,仲 政. 功能梯度压电悬臂梁的弯曲分析[J]. *中国科学 G 辑*, 2006, **36**(5):518-529. (YU Tao, ZHONG Zheng. Bending analysis of a functionally graded piezoelectric cantilever beam [J]. *Science in China Series G*, 2006, **36**(5):518-529. (in Chinese))
- [10] 曹志远,程国华. 功能梯度材料板件三维分析半解析梯度有限元法[J]. *计算力学学报*, 2007, **24**(6):865-868. (CAO Zhi-yuan, CHENG Guo-hua. Semi-analytical gradient finite element method for 3D analyses of functionally graded material plates [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(6):865-868. (in Chinese))
- [11] 戚奎成,黄 海. 压电桁架作动器/传感器优化配置算法研究[J]. *计算力学学报*, 2008, **25**(6):827-832. (XIAN Kui-cheng, HUANG Hai, Research on algorithm of optimal actuator/sensor location for piezoelectric truss[J]. *Chinese Journal of Computational*

Mechanics, 2008, **25**(6):827-832. (in Chinese))

[12] Shirong Li, Romesh C Batra, Lansheng Ma, Vibration of thermally post-buckled orthotropic circular plate[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2007, **30**(1): 43-57.

[13] Li S R, Zhou Y H. Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko beams under thermomechanical loadings[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, **26**(9): 861-872.

[14] LI Shi-rong, ZHANG Jing-hua, ZHAO Yong-gang. Thermal post-buckling of functionally graded material timoshenko beams [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2006, **27**(6):709-714.

[15] LI Shi-rong, SU Hou-de, CHENG Chang-jun. Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2009, **30**(8):1-14.

Thermal post-buckling of functionally graded material timoshenko beams with surface-bonded piezoelectric layers

SU Hou-de^{1,3}, LI Shi-rong^{*1,2}, GAO Ying¹

(1. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China;

3. Lanzhou Petroleum Machinery Research Institute, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Post-buckling of functionally graded material Timoshenko beams with surface-bonded piezoelectric layers subjected to temperature rise and electric field is studied. By accurately considering the axial extension and transverse shear deformation in the sense of theory of Timoshenko beam, geometrically nonlinear governing equations, for functionally graded beams subjected to thermo-electro-mechanical loadings were formulated. In the analysis, it was assumed that the material properties of the beam vary continuously as a power function of the thickness coordinate and that the piezoelectric layers are isotropic and homogenous. By using a shooting method, the obtained nonlinear boundary value problem was numerically solved and buckling and post-buckling response of the beams with the both ends fixed and subjected to transversely non-uniform heating and uniform electric field were presented. Characteristic curves of the post-buckling deformation of the beam varying with thermal load, the electrical load, and the power law index are plotted. Numerical results show that the tensional force produced in the piezoelectric layers by the voltage can efficiently increase the critical buckling temperature and defer the thermal post-buckling to occur. Due to being transversely non-uniform in the material properties, there exists tension-bending coupling effects in the beam even in uniform temperature rise in the thickness direction. However, for the piezoelectric-FGM beam with the two ends fixed the post-buckling is also bifurcation form under transversely non-uniform temperature rise.

Key words: functionally graded material; Timoshenko beam; laminated piezoelectric beam; shoot method; thermal buckling; buckling voltage