

用隐式方法和 WENO 格式 计算悬停旋翼跨声速无粘流场

徐丽^{1,2}, 杨爱明³, 丁珏¹, 翁培奋^{*1}

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2. 上海电力学院 数理系, 上海 200090;
3. 复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200434)

摘要:寻找一种能够准确计算以涡为主要特征的复杂流场和克服尾迹耗散问题的数值方法,一直是旋翼空气动力学研究的热点和难点。本文发展了一种基于高阶迎风格式计算悬停旋翼无粘流场的隐式数值方法。无粘通量采用 Roe 通量差分分裂格式,为提高精度,使用五阶 WENO 格式进行左右状态插值,并与 MUSCL 插值进行比较。为提高收敛到定常解的效率,时间推进采用 LU-SGS 隐式方法。用该方法对一跨声速悬停旋翼无粘流场进行了数值计算,数值结果表明 WENO-Roe 的激波分辨率高于 MUSCL-Roe,体现出了格式精度的提高对计算结果的改善,LU-SGS 隐式方法的计算效率比 5 步 Runge-Kutta 显式方法的高。

关键词:旋翼;悬停;Euler 方程;WENO 格式;Roe 格式;隐式格式

中图分类号:V211.3 **文献标识码:**A

1 引言

悬停旋翼的绕流与固定翼的绕流有很大不同:固定翼的展向来流是均匀的,而旋翼展向来流速度大小与当地的旋转半径成正比,在跨声速情况下,靠近桨尖处的流动为跨声速流动,而靠近桨毂处的流动却为不可压缩流动;固定翼产生的翼尖涡和尾涡随来流向后发展,而旋翼产生的桨尖涡和尾涡却始终盘旋在旋翼的下方,主宰着整个旋翼流场,对旋翼的气动力具有重要影响。寻找一种能够准确计算以涡为主要特征的复杂流场和克服尾迹耗散问题的数值方法,一直是旋翼空气动力学研究的热点和难点^[1-4]。

旋翼绕流目前采用的数值方法,由于存在截断误差和人工粘性会带来涡量的耗散,因此采用高精度和高分辨率的数值方法来求解控制方程以提高捕捉尾涡能力是十分必要的。本文将尝试采用具有高分辨率的 Roe 通量差分分裂格式^[5-7]离散对流项,为提高精度,采用改进的五阶 WENO

(Weighted Essentially Non-oscillatory)格式(WENO-Z)^[8]进行左右状态插值,从而构成 WENO-Roe 格式。尽管 Euler 方程不能描述涡的生成和发展,但是 Roe 格式自身包含的耗散项在一定程度上却具有和物理粘性相当的作用。

WENO 格式是在 ENO 格式^[9]的基础上发展而来的,它不仅具有 ENO 格式的基本无振荡特性,而且还能保证在极值点附近不降阶;在相同的模板条件下,如果 ENO 格式的精度为 r 阶,那么 WENO 格式的精度则具有 $2r-1$ 阶。自从 WENO 格式发展出就一直被学者广泛使用和研究,尤其是 Jiang 和 Shu 发展的 WENO 格式(WENO-JS)^[10],它的加权因子是通过一种新的测量模板上数值解的方法而得出的。WENO-M 是 Henrich 等^[11]发展的一种可以在临界点处获得最佳阶的 WENO 格式,但计算效率比 WENO-JS 的要低。Borges 等^[8]发展了 WENO-Z 格式,主要是通过一种新的光滑因子组合对 WENO-JS 中的无振荡加权进行了改进,一方面,得到的解同 WENO-M 的一样好;另一方面,计算效率同 WENO-JS 的相当,比 WENO-M 的要节省 25% 的 CPU 计算时间。因此,本文采用五阶 WENO-Z 对左右状态量进行重构。

收稿日期:2008-11-04;修改稿收到日期:2009-01-17.

基金项目:上海市自然科学基金(09ZR1411400);

上海市重点学科建设项目(S30106);

上海市科委基金(071605123)资助项目.

作者简介:徐丽(1977-),女,博士生;

翁培奋*(1964-),男,博士,教授

(E-mail: pfweng@shu.edu.cn).

2 旋转坐标系下的控制方程

在固连于悬停旋翼的非惯性旋转坐标系下观察流体的绝对流动,流场是定常的。将控制体固连于旋转坐标系,积分形式的 Euler 方程为^[12,13]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{W} dV + \iint_{\partial V} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_V \mathbf{G} dV = 0 \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})_x \\ \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})_y \\ \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}_b) \\ \rho u(\mathbf{q} - \mathbf{q}_b) + p\mathbf{I}_x \\ \rho v(\mathbf{q} - \mathbf{q}_b) + p\mathbf{I}_y \\ \rho w(\mathbf{q} - \mathbf{q}_b) + p\mathbf{I}_z \\ \rho H(\mathbf{q} - \mathbf{q}_b) + p\mathbf{q}_b \end{bmatrix}$$

式中 $\rho, (u, v, w), p, E, H$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为流体的密度、流体的绝对速度 \mathbf{q} 在旋转坐标系下的分量、压强、总能、总焓和旋转坐标系的角速度矢量, \mathbf{q}_b 为控制体表面的绝对速度, $(\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z)$ 为旋转坐标系三个坐标轴方向的单位矢量。

3 数值方法

3.1 离散框架

把方程(1)应用到网格单元 (i, j, k) 所在的控制体上,可以得到半离散的常微分方程:

$$V_{i,j,k} \frac{d\mathbf{W}_{i,j,k}}{dt} + \mathbf{Q}_{i,j,k} = 0 \quad (2)$$

并且

$$\mathbf{Q}_{i,j,k} = \mathbf{R}_{i,j,k} + V_{i,j,k} \mathbf{G}_{i,j,k} \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_{i,j,k} = \sum_{f=1}^6 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})_f$$

方程(2)的求解采用高效的隐式 LU-SGS^[4,12] 方法。

具体地,对式(2)进行隐式离散,最终的离散形式为

$$\begin{aligned} LHS &= (L + D + U)\Delta\mathbf{W}_{i,j,k} \approx \\ &(L + D)D^{-1}(U + D)\Delta\mathbf{W}_{i,j,k} = RHS \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\Delta\mathbf{W}_{i,j,k} = \mathbf{W}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{W}_{i,j,k}^n$$

$$RHS = -\mathbf{R}_{i,j,k}^n - V_{i,j,k} \mathbf{G}_{i,j,k}^n$$

L, D 和 U 算子定义为

$$L = -(\mathbf{A}_{i-1,j,k}^+ + \mathbf{B}_{i,j-1,k}^+ + \mathbf{C}_{i,j,k-1}^+)$$

$$D = \left(\frac{V_{i,j,k}}{\Delta t} + \sigma\lambda_A + \sigma\lambda_B + \sigma\lambda_C \right) \mathbf{I}$$

$$U = (\mathbf{A}_{i+1,j,k}^- + \mathbf{B}_{i,j+1,k}^- + \mathbf{C}_{i,j,k+1}^-)$$

\mathbf{I} 为单位矩阵,并且

$$\mathbf{A}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \pm \sigma\lambda_A), \mathbf{B}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \pm \sigma\lambda_B)$$

$$\mathbf{C}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{C} \pm \sigma\lambda_C)$$

λ_A, λ_B 和 λ_C 为 Jacobian 矩阵:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})}{\partial \mathbf{W}} \Big|_\xi, \mathbf{B} = \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})}{\partial \mathbf{W}} \Big|_\eta, \mathbf{C} = \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S})}{\partial \mathbf{W}} \Big|_\zeta$$

的谱半径, σ 取大于 1 的常数, 本文取 1.05, n 为时间方向的层数。

式(4)的求解可以分为两个过程:

$$(L + D)\Delta\mathbf{W}_{i,j,k}^* = RHS \quad (5)$$

$$(U + D)\Delta\mathbf{W}_{i,j,k} = D\Delta\mathbf{W}_{i,j,k}^* \quad (6)$$

方程(5,6)的求解分别称为前向扫描和后向扫描。在前向扫描过程中,单元 (i, j, k) 处的解只依赖于单元 $(i-1, j, k), (i, j-1, k), (i, j, k-1)$ 的值。因此,沿 $i+j+k = const$ 的面往 $const$ 增大的方向推进求解可以直接得到单元 (i, j, k) 处的解,而不需矩阵求逆,极大地提高了计算效率;后向扫描过程与此方向正好相反,其扫描过程沿 $const$ 减小的方向进行。在两个扫描过程中,起始值(即虚拟单元上的值)直接赋 0。

3.2 通量计算

3.2.1 Roe 格式

无粘通量采用基于迎风型通量差分分裂(FDS)的 Roe 近似 Riemann 求解器,它是一种高分辨率格式。交界面 $(i+1/2, j, k)$ 处的数值通量为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i+1/2,j,k} &= \left[\frac{1}{2}(\mathbf{H}_L + \mathbf{H}_R) - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}| (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \right]_{i+1/2,j,k} \end{aligned} \quad (7)$$

式中,脚标 (L, R) 表示交界面处的左右状态量, $\tilde{\mathbf{A}}$ 为 Roe 平均矩阵,用 Roe 平均量表示。

为避免 Roe 格式在求解过程中产生非物理数

值解,通常需要对矩阵 \tilde{A} 的特征值进行熵修正,本文使用 Harten^[14] 熵修正。

3.2.2 WENO 格式

由于 Roe 格式本身是一阶精度的,为提高精度,采用改进的五阶 WENO^[8] 对交界面两边的状态参量进行重构。

以一个标量函数 $q(x)$ 为例进行说明。五阶精度的左边界外推值 $q_{i+1/2}^L$ 的表达式为

$$q_{i+1/2}^L = \omega_0 v_0 + \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 \quad (8)$$

式中 v_k 是通过第 $k(k = 0, 1, 2)$ 个模板 $S_k = (i - k, i - k + 1, i - k + 2)$ 中的单元平均值外推得到的,即

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{6}(2q_i + 5q_{i+1} - q_{i+2}) \\ v_1 &= \frac{1}{6}(-q_{i-1} + 5q_i + 2q_{i+1}) \\ v_2 &= \frac{1}{6}(2q_{i-2} - 7q_{i-1} + 11q_i) \end{aligned} \quad (9)$$

通过非线性 WENO 加权可以得到

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l}, \alpha_0 = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{|\beta_0 - \beta_2|}{\epsilon + \beta_0}\right) \\ \alpha_1 &= \frac{3}{5} \left(1 + \frac{|\beta_0 - \beta_2|}{\epsilon + \beta_1}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{10} \left(1 + \frac{|\beta_0 - \beta_2|}{\epsilon + \beta_2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\epsilon > 0$, 它的引入是为了避免分母为 0, 这里取 $\epsilon = 10^{-6}$ ^[10], 光滑因子 β_k 的表达式为^[8,10]:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12}(q_i - 2q_{i+1} + q_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3q_i - 4q_{i+1} + q_{i+2})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(q_{i-1} - q_{i+1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(q_{i-2} - 2q_{i-1} + q_i)^2 + \frac{1}{4}(q_{i-2} - 4q_{i-1} + q_i)^2 \end{aligned}$$

根据对称性可以得到右状态参量 $q_{i+1/2}^R$ 。

考虑到使用守恒变量进行重构可能会引起比较大的数值振荡^[15], 并且这种振荡即使网格划分的非常细也不可能消除, 因此本文对原始变量进行重构, 即把式(8)应用于每个原始变量。

4 网格布局及边界条件

本文的计算模型是被广泛采用的 Caradonna 旋翼^[16], 该旋翼包含两个桨叶。网格拓扑结构为 O-H 型: 绕弦向为 O 型, 沿展向为 H 型。图 1 为计算网格的示意图。绕旋翼翼型的 O 网格的外边界为矩形, 且在对称面上的网格分布一致, 方便实施旋转对称性边界条件; 每一个翼型的 O 网格都弯成近似圆柱形, 但是翼型部分被保持, 该网格的拓扑结构符合流动的物理特征。网格的大小为 145(弦向) \times 41(法向) \times 61(展向), 桨叶在展向分布 37 个网格点。绕翼型的 O 网格的矩形外边界上的网格单元分布为: 矩形的左右边各有 48 个单元, 上下边各有 24 个单元。

由于是无粘计算, 所以旋翼表面采用无穿透条件。两个对称面上的边界条件及其虚拟网格点无需插值即可完成, 法向及展向最外层采用远场边界条件, 本文利用 Riemann 不变量来处理。

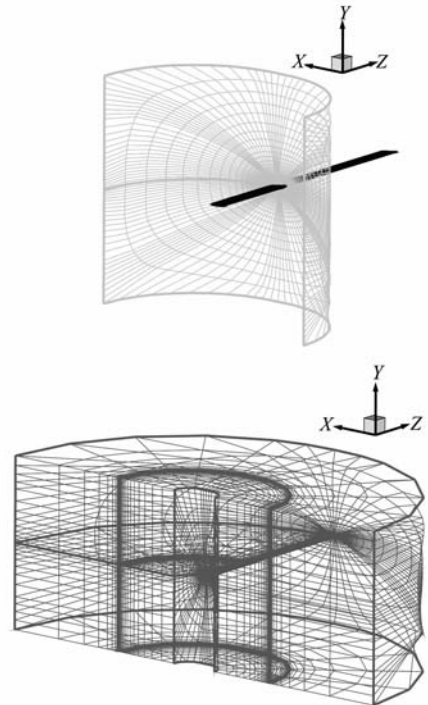


图 1 旋翼网格示意图

Fig. 1 Schematic cylindrical mesh for a hovering rotor blade

5 计算结果

本文对 Caradonna 旋翼的一个跨声速状态进行了数值模拟,总距角为 8 度,桨尖马赫数为 0.877。图 2 为桨叶表面压力系数分布与实验数据的对比,计算结果和实验结果在各个径向站位吻合

较好。总体上来说,WENO 格式的计算结果要优于 MUSCL 格式的计算结果,在展长 80%,89%和 96%处,WENO-Roe 的激波分辨率明显高于 MUSCL-Roe,体现出了格式精度的提高对计算结果的改善。

图 3 给出了收敛到 4 个量级的残值收敛历程

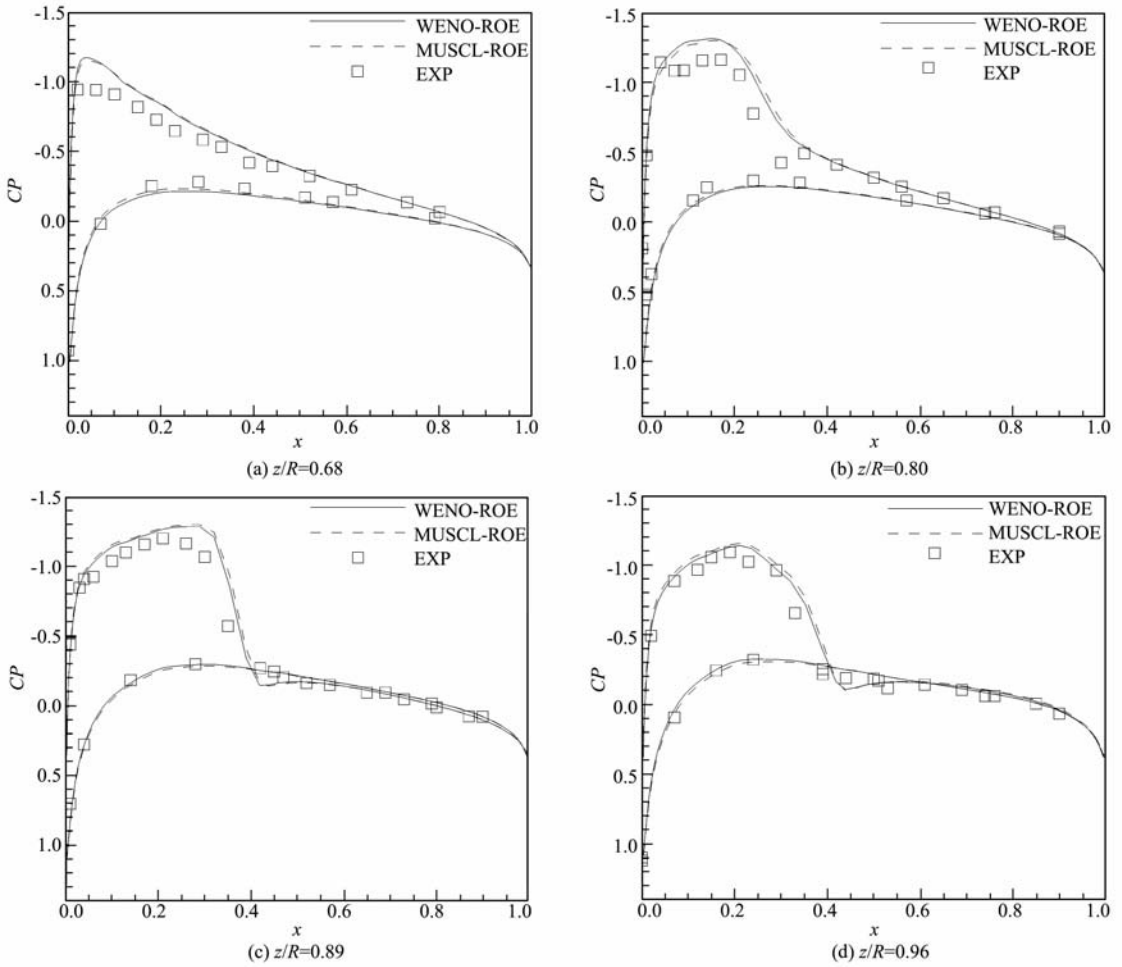


图 2 旋翼桨叶表面的计算和实验压力系数分布

Fig. 2 Computed and experimental pressure coefficient on the surface of a rotor blade

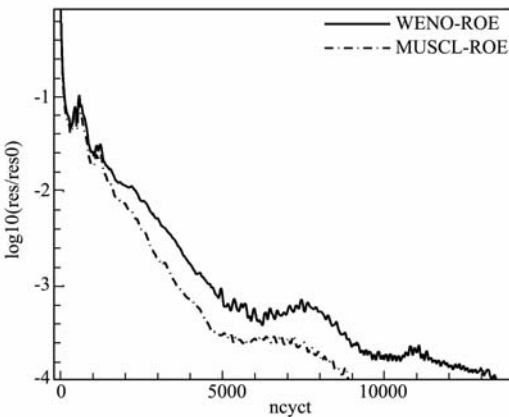


图 3 残值收敛曲线

Fig. 3 Residual convergence curves

曲线,从图中可以看出,WENO 格式的收敛性略差于 MUSCL 格式。从计算效率角度来看,采用 LU-SGS 隐式格式在双核 CPU 3.00 GHz 和内存 2 GB 的电脑上进行计算,MUSCL 格式残值收敛到 4 个量级用时 12 小时 19 分钟,WENO 格式用时 22 小时 38 分钟;就 WENO 格式而言,时间离散采用 5 步 Runge-Kutta^[17] 显示格式需用时约 47 小时 36 分钟,可见 LU-SGS 隐式格式的计算效率要比 5 步 Runge-Kutta 显示格式的大为提高。

6 结 论

本文发展了一种基于五阶 WENO 迎风格式的计算悬停旋翼无粘流场的隐式数值方法,时间推进采用 LU-SGS 隐式方法;无粘通量采用具有高分辨率的 Roe 格式,与计算固定翼时不同,Roe 格式计及了网格旋转速度。为提高精度,采用五阶 WENO 格式对左右状态量进行重构。用该方法成功地对悬停旋翼的一跨声速无粘流场进行了计算。计算结果表明:五阶 WENO 格式比 MUSCL 格式更能有效地捕捉激波,体现出了格式精度的提高对计算结果的改善;LU-SGS 隐式格式与 5 步 Runge-Kutta 显示格式相比,有更高的计算效率。该方法可进一步推广到旋翼粘性流场的计算中。

参考文献(References):

- [1] Caradonna F X. Developments and challenges in rotorcraft aerodynamics[R]. AIAA-2000-0109.
- [2] Hariharan N. Rotary-wing wake capturing: high-order schemes toward minimizing numerical vortex dissipation[J]. *Journal of Aircraft*, 2002, **39**(5): 822-829.
- [3] 徐国华,招启军. 直升机旋翼计算流体力学的研究进展[J]. 南京航空航天大学学报, 2003, **35**(3): 338-344. (XU Guo-hua, ZHAO Qi-jun. Advances in computational fluid dynamics of helicopter rotor[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003, **35**(3): 338-344. (in Chinese))
- [4] 韩忠华. 旋翼绕流的高效数值计算方法及主动流动控制研究[D]. 西北工业大学, 2007. (HAN Zhong-hua. Efficient method for simulation of viscous flows past helicopter rotors and active flow control[D]. Northwestern Polytechnical University, 2007. (in Chinese))
- [5] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**: 357-372.
- [6] Gross A, Fasel H F. High-order-accurate numerical method for complex flows[J]. *AIAA Journal*, 2008, **46**(1): 204-214.
- [7] 王景焘,于长平,刘凯欣. 几种差分格式对于流体弹塑性模型的适应性分析[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(1): 1-6. (WANG Jing-tao, YU Chang-ping, LIU Kai-xin. A feasibility analysis of several numerical schemes for solving hydro-elastic-plastic problems [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(1): 1-6. (in Chinese))
- [8] Borges R, Carmona M, Costa B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, **227**: 3191-3211.
- [9] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **71**: 232-303.
- [10] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**: 202-222.
- [11] Henrick A K, Aslam T D, Powers J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **207**: 542-567.
- [12] 杨爱明. 基于嵌套网格的直升机旋翼流场雷诺平均 Navier-Stokes 方程的数值模拟[D]. 西北工业大学, 2000. (YANG Ai-ming. Navier-Stokes computation for a helicopter rotor using chimera grids[D]. Northwestern Polytechnical University, 2000. (in Chinese))
- [13] 刘金花,徐丽,杨爱明. 基于 Navier-Stokes/Kirchhoff 方程的悬停旋翼跨声速气动声学计算[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(6): 834-839. (LIU Jin-hua, XU Li, YANG Ai-ming. Transonic hovering rotor aeroacoustic predictions using Navier-Stokes/Kirchhoff method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(6): 834-839. (in Chinese))
- [14] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, **49**: 357-393.
- [15] Titarev V A, Toro E F. WENO schemes based on upwind and centred TVD fluxes[J]. *Computers and Fluids*, 2005, **34**: 705-720.
- [16] Caradonna F, Tung C. Experimental and analytical studies of a helicopter rotor in hover [R]. NASA TM-81232, 1981.
- [17] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes[R]. AIAA 81-1259.

Numerical simulation on the inviscid flowfield of transonic hovering rotor using implicit method and WENO schemes

XU Li^{1,2}, YANG Ai-ming³, DING Jue¹, WENG Pei-fen^{*1}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China;

2. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China;

3. Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200434, China)

Abstract: The most complex flows in aviation are probably those that occur over rotorcraft. To search one numerical method to exactly predict the rotor wake is an unsolved problem. A high-order upwind scheme is developed to compute the inviscid flow field of a helicopter rotor in hover using implicit finite volume method. Roe Riemann solver which is a high-resolution scheme and a flux-difference splitting scheme is adopted to compute inviscid flux. For better accuracy, 5th order weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes are adopted to interpolate higher order left and right states across a cell interface, and compared with MUSCL schemes. To improve the efficiency and convergence to steady state, the LU-SGS implicit algorithm is used. The performance of the schemes is investigated in a transonic inviscid flow around hovering rotor. The results reveal that WENO-Roe has the great capabilities to capture shock with higher resolution than MUSCL-Roe, which shows the advantage of increasing precision, and the implicit LU-SGS scheme is more efficient than 5th order Runge-Kutta method.

Key words: rotor; hover; Euler equations; WENO schemes; Roe scheme; implicit scheme