

基于初弯曲单元的某弦支穹顶 非线性稳定承载力分析

周臻^{*1,2}, 吴京^{1,2}, 孟少平^{1,2}

(1. 东南大学 混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 南京 210096;
2. 东南大学 城市工程科学国际研究中心, 南京 210096)

摘要:在单元的随动坐标系下,建立了初始弯曲对杆单元轴向刚度影响的计算公式,导出了考虑初始弯曲的非线性杆单元刚度矩阵;从经典的梁-柱理论出发,给出了考虑初始弯曲的非线性空间梁单元切线刚度矩阵推导过程。将建立的初始弯曲单元应用于弦支穹顶结构算例的非线性稳定承载力分析,研究了杆件初始弯曲对结构整体非线性稳定性能的影响,结果表明,杆件初始弯曲的存在会降低结构的整体刚度和极限承载力,而在不同的初始预应力状态下,极限荷载随初始弯曲增加都基本呈线性下降,并且其关系曲线基本平行。本文建立的基于初弯曲单元的非线性分析方法,可推广应用于各种类型空间网格结构的非线性分析,为结构设计方案的选择提供更为科学的依据。

关键词:弦支穹顶;初始弯曲;预应力空间网格结构;非线性稳定;极限荷载

中图分类号:O317;TU394 **文献标识码:**A

1 引言

预应力空间网格结构是将预应力技术与传统空间网格结构相结合的一种结构形式,近些年广泛应用于大型的体育馆、会展厅及候车厅等公共建筑。弦支穹顶结构是单层球面网壳和张拉整体体系结合而成的一种新型预应力空间网格结构,具有空间刚度分布均匀、支座推力小、跨越能力大的优点,得到越来越广泛的应用,如北京2008奥运会羽毛球馆即采用了弦支穹顶结构^[1]。

目前,在预应力空间网格结构分析中,均假定杆件形状为直线。然而,由于预应力空间网格结构的跨度一般都较大,杆件长度也相应增加,杆件在加工过程中不可避免存在的初始弯曲对结构的受力性能存在不利影响,在结构的非线性过程中应当予以考虑。Zhou和Chan^[2]针对钢框架的二阶分析,提出了考虑杆件初始弯曲的自平衡(点平衡多项式)直线梁单元。李国强等^[3]在综合考虑剪切变形、杆件初弯曲等因素影响的基础上,建立了用于平面钢框架结构非线性分析的梁单元。然而,与钢框架结构不同,预应力空间网格结构分析中不仅存

在梁单元,而且还存在着杆单元,如弦支穹顶结构即是由网壳梁单元、撑杆单元和拉索单元形成的复杂受力结构体系,且撑杆单元作为联系网壳与拉索的受压构件,其初始弯曲对结构受力性能的影响同样应予以考虑。

本文在假定杆件初始弯曲为半波正弦曲线的基础上,提出了考虑初始弯曲的非线性杆单元,基于初始弯曲系数建立了初始弯曲对杆单元轴向刚度影响的计算公式,并从经典的梁-柱理论出发,推导了空间初始弯曲梁单元的刚度矩阵,最后将本文建立的初弯曲单元应用于弦支穹顶结构算例的非线性稳定承载力分析,研究了不同预应力状态下初始弯曲对结构稳定承载力的影响程度与规律。

2 考虑初弯曲的非线性杆单元

考虑初始弯曲杆单元的受力和变形如图1所示,在单元随动坐标系下,杆单元具有初始弯曲,单元节点只能传递轴力。 v_0 为杆件上某点的侧向初始弯曲, v_{m0} 为杆件跨中侧向初始弯曲的幅值。

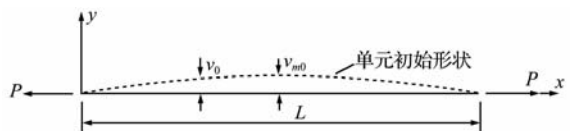


图1 考虑初始弯曲杆单元的受力和变形
Fig.1 Force and displacement of element with initial curvature

收稿日期:2008-10-16;修改稿收到日期:2009-11-06.

作者简介:周臻*(1981-),男,博士,讲师

(E-mail:seuhj@163.com);

吴京(1971-),男,博士,副教授.

假定初始弯曲为半波正弦曲线,即

$$v_0 = v_{m0} \sin \frac{\pi x}{L}, 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

令 v 为荷载作用下杆单元产生的侧向挠曲变形,可依据图 1 建立初弯曲非线性杆单元的平衡微分方程,需要区分杆单元受拉和受压的情况。

(1) 杆单元受拉

杆单元受拉时平衡微分方程:

$$EIv'' = P(v + v_0) \quad (2)$$

边界条件: $x = 0, v = 0$ 和 $x = L, v = 0$ 。令 $\alpha^2 = P/EI$, 代入式(2)可解得

$$v = -\frac{\alpha^2 v_{m0}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \alpha^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3)$$

由于初始挠曲和荷载引起的挠曲所产生的轴向变形 ΔL , 即弓形效应为

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{v_{m0}^2 \pi^4 (\pi^2 + 2\alpha^2 L^2)}{4L(\pi^2 + \alpha^2 L^2)^2} \quad (4)$$

由此可得考虑杆件初始弯曲后的轴力与位移之间的关系如下:

$$P = EA \left(\frac{u}{L} + \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (5)$$

(2) 杆单元受压

杆单元受压时平衡微分方程:

$$v'' + \alpha^2 v + \alpha^2 v_0 = 0 \quad (6)$$

边界条件: $x = 0, v = 0$ 和 $x = L, v = 0$ 。

$$\text{可解得: } v = \frac{\alpha^2 v_{m0}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \alpha^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

弓形效应为

$$\Delta L = \frac{v_{m0}^2 \pi^2 (2\alpha^4 L^4 + \pi^4 - 2\pi^2 \alpha^2 L^2)}{4L(\alpha^2 L^2 - \pi^2)^2} \quad (8)$$

由此可得考虑杆件初始弯曲后的轴力 P 与轴

向位移 u 之间的关系如下:

$$P = EA \left(\frac{u}{L} - \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (9)$$

在考虑初始弯曲后,杆单元的轴向切线刚度表达式为

$$k = \partial P / \partial u \quad (10)$$

将 P 和 ΔL 的表达式代入式(10)并整理可得:

杆单元受拉:

$$k = \frac{EI}{L} / \left(\frac{EI}{EA} - \frac{\alpha^2 v_{m0}^2 \pi^4 L^2}{2(\pi^2 + \alpha^2 L^2)^3} \right) \quad (11)$$

杆单元受压:

$$k = \frac{EI}{L} / \left(\frac{EI}{EA} - \frac{\alpha^2 v_{m0}^2 \pi^4 L^2}{2(\alpha^2 L^2 - \pi^2)^3} \right) \quad (12)$$

图 2 和图 3 给出了不同杆件初始弯曲下杆单元的轴向切线刚度与荷载之间的关系曲线。

由图 2 可知,杆单元受拉时,由于初始弯曲的存在,轴向刚度会有所减小,但减小的幅度很小,并且随着轴向拉力的增加,初始弯曲的影响会逐渐退化。而当杆单元受压时,初始弯曲对轴向刚度的影响则较大,在荷载较小时,杆件的轴向刚度变化很小,而当荷载逐渐接近杆件的欧拉临界荷载时,轴向切线刚度会迅速减小至零,并且随着初始弯曲的增加,这种现象愈加明显。由此可见,当轴压力较大时,初始弯曲对杆件的受力性能存在较大影响,进而影响到结构整体的性能。

现将式(12)转变为如下形式:

$$k = \frac{EA}{L} C_v \quad (13)$$

式中 C_v 定义为初始弯曲影响系数可表示为

$$C_v = 1 / \left(1 - \frac{\alpha^2 v_{m0}^2 \pi^4 L^2}{2(\alpha^2 L^2 - \pi^2)^3} \frac{EA}{EI} \right) \quad (14)$$

由式(14)可知, C_v 与四个因素有关:刚度比 EA/EI 、初始弯曲幅值 v_{m0} 、轴压力大小 P 以及杆件单元长度 L 有关。刚度比 EA/EI 越小,也即杆件抗弯刚度

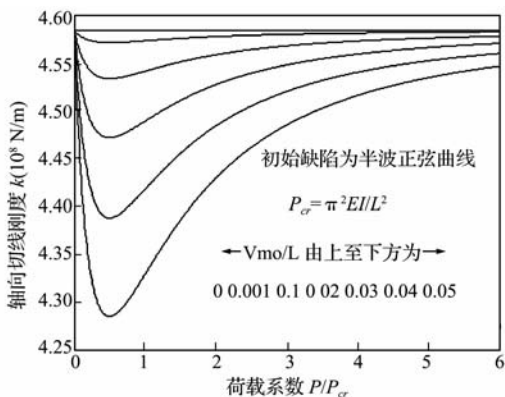


图 2 杆单元受拉时的 k - P 关系
Fig. 2 Curve when element is tensioned

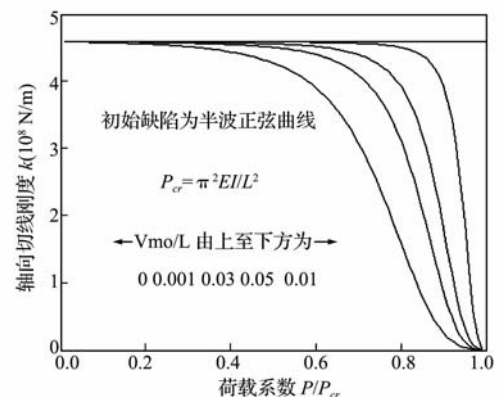


图 3 杆单元受压时的 k - P 关系曲线
Fig. 3 Curve when element is tensioned

式(26)中:

$$\xi_n = \frac{I_n}{I}, n = z, y \quad (27)$$

$$G_{1,2n} = s_{1n}\theta'_{1n} + s_{2n}\theta'_{2n} \pm s'_{0n} \frac{v_{m0}}{L} \quad (28)$$

$$n = z, y$$

$$H_n = \frac{\pi^2}{\lambda^2} - \sum_{n=z,y} (C'_{bn} + B'_{bvn}) \quad (29)$$

式(26)所示的切线刚度矩阵为杆端内力与相对位移间的刚度矩阵,实际应用时需要将其转化为局部坐标系下的刚度矩阵:

$$[k_E] = [A][k_c][A]^T + [C] \quad (30)$$

$[A]$ 和 $[C]$ 的表达式见文献[5]。

4 基于初弯曲单元的弦支穹顶非线性分析

以某体育馆屋盖采用的椭球型弦支穹顶结构为算例。结构长轴 120 m,短轴 80 m,矢高 21.45 m,穹顶网格形式为中心凯威特、外围联方形。网壳均采用铸钢节点,杆件采用圆钢管,规格为 $\phi 273 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$, $\phi 273 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$, $\phi 273 \text{ mm} \times 16 \text{ mm}$,撑杆采用圆钢管($\phi 180 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$)。结构整体模型如图 5 所示,穹顶周边为铰接支座,承受竖向均布荷载。 G , D 和 S 分别代表结构线性屈曲分析时应力最大的网壳杆件、位移最大的节点和应力最大的拉索。

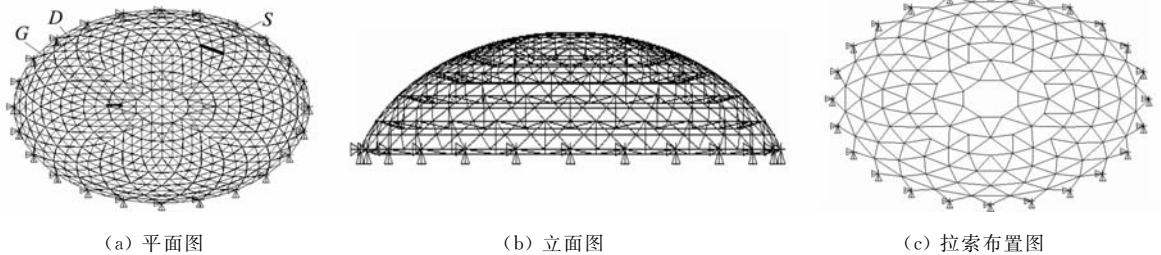
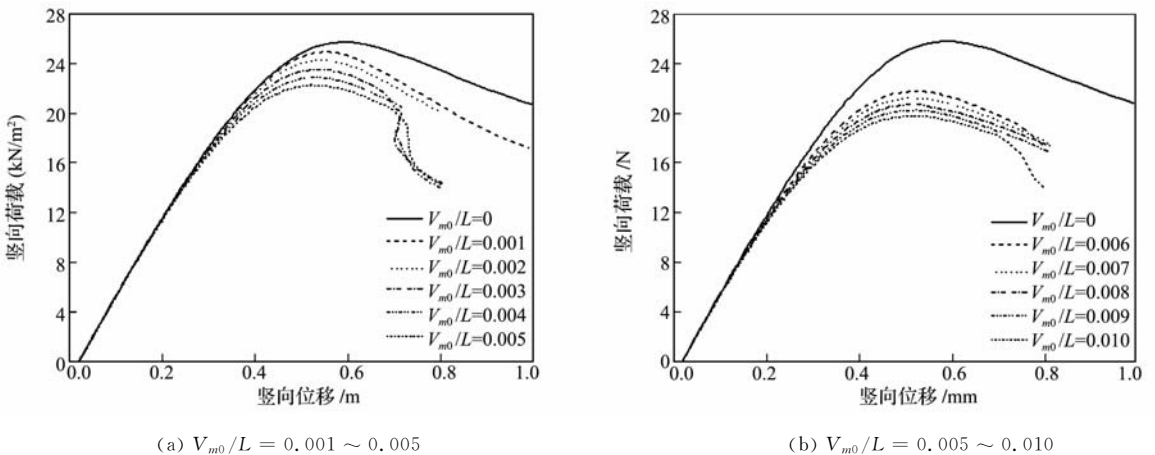


图 5 弦支穹顶结构示意图

Fig. 5 Show of calbe supported dome



(a) $V_{m0}/L = 0.001 \sim 0.005$

(b) $V_{m0}/L = 0.005 \sim 0.010$

图 6 不同初始弯曲下节点 D 荷载 - 位移曲线

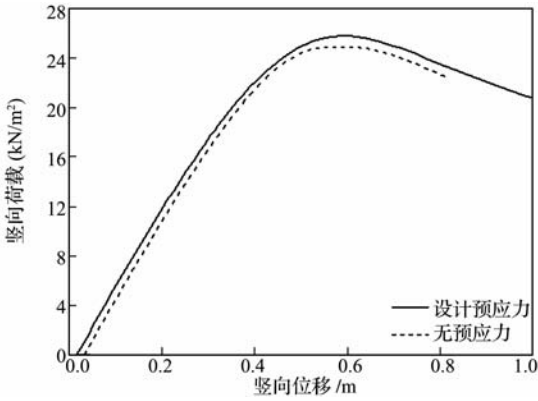
Fig. 6 Load-displacement curve of joint D at different initial curvature

基于本文推导的初弯曲杆单元和梁单元,对该结构的非线性稳定承载力进行分析。分析时,将初弯曲杆单元与梁单元通过 UPFS 单元二次开发功能嵌入到 ANSYS 有限元程序中^[6]。结构的撑杆采用初始弯曲杆单元模拟,穹顶网壳单元采用初始弯曲梁单元模拟,拉索单元采用仅拉 link 索单元模拟。利用弧长控制法^[6,7]跟踪结构的荷载 - 位移全过程曲线,考虑起始状态为自重与预应力作用,而后再在此基础上逐步增加竖向均布荷载。令结构单元初始弯曲 V_{m0}/L 分别取 $0 \sim 0.01$,间隔为 0.001,比较不同 V_{m0}/L 取值下的结构非线性稳定分析结果。

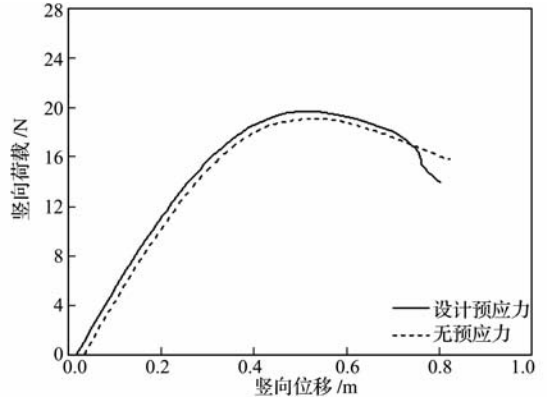
图 6 为设计预应力状态下,不同初始弯曲时的结构荷载 - 位移全过程曲线。在结构屈曲前,杆件初始弯曲对于结构的整体刚度影响较大,反映在荷载 - 位移曲线上,结构屈曲前不同杆件初始弯曲取值下的曲线之间存在间隔,并且随着荷载的增加,这种间隔愈加增大。结构屈曲后曲线开始下降,其规律与结构屈曲前相似。杆件初始弯曲越大,荷载 - 位移曲线的极值点越低,表明结构的极限荷载下降,可见杆件初始弯曲对结构的极限荷载影响较大。

选取两种初始预应力状态进行比较:初始预应力为零和设计预应力两种状态,其荷载 - 位移全过程曲线的分析结果比较如图 7 所示。

由图 7 可知,两种预应力状态下的荷载 - 位移



(a) 初始弯曲为 0



(b) 初始弯曲为 0.01

图 7 不同初始预应力状态下的节点 D 荷载 - 位移曲线

Fig. 7 Load-displacement curve of joint D at different initial prestressing states

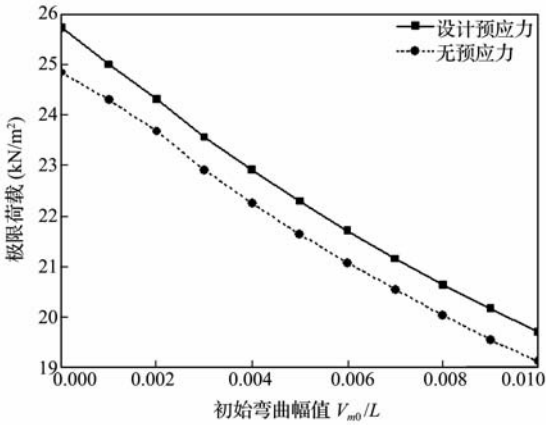


图 8 极限荷载 - 初始弯曲关系曲线

Fig. 8 Relation between limited load and initial curvature

曲线基本平行,表明预应力的对于结构的刚度影响基本没有影响。设计预应力状态比初始预应力为零的状态下的极限荷载大,表明预应力作用能够提高结构的极限承载力,但提高的程度很有限。两种预应力状态下,有初始弯曲的情况与无初始弯曲的情况相比,结构的极限荷载均有所减小。

图 8 和图 9 分别为极限荷载和极限位移与杆件初始弯曲的关系曲线。可以看出,极限荷载随初始弯曲增加而下降的规律基本呈线性,并且在两种预应力状态下的关系曲线基本平行,表明在不同初始预应力状态下,初始弯曲对结构极限荷载的影响规律是相似的,初始弯曲与极限位移之间的关系曲线则因初始预应力值的大小而存在较大差别。由图 10 可以清楚看出,曲线的形状虽然相似,但变化规律却存在较大差异。

5 结 论

(1) 杆件初始弯曲的大小会影响单元的切线刚度矩阵,进而影响到结构的受力性能。初始弯曲杆单元中的初始弯曲影响系数 C_0 反映了杆件初始弯曲对杆单元轴向刚度的影响,初始弯曲梁单元中的稳定函数 s_1, s_2 和 s_0 与弯曲函数 $b_1, b_2, b_{vs1}, b_{vs2}$

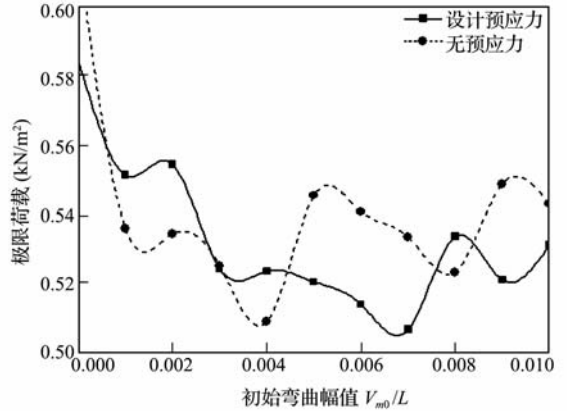


图 9 极限位移 - 初始弯曲关系曲线

Fig. 9 Relation between limited load and initial curvature

和 b_{vs} 体现了杆件初始弯曲对梁单元轴向刚度和弯曲刚度的影响。

(2) 随着杆件初始弯曲的增加,弦支穹顶结构的极限荷载逐渐下降。初始预应力虽然能够提高索承网壳结构的极限承载力,但对结构的整体刚度影响很小。并且在不同的初始预应力状态下,杆件初始弯曲对极限荷载的影响规律基本相似,均呈线性关系;极限位移与初始弯曲之间的关系曲线则因初始预应力值的大小而存在较大差异。

(3) 本文提出的基于初弯曲单元的非线性分析方法,能够同时考虑杆单元初始弯曲与梁单元初始弯曲对结构受力性能的影响,可广泛应用于弦支穹顶及其他空间网络结构的非线性分析,从而能够评估杆件初始弯曲对结构受力性能的影响程度,为结构设计方案的选择提供更为科学的依据。

附 录:

(1) $P > 0$, 梁单元受拉

$$s_1 = \frac{(aL)^2 \cosh(aL) - aL \sinh(aL)}{2 - 2\cosh(aL) + aL \sinh(aL)}$$

$$s_2 = \frac{aL \sinh(aL) - (aL)^2}{2 - 2\cosh(aL) + aL \sinh(aL)}$$

$$s_0 = (s_2 - s_1) \frac{\pi(aL)^2}{\pi^2 + (aL)^2}$$

$$b_1 = \frac{(s_1 + s_2)(s_2 - 2)}{8(aL)^2}, b_2 = \frac{s_2}{8(s_1 + s_2)}$$

$$b_{vs1} = \frac{\pi\alpha^2 L^2}{(\pi^2 + \alpha^2 L^2)^2} (s_1 + s_2), b_{vs2} = \frac{s_0 s_2}{2(s_1^2 - s_2^2)}$$

$$b_{vv} = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{(aL)^4 \pi^2}{4(\pi^2 + \alpha^2 L^2)^2} - \frac{s_2 s_0^2}{2(s_1 + s_2)(s_1 - s_2)^2}$$

(2) $P = 0$, 梁单元轴力为零

$$s_1 = 4, s_2 = 2, s_0 = 0, b_1 = 1/40, b_2 = 1/24$$

$$b_{vs1} = 0, b_{vs2} = 0, b_{vv} = -\pi^2/4$$

(3) $P < 0$, 梁单元受拉

$$s_1 = \frac{aL \sin(aL) - (aL)^2 \cos(aL)}{2 - 2\cos(aL) - aL \sin(aL)}$$

$$s_2 = \frac{(aL)^2 - aL \sin(aL)}{2 - 2\cos(aL) - aL \sin(aL)}$$

$$s_0 = (s_1 - s_2) \frac{\pi(aL)^2}{\pi^2 - (aL)^2}$$

$$b_1 = \frac{(s_1 + s_2)(s_2 - 2)}{8(aL)^2}, b_2 = \frac{s_2}{8(s_1 + s_2)}$$

$$b_{vs1} = -\frac{\pi\alpha^2 L^2}{(\pi^2 - \alpha^2 L^2)^2} (s_1 + s_2)$$

$$b_{vs2} = \frac{s_0 s_2}{2(s_1^2 - s_2^2)}$$

$$b_{vv} = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{(aL)^4 \pi^2}{4(\pi^2 - \alpha^2 L^2)^2} - \frac{s_2 s_0^2}{2(s_1 + s_2)(s_1 - s_2)^2}$$

度新型弦支穹顶结构体系的优化设计选定[J]. 建筑结构学报, 2007, 12(6):1-9. (ZHANG Ailin, GE Jiaqi, LIU Xuechun. Optimization and determination of prestressed suspend dome system of the badminton gymnasium for 2008 Olympic Games[J]. *Journal of Building Structures*, 2007, 12(6):1-9. (in Chinese))

[2] Chan S L, Zhou Z H. Exact tangent stiffness for imperfect beam-column members[J]. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 2000(6):1094-1102.

[3] 李国强, 刘玉妹. 一种考虑初始缺陷影响的非线性梁单元[J]. 计算力学学报, 2005, (1):69-72. (LI Guoqiang, LIU Yu-shu. A nonlinear beam element considering initial imperfection[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, (1):69-72. (in Chinese))

[4] 陈惠发. 梁柱分析与设计[M]. 周绥平, 译. 北京: 人民交通出版社, 1997. (CHEN Hui-fa. *Beam-Column Analysis and Design* [M]. ZHOU Sui-ping, translated. Beijing: The People's Transportation Press, 1997. (in Chinese))

[5] Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method (Fifth Edition)* [M]. New York: Butterworth-Heinemann, 2000.

[6] 周臻. 预应力空间网格结构的分析理论与优化设计研究[D]. 南京: 东南大学, 2007. (ZHOU Zhen. Study on the analysis theory and optimization design of prestressed lattice structures[D]. Nanjing: Southeast University, 2007. (in Chinese))

参考文献 (References):

[1] 张爱林, 葛家琪, 刘学春. 2008 奥运会羽毛球馆大跨

Nonlinear stability bearing capacity analysis for a suspended dome based on the initial curvature elements

ZHOU Zhen^{*1,2}, WU Jing^{1,2}, MENG Shao-ping^{1,2}

(1. Key Laboratory of R. C. & P. C. Structures, Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. International Institute for Urban Systems Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: In the element follow-up coordinate system, the computation formulation considering the influence of initial curvature on the link element is established, and the element stiffness matrix including the effect of initial curvature is derived. Then the tangent stiffness matrix of initial curvature beam element is deduced base on classical beam-column theory. Finally, the nonlinear stability bearing capacity analysis is carried out for the suspended dome structure by using the initial curvature link and beam element, and the influence of the member initial curvature on the structural nonlinear stability performance is investigated. The results show that the structural stiffness and limited bearing capacity are reduced since the member initial curvature exists. In different initial prestressing states, the limit load is linearly reduced with the increase of initial curvature and the relation curves between them are parallel. The proposed initial curvature element in this paper can be generally applied into the nonlinear analysis of various kinds of space grid structures, which provides more scientific accordance for the structural design.

Key words: suspended dome; initial curvature; prestressed space grid structures; nonlinear stability; limit load