

一种 RCM 有限元带宽优化改进算法

杜宪亭¹, 夏禾^{*1}, 龙佩恒², 余竹¹, 王少钦¹

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 北京建筑工程学院 土木工程系, 北京 100044)

摘要:应用 RCM(Reverse Cuthill-Mckee)算法进行带宽优化时存在优化结果不稳定的问题,通过对算法进行系统分析发现,正序排列过程中非完全依靠节点之间的拓扑关系是问题的关键。本文在考虑层、联结度判据基础上,通过新增列高和判据进行节点正序排列,解决了 RCM 算法存在的问题,通过实际结构算例验证了改进后的 RCM 算法的稳定性,并获得了列高和更小的优化方案,实现了节省计算机内存和提高运算效率的目的。

关键词:有限元;带宽优化;改进 RCM 算法;列高和;拓扑关系

中图分类号:O242.21;T115 **文献标识码:**A

1 引言

在应用有限元方法分析土木工程结构时,结构总体刚度矩阵呈对称、稀疏带状分布的特点。为了减小存储空间与提高计算效率,常采用一维等带宽或者变带宽方法存储结构的总体刚度矩阵。而在大型结构的精细化分析与非线性分析过程中,网格划分后的节点与单元数量数以万计,特别是在结构阶段施工分析时,结构形状与施工步骤的变化使结构单元与节点数量不断变化,方程组需重新编号。如何高效解决此类问题一直是国内外学者研究的热点^[1-6]。

本文提出一种可以降低带宽和列高和的 RCM 带宽优化改进算法,能够节省计算机内存,缩短求解时间,在解决大型复杂结构问题时,效果特别明显。

2 RCM 算法基本原理与缺陷

在有限元分析中,一般是通过将各个自由度编号重新排列近似等效为单元节点号进行优化。自由度号差用节点号差近似代替,自由度对应的带宽和列高和用节点对应的带宽和列高和代替,从而使带宽优化问题转化为节点重新排序问题^[7-9]。若节点自由度相同且采用一维变带宽方法表达结构刚

度矩阵,需要存储上三角部分元素值个数为

$$TN = \frac{(NDF+1) \cdot NDF}{2} \cdot NNODE + NDF \cdot NDF \cdot (SUM - NNODE) \quad (1)$$

式中 NDF 为节点自由度数,NNODE 为节点数,SUM 为列高和。列高和越小意味着带宽越小、需要存储的数据越少。例如,由 N 个节点组成的结构,其相应的节点号排序方案有 N! 种;但通过将所有方案全部展开,分别计算相应的带宽与列高和,然后比较各个方案的优劣得到优化方案的方法计算量太大。目前,解决这一问题的经典优化方法有 CM (Cuthill-Mckee)法和 RCM(Reverse Cuthill-Mckee)法^[7]。CM 法是从图论的角度出发,将节点之间的拓扑关系,按照一定方法展成一个以某节点为根的树形结构^[10]。结构中有刚度联系的两点相互为邻点,一个节点的邻点数作为该节点的联结度,从联结度较小的点出发,按照联结关系将结构节点分为若干层(层号从小到大编排),然后依据层的优先级和节点联结度(先小后大)进行排序,最后以各层所包含的点数-层宽、节点差以及列高和作为三种由低到高不同优先级的节点排序方案优劣的判别标准。RCM 法是先利用 CM 法排序后,再将节点号全部逆序,此时节点号差不变,而列高和不同(通常变小),然后比较正序、逆序两种方案,取列高和较小的方案。

分别以梁单元组成的混凝土楼房框架结构和高架桥分叉结构为例,阐释应用 RCM 算法的优化过程。从优化结果可以看出,呈现高度对称性的框架结构经优化后得到了唯一的结果见图 1。

收稿日期:2008-10-09;修改稿收到日期:2009-04-14.

基金项目:国家自然科学基金重大研究计划(90715008);比利时-中国政府间合作(BIL07/07)资助项目.

作者简介:杜宪亭(1978-),男,博士生;

夏禾*(1951-),男,教授,博士生导师

(E-mail:hxia88@163.com).

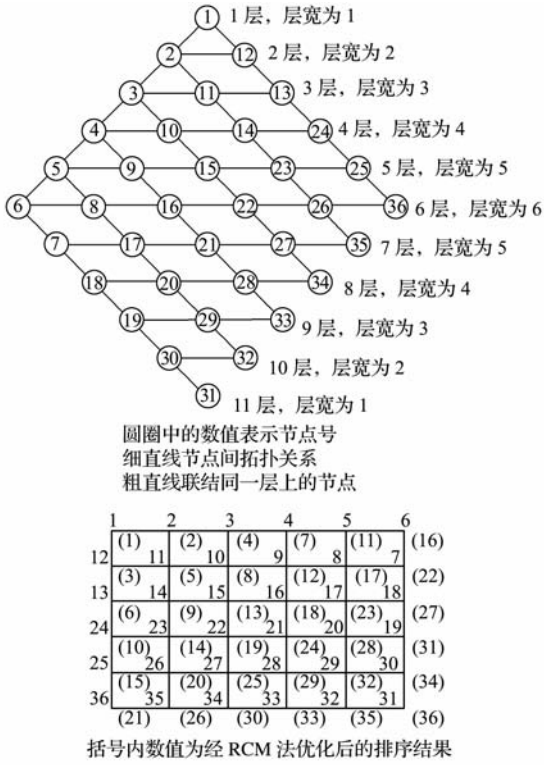


图 1 梁单元框架 RCM 算法优化
Fig. 1 RCM bandwidth optimization of a beam element frame

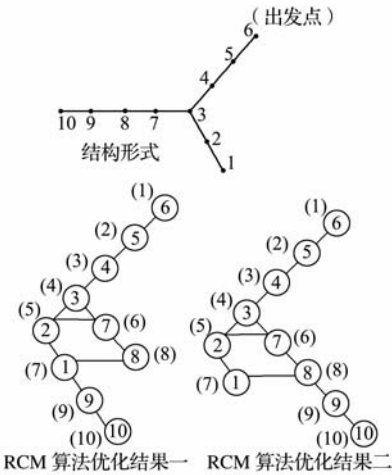


图 2 梁单元分叉结构 RCM 算法优化
Fig. 2 RCM bandwidth optimization of a beam element structure with branches

而非对称布置的高架桥分叉结构则得到了两种不同的结果见图 2,且这两种优化结果的列高和并不相同。可见,虽然 RCM 算法执行效率较高,但从同一节点出发得到优化结果并不唯一,即存在稳定性问题。如何通过进一步优化,使其稳定性进一步提高是改进 RCM 的关键。

3 改进的 RCM 算法

分析图 2 优化结果发现,从节点 6 出发,如果节点 3 和节点 7 组成的单元输入先于节点 3 和节

点 2 组成的单元,加之节点 7 和节点 2 联结度同为 2,就得到优化方案 1,反之则得到优化方案 2。因为方案 2 的节点列高和要小于方案 1,所以方案 2 为最优方案。由此可见,RCM 算法进行节点正序排列时,在各点联结度相同的情况下,依赖于单元与节点的初始输入顺序,而非节点间的拓扑关系,由此导致同一个结构从同一节点出发得到的结构编号并不唯一。在层和联结度相同的情况下,如何合理确定节点排序优先次序,成为解决问题的关键,而得到最小列高和是进行优化的主要目标。

改进的 RCM 算法是基于以下思路提出的:当仅根据层与联结度无法确定新排节点时,从有利于后继节点排序后可得到最优结果为出发点,将层与联结度相同的节点作为新的出发点,对尚未编号的节点按照 CM 法进行排序,分别计算这些新排序节点相应的列高和,依据下一新点到终点的列高和最小者优先的原则进行排序。

改进的 RCM 算法主要涉及以下步骤:

(1) 读取数据文件,得到需要优化网格的节点数 Nump、单元类型与节点信息,建立统计节点联结度的 Connection 数组,存放各节点邻点的 Content 数组以及相对应的定位 Position 数组。

(2) 对存放邻点信息的 Content 数组中的元素在所属节点范围内按照按照联结度从小到大重新排列。

(3) 按照节点之间是否存在拓扑关系,得到重新排列节点数组 Node_NumberOpt,从而将结构分为若干组,得到分组总数 Num_Com 以及各分组元素个数信息数组 Num_Group。

(4) 对每个分组进行循环排序。首先按照联结度大小确定出发点数组 Node_Start;接着分别以 Node_Start 中的元素为出发点,按照 CM 法进行排序,依据相应的最大层宽、节点差、列高和确定最佳出发点 Opt_Node;然后将最佳出发点作为起始点,按照修改进后原则,即层、联结度,列高和(有小到大)的优先级进行排序,计算相应的节点和;最后,将节点号逆序,计算逆序节点和并比较大小,取小者作为最后的排序结果。

图 3 给出了改进后的正排序流程。

其中变量含义与功能为:Node 数组为存放节点对应的新编号;Node_Temp 数组为临时存放排序后的节点;Group_Temp 数组为存放节点的分组号;Opt_Node 为最佳出发点编号;i 为分组号;

- encoding optimization [J]. *Journal of Hubei Polytechnic University*, 1998, **13**(3):24-29. (in Chinese))
- [7] Cuthill E, Mckee J. Reducing the bandwidth of symmetric sparse matrices[A]. ACM Proc. 24th National Conference[C], 1969:157-172.
- [8] 王秉愚. 有限元法程序设计[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1991. (WANG Bing-yu. *Design of FEM Program*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991. (in Chinese))
- [9] 熊 森. 三维有限元网格计算机辅助生成方法研究 [D]. 哈尔滨:东北林业大学, 2003. (XIONG Sen. Research on computer-aided generation method of three dimensional FE grid [D]. Harbin: Northeast Forestry University, 2003. (in Chinese))
- [10] 江雄心, 万平荣. 三维有限元网格节点编号优化[J]. 工程图学学报, 2008, **4**: 22-26. (JIANG Xiong-xin, WAN Ping-rong. Optimization of node numbering in 3D finite element [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2008, **4**:22-26. (in Chinese))

A modified RCM bandwidth optimizing algorithm for FEM analysis

DU Xian-ting¹, XIA He^{*1}, LONG Pei-heng², YU Zhu¹, WANG Shao-qin¹

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Department of Civil Engineering, Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China)

Abstract: There exists a problem of instability in optimizing bandwidth by RCM(Reverse Cuthill-Mckee) algorithm in finite element analysis. Through systemic analysis on the algorithm, it is found that the key issue results from incomplete dependence on the topological relationship between the nodes during sequential arrangement. The instability of RCM algorithm is solved by increasing the column height sum as a new criterion for node sequential arrangement, on the base of considering layer and number of neighbor nodes as two old criterions. Via a real structure as an example, the stability of the modified RCM Algorithm is verified, an optimized scheme with less column height sum is achieved, and thus the goal is realized for saving computer memory and raising calculation efficiency.

Key words: finite element; bandwidth optimization; modified RCM algorithm; column height sum; topological relationship