第27卷第6期
2010年12月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 27, No. 6
December 2010

文章编号:1007-4708(2010)06-1107-04

关于广义等参有限单元的讨论

马海涛*1， 高 伟

(1.华南理工大学 土木工程系 亚热带建筑国家重点实验室,广州 510640;
2.新南威尔士大学 土木与环境工程学院,澳大利亚 新南威尔士州 悉尼 2052)

摘 要:研究了新近提出的广义等参单元,讨论了这一新方法与现有方法的关系,提出了一个建立广义有限单元的一般性方法。

关键词:等参单元;广义有限单元;非协调单元

中图分类号: **文献标识码:**A

1 引 言

采用双线形插值函数的平面四边形等参单元和采用三线性插值函数的空间六面体等参单元有一个共同的缺陷,这两个单元都不能很好地模拟受弯等情况下结构的响应。多年来,人们提出了各种方法对它们进行改进,包括:在位移场中引入非协调位移模式,计算单元刚度矩阵时使用简缩积分,单元列式采用杂交/混合模型等[1]。尽管已经取得了很大进展,但研究人员仍在继续努力希望能够找到更好的解决方法。

最近,张洪武等[2,3]提出了通过在位移场表达式中引入耦合附加项而提高单元精度的方法,并把这一类单元称为广义有限单元。本文针对这一方法进行了研究,讨论了广义等参单元与现有方法的关系,提出了一个建立广义有限单元的一般性方法。

2 等参单元的位移插值

2.1 传统等参元的位移插值

对于传统的等参单元,单元区域内任意一点的坐标和位移采用同样的插值方法表示。例如,对于二维弹性力学问题,坐标和位移分别由以下两式给出。

$$x=\sum_i N_i(\xi,\eta)x_i,\quad y=\sum_i N_i(\xi,\eta)y_i \tag{1}$$

$$u=\sum_i N_i(\xi,\eta)u_i,\quad v=\sum_i N_i(\xi,\eta)v_i \tag{2}$$

式中 x 和 y 为两个坐标分量,u 和 v 为两个位移分量,$N_i(\xi,\eta)$ 为与 i 节点对应的形函数,x_i 和 y_i 为节点坐标值,u_i 和 v_i 为节点位移值,求和记号对全部节点进行。

采用等参插值得到的位移场可以表示刚体位移和常应变状态,且满足单元内部和之间的连续性要求,因此能够保证单元的收敛性。尽管如此,低阶等参元仍有其严重缺陷,需要改进。

2.2 非协调单元 Q6/QM6 的位移插值

为了避免四节点单元在某些应用中刚度过大的问题,提高分析精度,Wilson 等引入了单元不协调位移模式,将单元位移表示为

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)u_i+\alpha_1(1-\xi^2)+\alpha_2(1-\eta^2)$$
$$v=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i+\beta_1(1-\xi^2)+\beta_2(1-\eta^2) \tag{3}$$

式中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 和 β_2 为单元附加无节点自由度,与其对应的有两个非协调模式。在四个节点上,不协调模式的贡献为零;对于四条边界线,每个不协调模式只在其中的一对边线上恒等于零,而在另一对边线上不为零。由于相邻单元的附加自由度彼此没有关联,一方面这些自由度可以在单元级别上利用静力凝聚消去,达到不增加整体未知量数目的效果;但另一方面,不协调模式可能引起相邻单元位移的不连续。进一步提出的基于修正积分方案的 QM6 单元,可以在避免单元过刚的同时保证单元的收敛性。广泛的应用表明,QM6 是性态较好的四节点位移单元。

收稿日期:2010-09-09;**修改稿收到日期:**2010-10-25.

基金项目:华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室自主研究课题,Australian Research Council Discovery Projects (DP1094451)资助项目.

作者简介:马海涛*(1962-),男,博士,教授,博士生导师(E-mail:maht@scut.edu.cn).

2.3 广义等参单元的位移插值

张洪武等[2] 提出，为考虑不同方向位移分量的耦合相关性，在形函数的构造过程中应适当添加项数。例如，对于 x 和 y 方向边长分别为 $2a$ 和 $2b$ 的四节点矩形单元，位移场可表示为

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i + \sum_{i=1}^{4} N_{xyi}(\xi,\eta)v_i \\
v &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i + \sum_{i=1}^{4} N_{yxi}(\xi,\eta)u_i
\end{aligned} \tag{4}
$$

式中 $N_i(\xi,\eta)$ 为传统双线性形函数，$N_{xyi}(\xi,\eta)$ 和 $N_{yxi}(\xi,\eta)$ 为新引进的形函数（具体表达式见文献[2]）。

式(4) 中的位移场表达式有两点值得注意。首先，形函数 $N_{xyi}(\xi,\eta)$ 给出了节点 y 向位移分量对 x 向位移场的影响，而形函数 $N_{yxi}(\xi,\eta)$ 给出了节点 x 向位移分量对 y 向位移场的影响，这两组形函数的引入，实现了不同位移分量间的耦合；其次，所有形函数 $N_{xyi}(\xi,\eta)$ 和 $N_{yxi}(\xi,\eta)$ 皆可写成以下形式。

$$
\begin{aligned}
N_{xyi}(\xi,\eta) &= c_{xyi}N_b(\xi,\eta) \\
N_{yyi}(\xi,\eta) &= c_{yxi}N_b(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{5}
$$

式中 c_{xyi} 和 c_{yxi} 为常系数，$N_b(\xi,\eta)$ 为在单元边界上恒等于零的 bubble 函数：

$$
N_b(\xi,\eta) = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{6}
$$

由于在边界上耦合项对位移没有贡献，传统等参元的连续性得到了保持。除此之外，文献[2,3]证明了以上位移场可以表示刚体位移和常应变变形状态，相应的单元通过分片试验。

2.4 协调附加位移模式的引入

Q6/QM6 单元引入的附加位移模式在四个节点上等于零，但在边界上不总为零，故会引起单元间位移的不连续。如果引入的附加模式在全部边界上恒等于零，则可以得到带附加位移模式的协调单元。

引入协调位移模式，可将单元位移一般性表示为

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i} N_i(\xi,\eta)u_i + \sum_{k} N_{bk}(\xi,\eta)\alpha_k \\
v &= \sum_{i} N_i(\xi,\eta)v_i + \sum_{k} N_{bk}(\xi,\eta)\beta_k
\end{aligned} \tag{7}
$$

式中 u_i 和 v_i 为节点位移，$N_i(\xi,\eta)$ 为常规等参单元插值函数，α_k 和 β_k 为单元非节点自由度，$N_{bk}(\xi,\eta)$ 为附加位移模式，求和记号分别对全部节点和所有附加位移模式进行。为保持位移的连续性所有附加模式在边界上恒等于零。考虑到单元应具有方向不相关性，在两个方向上引入完全相同的模式。

新的位移场仍可保证单元的连续性，可以按照采用常规等参元的计算方法的步骤进行计算。为减少系统整体未知量的数目，各单元的无节点自由度可在生成单元刚度矩阵后采用静立力凝聚法消去。不失一般性，设单元分析得的单元特征方程为

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{uu} & \boldsymbol{k}_{u\alpha} \\ \boldsymbol{k}_{\alpha u} & \boldsymbol{k}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{8}
$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为单元节点位移自由度向量，$\boldsymbol{\alpha}$ 无节点自由度向量，$\boldsymbol{k}_{uu}$，$\boldsymbol{k}_{u\alpha}$，$\boldsymbol{k}_{\alpha u}$ 和 $\boldsymbol{k}_{\alpha\alpha}$ 为单元刚度阵子块，$\boldsymbol{f}$ 为单元节点力向量。若选择的附加位移模式保证刚度阵子块 $\boldsymbol{k}_{\alpha\alpha}$ 非奇异，由上式的第二部分可得

$$
\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k}_{\alpha\alpha}^{-1}\boldsymbol{k}_{\alpha\alpha}\boldsymbol{u} \tag{9}
$$

因此，单元无节点自由度可用节点位移表示。将单元位移场表达式中的无节点自由度用节点位移替换，可以得到完全用节点位移表示的扩充后的位移场。

对于规则的四节点四边形单元和八节点六面体单元，可以得到单元无节点自由度与节点位移的显式关系式，以下以四节点矩形单元为例进行介绍。

3 广义等参单元的位移插值推导

3.1 协调附加位移模式

对于平面四边形单元，采用自然坐标，协调附加位移模式可取以下形式：

$$
\begin{aligned}
&(1-\xi^2)(1-\eta^2),\ \xi(1-\xi^2)(1-\eta^2) \\
&\eta(1-\xi^2)(1-\eta^2),\ \xi^2(1-\xi^2)(1-\eta^2) \\
&\xi\eta(1-\xi^2)(1-\eta^2),\ \eta^2(1-\xi^2)(1-\eta^2),\cdots
\end{aligned} \tag{10}
$$

若仅取第一项，单元的位移场可表示为

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i + \alpha N_b(\xi,\eta) \\
v &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i + \beta N_b(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{11}
$$

式中，常规双线性形函数 $N_i(\xi,\eta)$ 和协调附加位移模式 $N_b(\xi,\eta)$ 可写为

$$
\begin{aligned}
N_i(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \\
N_b(\xi,\eta) &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{12}
$$

式中 ξ_i 和 η_i 为节点的自然坐标值。

考虑 x 向和 y 向边长分别为 $2a$，$2b$ 的矩形单

元,由自然坐标和整体坐标的关系,有

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{a},\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{b},\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=0 \tag{13}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{\xi_i}{4a}(1+\eta_i\eta),\frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{\eta_i}{4b}(1+\xi_i\xi)\\&\frac{\partial N_b}{\partial x}=-\frac{2}{a}\xi(1-\eta^2),\frac{\partial N_b}{\partial y}=-\frac{2}{b}\eta(1-\xi^2)\end{aligned} \tag{14}$$

所以,利用应变 - 位移关系:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15}$$

可将应变场写为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{4a}\Big[\sum_{i=1}^{4}\xi_i u_i+\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i u_i\eta\Big]-\frac{2\alpha}{a}\xi(1-\eta^2)\\\varepsilon_y&=\frac{1}{4b}\Big[\sum_{i=1}^{4}\eta_i v_i+\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i v_i\xi\Big]-\frac{2\beta}{b}\eta(1-\xi^2)\\\gamma_{xy}&=\frac{1}{4b}\Big[\sum_{i=1}^{4}\eta_i u_i+\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i u_i\xi\Big]-\frac{2\alpha}{b}\eta(1-\xi^2)+\\&\quad\frac{1}{4a}\Big[\sum_{i=1}^{4}\xi_i v_i+\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i v_i\eta\Big]-\frac{2\beta}{a}\xi(1-\eta^2)\end{aligned} \tag{16}$$

对各向同性线弹性材料,单元的弹性应变能为

$$\Pi_e=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\int_{\Omega_e}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}^2)\mathrm{d}v \tag{17}$$

由于外荷载在附加位移模式上做的功恒为零,弹性应变能对 α 和 β 的一阶变分必须为零,即

$$\delta_\alpha\Pi_e=\delta_\beta\Pi_e=0 \tag{18}$$

由此可建立非节点自由度与节点位移之间的联系。这里以 α 为例。显然,应变分量对 α 的一阶变分为

$$\begin{aligned}&\delta_\alpha\varepsilon_x=-\frac{2}{a}\xi(1-\eta^2),\delta_\alpha\varepsilon_y=0\\&\delta_\alpha\gamma_{xy}=-\frac{2\alpha}{b}\eta(1-\xi^2)\end{aligned} \tag{19}$$

故单元的弹性应变能对 α 的一阶变分可写成:

$$\delta_\alpha\Pi_e=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\int_{\Omega_e}[2(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\delta_\alpha\varepsilon_x+(1-\mu)\gamma_{xy}\delta_\alpha\gamma_{xy}]\mathrm{d}v \tag{20}$$

对矩形单元,将应变及其变分表达式代入以上积分式后,由 $\delta_\alpha\Pi_e=0$,可得

$$A\alpha=B \tag{21}$$

其中

$$A=\frac{1}{a^2b^2}\int_{\Omega_e}\Big[b^2\xi^2(1-\eta^2)^2+\frac{1-\mu}{2}a^2\eta^2(1-\xi^2)^2\Big]\mathrm{d}v$$

$$B=\frac{1}{4ab}\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i v_i\int_{\Omega_e}\Big[\mu\xi^2(1-\eta^2)+\frac{1-\mu}{2}\eta^2(1-\xi^2)\Big]\mathrm{d}v \tag{22}$$

简单的数学推导后,可得

$$\alpha=\Delta_u\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i v_i \tag{23}$$

其中

$$\Delta_u=\frac{5ab(1+\mu)}{32[(1-\mu)a^2+2b^2]} \tag{24}$$

采用同样的方法,可以得到

$$\beta=\Delta_v\sum_{i=1}^{4}\xi_i\eta_i u_i \tag{25}$$

其中

$$\Delta_v=\frac{5ab(1+\mu)}{32[(1-\mu)b^2+2a^2]} \tag{26}$$

与文献[2]得到的位移插值表达式对比后发现,采用两种不同方法得到完全相同的结果。

对于规则六面体单元,若引入协调附加位移模式 $(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$,采用本文方法,可以推导得到与[2]相同的位移插值表达式。

3.2　协调附加位移模式的选择

理论上讲,协调位移模式可以有多种选择,关键是要保证在单元边界上恒等于零。本文提出的推导过程与协调位移模式的形式无关,是广泛适用的。例如,可用于文献[3]中考虑的几种函数形式。

3.3　非规则任意形状单元

对于任意四边形单元,通过解析积分进行推导将极为困难。文献[3]提出了用面积坐标因子调整附加模式。如果采用本文方法,可采用数值积分法进行计算,得到相对更合理的调整因子。

4　结　语

文献[2,3] 提出的广义有限单元思想为构造性能更佳的有限单元开辟了一条新路,围绕这一方法有许多问题值得深入研究。本文提出了通过引入协调模式构造广义等参单元的方法,并具体研究平面四边形和空间六面体单元,得到了与文献[2]一致的偶合位移场。

参考文献(References):

[1]　Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method, Fifth Edition* [M]. Butterworth Heinemann, 2000.

[2] 张洪武，吴敬凯，刘 辉，等. 广义平面矩形与空间矩形块体单元[J]. 计算力学学报，2010，**27**(3)：391-396. (ZHANG Hong-wu, WU Jing-kai, LIU Hui et al. Generalized plane and space rectangular elements [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(3): 391-396. (in Chinese))

[3] 张洪武，刘 辉，吴敬凯，等. 平面 4 节点广义等参单元[J]. 计算力学学报，2010，**27**(3)：397-402. (ZHANG Hong-wu, LIU Hui, WU Jing-kai, et al. Plane 4 node generalized isoparametric element[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(3): 397-402. (in Chinese))

Discussions on the generalized isoparametric finite elements

MA Hai-tao*[1], GAO Wei[2]

(1. State Key Laboratory of Subtropical Building Science, Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. School of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia)

Abstract: This short note presents a study on recently proposed generalized isoparametric finite elements. The relationship between the new and some of the existing formulations are investigated. A new approach is proposed for the formulation of generalized finite elements.

Key words: isoparametric elements; generalized finite elements; non-conforming elements