

# 可压流数值模拟中当地 DFD 方法的改进和应用

周春华

(南京航空航天大学 空气动力学系, 南京 210016)

**摘要:**阐述了求解守恒型 Euler 方程的当地 DFD (Domain-Free Discretization) 方法的改进和应用。DFD 离散策略的核心,是解域内点上控制方程的离散形式可与解域外的一些点相关。通过边界附近解的近似形式,外部相关点上的流动变量值得到确定并强加相应的边界条件。与最初的当地 DFD 方法不同,在解的近似形式构建中,采用了 CCST 技术 (Curvature-Corrected Symmetry Technique),因此外部相关点上的密度和切向速度分别由等熵和等总焓关系确定。空间离散采用 Galerkin 有限体积格式。最后,给出了固定和运动物体可压缩绕流的数值模拟结果,以验证改进的当地 DFD 方法的可靠性和数值解精度的提高。

**关键词:**边界非协调类方法;边界条件;运动边界;可压缩流动;有限体积法

**中图分类号:**O246;V211.3 **文献标识码:**A

## 1 引言

舒昌等<sup>[1]</sup>发展的偏微分方程 DFD 解法中,解域内点上方程的离散形式可涉及解域外的一些点,且与边界没有直接关系。解域外相关点上的函数值由解的近似形式确定。早期的 DFD 应用中<sup>[1]</sup>,解的近似形式建立在仅含两个边界点的整个网格线上。这种方式对单、双连通域有效,但不适用于复杂域。为使方法具有一般性,作者和舒昌等构建了当地 DFD 方法<sup>[2]</sup>;解的近似形式,基于边界条件和当地流动方程,建立在边界法线上。

DFD 方法属于边界非协调类数值方法。此类方法中的网格生成是非常简单和直接的,当物体运动时,网格是固定的。所以,对运动边界问题,无需在每个时间步上进行网格处理,提高了计算效率,而且无需在不同网格之间进行数据传递,也提高了计算精度。

目前,可压流的边界非协调类数值方法主要有 Cut-cell 和 Ghost-cell 两种方法。Cut-cell 方法<sup>[3,4]</sup>中,与浸没物体相交的网格单元被重构,以获得当地的边界协调性。壁面边界条件的强加方式与传统边界协调类方法相似。Ghost-cell 方法<sup>[5,6]</sup>的关键在于采用贴体网格方法使用的 CCST 技术,在固壁边界附近引入虚拟单元;虚拟单元中

心上的流动变量值,根据假定的壁面附近的流动模型计算获得。这个流动模型由当地沿法向等熵、等总焓的流动构成。

DFD 方法无需对壁面附近单元进行重构,与 Cut-cell 方法有明显差别。与 Ghost-cell 方法相比,当地 DFD 方法基于解的外延,因而起源不同;在域外点上的流动变量计算中,DFD 方法只涉及当前时间层上的流动变量值;DFD 方法已应用于动边界绕流的数值模拟,作者尚未发现 Ghost-cell 方法在这方面的应用;此外,DFD 方法的应用不限于 Cartesian 网格,也可应用于易于进行自适应处理的非结构网格。

当地 DFD 方法的核心是壁面边界附近解的近似形式的构建和外部相关点上的流动变量值的确定。本文对文献[2]中解的近似形式进行了改进,部分引入了 Ghost-cell 方法中基于 CCST 技术的流动模型,域外相关点上的密度和切向速度分别由等熵和等总焓关系确定。针对固定圆柱和 NACA0012 翼型的各种数值实验表明,本文的改进工作有效地提高了数值解的精度,振荡 NACA0012 翼型跨声速绕流的数值模拟则进一步显示了当地 DFD 方法在处理动边界问题方面的优势。

## 2 控制方程的当地 DFD 离散及人工耗散

二维守恒形式的 Euler 方程可写成:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

收稿日期:2008-12-04;修改稿收到日期:2009-08-31.

基金项目:国家自然科学基金(10772083)资助项目.

作者简介:周春华(1965-),男,博士,教授

(E-mail: chzhou@nuaa.edu.cn).

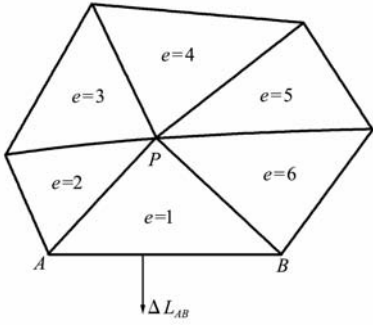


图 1 节点 P 的影响域  
Fig. 1 Influence domain of node P

式中  $w$  为守恒变量矢,  $f$  和  $g$  为对流量矢。

DFD 方法中, 解域边界嵌入在计算网格中。假定  $\Omega \subset R^2$  为单连通域且包含物体  $\omega$ ,  $\Omega$  的边界记为  $\Gamma$ , 对绕  $\omega$  的流动, 解域为  $\Omega \setminus \omega$ 。若  $h$  为空间离散步长, 对  $\Omega$  引入三角形网格  $T_h$ 。

DFD 是一种离散策略, 其实质是偏微分方程的离散形式可以涉及解域外的某些点, 但它仍需要一种数值方法将偏微分方程转化为离散形式。这里采用 Galerkin 有限体积法<sup>[7]</sup> 进行空间离散。流动变量定义在三角形顶点上, 并以线性函数近似。记  $F$  为对流量张量, 其 Cartesian 分量为  $f$  和  $g$ 。Euler 方程(1) 可离散成:

$$\Omega_P \frac{\partial w_P}{\partial t} = \sum_{e=1}^n \frac{F^A + F^B}{2} \cdot \Delta L_{AB} \quad (2)$$

式中对  $P$  点影响域中的所有三角形进行求和,  $\Omega_P$  表示影响域面积,  $\Delta L_{AB}$  表示每个单元  $e$  在影响域边界上边的外法向有向长度,  $F^A$  和  $F^B$  为两端点上的对流量, 如图 1 所示。

需要指出空间离散是在辅助域  $\Omega$  上进行的, 并没有强加壁面边界条件, 微分方程的离散形式与解域并不直接相关。空间离散中壁面边界条件的嵌入将在下节中讨论。

这里采用拉普拉斯算子与双调和算子混合构成的人工耗散算子<sup>[7]</sup> 以防止激波附近的数值振荡并消除高频误差。非定常流计算中的时间推进则采取双时间步格式。

### 3 域外相关点上流动变量的计算和壁面边界条件的处理

根据上节阐述的空间离散, 解域内每个网格点上守恒变量的计算相关于以三角形边与该点相连的点上的守恒变量。考虑与壁面边界相交的边, 内部端点为计算节点, 外部端点则为其相关点, 所有这类靠近壁面的内部计算点至少有一个解域外

的相关点, DFD 方法的关键在于如何确定外部相关点上的函数值。

外部相关点上流动变量的值通过沿壁面法向、由流场内部的外插获得, 或通过解壁面处简化的流动方程获得。由于空间离散中所有变量皆以线性函数近似, 边界处理中采用线性近似是合理的。为进行外插以及求解当地简化的流动方程, 必须在流场内部构建一些点。这些点未必是网格点, 可称之为虚拟点。

对给定的外部相关点, 其关于壁面的镜像点可选为虚拟点  $F_1$ 。假定这个虚拟点位于三角形  $\tau \in T_h$  内, 且  $\tau$  的三个顶点都在解域内, 通过该三角形上的线性内插, 可确定  $F_1$  上的流动变量值。因此, 记这个内插三角形为  $\tau_I$ 。

若  $\tau$  的三顶点不全在解域内, 其外部顶点上的流动变量值是未知的。为确定虚拟点  $F_1$  上的速度法向分量值, 可构建一个当地内插三角形  $\tau_I, \tau_I \notin T_h$ 。对图 2 中的示例 ( $C$  为计算点,  $D$  为外部相关点), 通过连接  $\tau$  的内点及法线与边界的交点, 很容易构建成  $\tau_I$ 。边界交点上的法向速度直接由已知的物体运动决定, 虚拟点  $F_1$  上的法向速度可由  $\tau_I$  上的内插获得。然而, 这种情况下,  $\tau_I$  边界顶点上压强、密度和切向速度的值是未知的,  $F_1$  上这些变量的值也就无法确定。为解决这个问题, 对给定的外部相关点, 构建第二个虚拟点  $F_2$ , 如图 2 所示。该点满足: (1) 在通过外部相关点的壁面法线上; (2) 包含  $F_2$  的三角形 (即  $\tau_I$ ) 的顶点都在解域内; (3) 最靠近壁面。

所以, 插值三角形  $\tau_I$  顶点上流动变量的值或

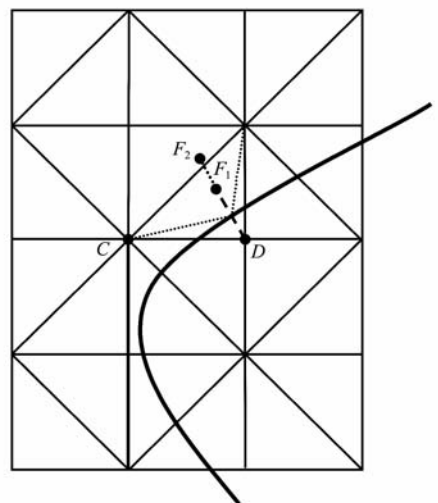


图 2 插值三角形  $\tau_I \notin T_h$  的当地构建  
Fig. 2 Local construction of interpolation triangle  $\tau_I \notin T_h$

取当前计算值或直接由已知的物体运动决定。通过  $\tau_i$  上的线性插值,可获得虚拟点上流动变量的值。例如,虚拟点上的压强可按下式计算为

$$p_f = \sum_{k=1}^3 \phi_k(x_f, y_f) p_k \quad (3)$$

式中 对  $k$  的求和是关于插值三角形  $\tau_i$  的三个顶点进行的,  $\phi$  为线性基函数。虚拟点上的流动变量值,将被应用于每个时间步上外部相关点上流动变量值的更新;在此过程中,边界条件将被嵌入。以下,部分引用 Ghost-cell 方法采用的 CCST 技术中的当地等熵、等总焓的流动模型<sup>[5]</sup>,讨论外部相关点上流动变量值的计算。

外部相关点  $D$  上的压强  $p_d$ ,由固壁附近的简化法向动量方程决定。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\rho \tilde{u}^2}{R} \quad (4)$$

式中  $\tilde{u}$  和  $\tilde{v}$  分别为切向和法向速度分量,  $R$  是当地壁面曲率半径。对离散线段描述的壁面,曲率半径是近似计算的。如图 3 所示,壁面  $ABCDE$ ,任意一点  $C$  处的曲率半径近似为  $\triangle BCD$  外接圆的半径  $OC$  ( $O$  为  $BC$ 、 $CD$  垂直平分线的交点)。

由无粘流动的壁面无穿透条件,式(4)中的法向速度  $\tilde{v}$  等于边界处已知的物体运动速度的法向分量  $V_n$ 。进一步式(4)可离散为

$$p_d = p_f + \left( \frac{dV_n}{dt} - \rho_f \frac{\tilde{u}_f^2}{R} \right) |FD| \quad (5)$$

式中  $p_f, \rho_f$  和  $\tilde{u}_f$  为虚拟点上的压强、密度和切向速度,  $|FD|$  为虚拟点和外部相关点间的距离。

文献[2]采用绝热壁条件确定外部相关点  $D$  上的密度值,忽视了无粘流中除跨越激波外无熵增的事实。这里,假定壁面附近区域内流动沿法向等熵,则外部相关点和虚拟点上的熵值相等,有

$$\frac{p_d}{\rho_d^\kappa} = \frac{p_f}{\rho_f^\kappa} \quad (6)$$

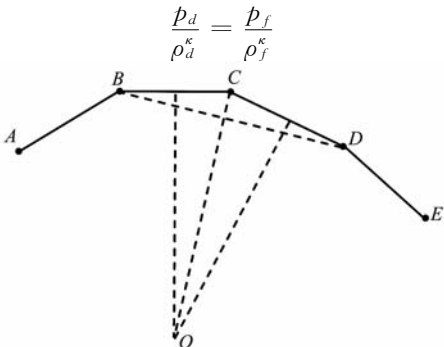


图 3 壁面上任一点  $C$  处曲率半径的近似计算

Fig. 3 Computation of the local radius of solid wall at point  $C$

式中  $\kappa$  为比热比。所以,  $D$  点上的密度  $\rho_d$  为

$$\rho_d = \rho_f \left( \frac{p_d}{p_f} \right)^{1/\kappa} \quad (7)$$

由无穿透的速度壁面条件,外部相关点上的法向速度  $\tilde{v}_d$  为

$$\tilde{v}_d = 2V_n - \tilde{v}_f \quad (8)$$

式中  $\tilde{v}_f$  为虚拟点上的法向速度。

文献[2]认为外部相关点上的壁面切向速度分量与虚拟点上的切向速度分量相等,实际上未考虑壁面的曲率效应。这里在壁面附近区域内应用总焓不变(总能量不变)的关系确定外部相关点上的壁面切向速度分量。由外部相关点和虚拟点上的总焓相等,有

$$\frac{q_d^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_d}{\rho_d} = \frac{q_f^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_f}{\rho_f} \quad (9)$$

式中  $q_d$  和  $q_f$  分别为外部相关点和虚拟点上的速率。记外部相关点上的切向速度为  $\tilde{u}_d$ ,从式(9)可得  $\tilde{u}_d$  的表达式:

$$\tilde{u}_d^2 = \tilde{u}_f^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p_f}{\rho_f} - \frac{p_d}{\rho_d} \right) + \tilde{v}_f^2 - \tilde{v}_d^2 \quad (10)$$

外部相关点  $D$  上的笛卡尔速度分量可直接由切向和法向速度分量求得。

某些内部点或外部点上会出现多值的特殊情形,该情形与宽度小于一个或两个网格间隔的窄物体相关,这里不作讨论,处理方法见文献[2]。

## 4 数值实验

本节将给出一些数值算例,以验证以上所给出的改进当地 DFD 解法的可靠性和精度方面的提高。网格生成中,先将 Cartesian 网格划分为均匀的三角形网格,然后通过由物面向外的逐次加密获得最终的计算网格。由于物面描述与计算网格不相关,物面上的流动变量无法直接从计算结果中获得。然而,DFD 离散中外部相关点上流动变量的解是由流场内部直接外延获得的,所以包含物面点的单元的顶点上流动变量均是原方程的近似解。通过该单元上的线性内插,可求得物面上的每个流动变量,数值结果中的升、阻力系数直接由表面压强系数积分获得,无需采用在控制体上应用动量定理的方式。

### 4.1 绕固定圆柱的亚声速流动

首先,考虑绕圆柱的亚声速流动。给定来流马赫数 0.38,此时圆柱表面的最大马赫数约为 0.92,物面附近网格尺度为  $1/80$  直径,远场边界为 40 倍直径的正方形。

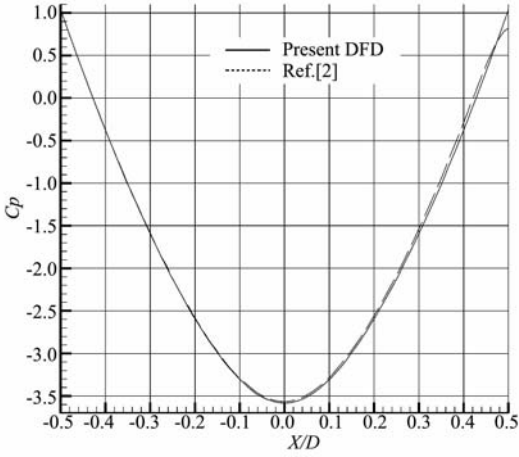


图 4 圆柱表面压强系数分布

Fig. 4 Pressure coefficients on the surface of circular cylinder

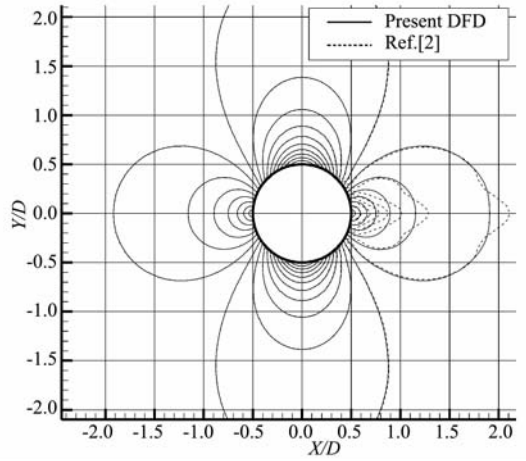


图 5 流场等马赫线

Fig. 5 Contours of Mach number

该亚临界流动的计算阻力系数为 0.0008。图 4 给出了应用改进的 DFD 方法和文献[2]原 DFD 方法分别计算所得的表面压强系数分布。现方法所得曲线具有很好的上、下游对称性，前后缘静压（即当地总压）与来流总压之比分别为 1.00003 和 0.9995，全流场各点总压误差  $|p_0 - p_{0,\infty}| / p_{0,\infty} \leq 0.234\%$ 。原方法计算所得曲线，由于后缘压强下降，上、下游失去对称性，前后缘静压与来流总压之比分别为 1.00005 和 0.98，下游总压损失较大，全流场总压误差最大值为 3.22%，比现方法的结果大许多。图 5 给出了两种方法计算的等马赫数线。可以看出，现方法计算的流场等马赫数线，上、下游几乎完全对称；而原方法计算结果的对称性较差。

数值耗散会带来总压损失，从而导致本算例中流场的上、下游不严格对称，以及一定的阻力值。上述结果表明，改进的 DFD 方法计算亚声速流场时数值耗散降低了许多，因而提高了计算结果的精确性。

#### 4.2 绕固定 NACA0012 翼型的亚、跨声速流动

表 1 给出了三个典型算例升、阻力系数的计算结果和比较。本文 DFD 方法、贴体网格和文献[8]贴体网格的计算点数目分别为 28778 和  $70 \times 320$ 、 $64 \times 320$ 。现方法获得的结果是令人满意的。

图 6 给出了  $M_\infty = 0.85, \alpha = 1^\circ$  算例的表面压强系数并与文献[2]原方法及贴体网格方法的计

表 1 升、阻力系数的比较

Tab. 1 Comparison of lift and drag coefficients

	$M_\infty = 0.63, \alpha = 2^\circ$		$M_\infty = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$		$M_\infty = 0.85, \alpha = 1^\circ$	
	$C_L$	$C_D$	$C_L$	$C_D$	$C_L$	$C_D$
DFD	0.335	0.00028	0.366	0.0235	0.372	0.058
贴体网格	0.335	0.00025	0.362	0.0224	0.380	0.059
文献[8]	0.334	-0.000021	0.359	0.0228	0.377	0.058

算结果进行了比较。两种 DFD 结果几乎没有差别。当地 DFD 方法捕获的激波比贴体网格捕获的要尖锐一些，这个小差别是由于前者采用了几何自适应的网格。图 6 及后面图 9 中激波处出现的上下过冲现象与人工粘性格式有关，取决于人工粘性项中经验常数的选取，并不可完全消除，详细讨论可见文献[8]。

对于翼型这类流线形物体，改进 DFD 方法和原方法获得的压强结果差别不大。为进一步比较，这里给出两种方法计算的翼型表面熵增  $(S - S_\infty) / S_\infty$ 。对于无粘流，只有激波处会出现物理熵增，数值计算中其他地方的熵增都是误差带来的数值熵增。图 7 和图 8 给出了两种方法计算第 1、3 算例的表面熵增结果，可以发现，无论对亚临界流还是超临界流，改进的方法在曲率较大的前缘处所产生的数值熵增比原方法的数值熵减小许多，从而降低了数

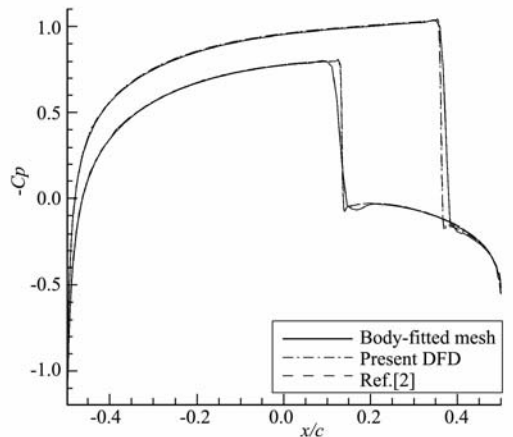


图 6 翼型表面压强系数 ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ )

Fig. 6 Pressure coefficients on airfoil surface ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ )

值误差。

与贴体网格方法相比,DFD 方法开始时收敛慢一些,随时间的推进,两种方法的收敛很快趋于一致,DFD 方法对边界的处理没有引起收敛效率的实质性变化。文献[2]已讨论过DFD方法的收

敛性及与贴体网格方法的比较,这里不再详叙。

### 4.3 绕摆动 NACA0012 翼型的跨声速流动

这里以 AGARD 实验<sup>[9]</sup>中摆动 NACA0012 翼型的跨声速绕流为算例,验证改进的当地 DFD 方法模拟运动物体绕流的能力。翼型的周期性运动由

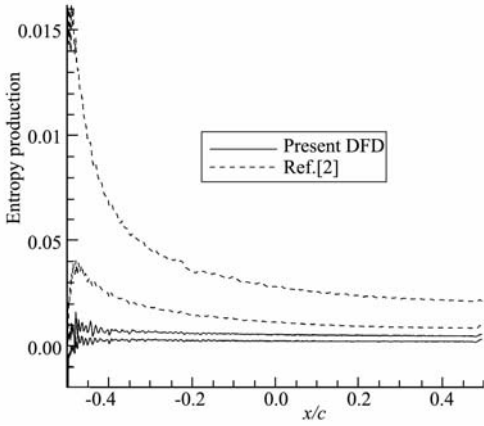


图 7 翼型表面熵增 ( $M_\infty = 0.63, \alpha = 2.0^\circ$ )  
Fig. 7 Entropy production on airfoil surface ( $M_\infty = 0.63, \alpha = 2.0^\circ$ )

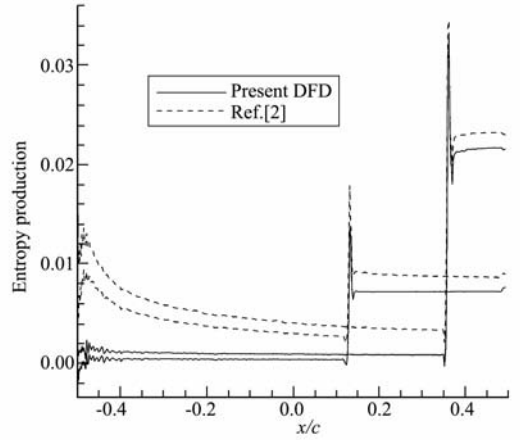
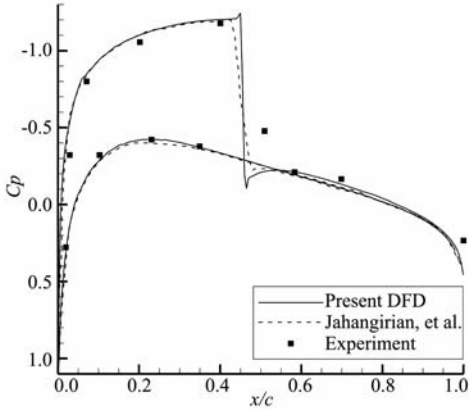
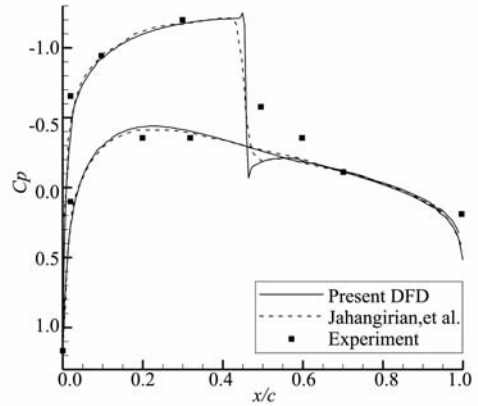


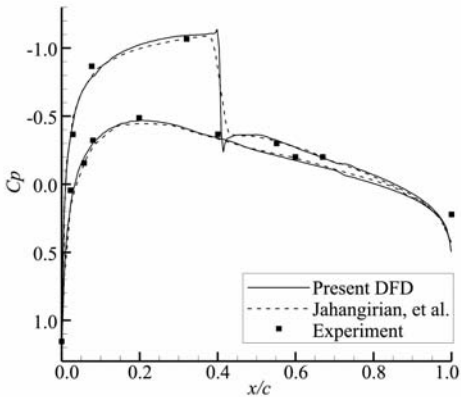
图 8 翼型表面熵增 ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ )  
Fig. 8 Entropy production on airfoil surface ( $M_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$ )



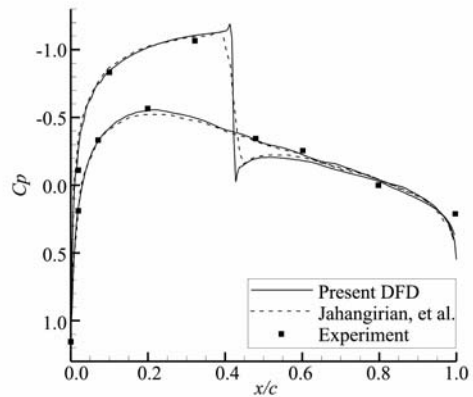
(a)  $\alpha = 2.34^\circ$  (下摆)



(b)  $\alpha = 2.01^\circ$  (下摆)



(c)  $\alpha = -2.41^\circ$  (下摆)



(d)  $\alpha = -0.54^\circ$  (上摆)

图 9 振荡 NACA0012 翼型表面压强系数

Fig. 9 Pressure coefficients on the surface of oscillating NACA0012 airfoil

迎角关于时间的函数定义为

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t)$$

式中  $\alpha_m$  为平均迎角,  $\alpha_0$  为摆幅,  $\omega$  为摆动的角频率,  $\omega$  与简约频率  $k = \omega L / 2U_\infty$  相关,  $L$  为翼型弦长,  $U_\infty$  为来流速度。翼型绕四分之一弦点摆动。对应实验中的 CT5 例, 选择  $M_\infty = 0.755$ ,  $\alpha_m = 0.016$  度,  $\alpha_0 = 2.51$  度,  $k = 0.0814$ 。

图 9 给出了四个时间步上翼型表面的压强系数分布与实验结果、文献[10]贴体网格上 Euler 结果的比较。图 10 给出了升力系数的滞归曲线与实验结果、文献[11]自适应的边界协调网格上 Euler 结果的比较。本文的 DFD 结果与文献计算结果基本一致。由于物理粘性的耗散作用以及复杂的激波附面层相互干扰等原因, 激波附近的压强分布与实验结果有一定的差异; 文献[11]的 N-S 结果在激波处的差异小一些, 但依然存在。

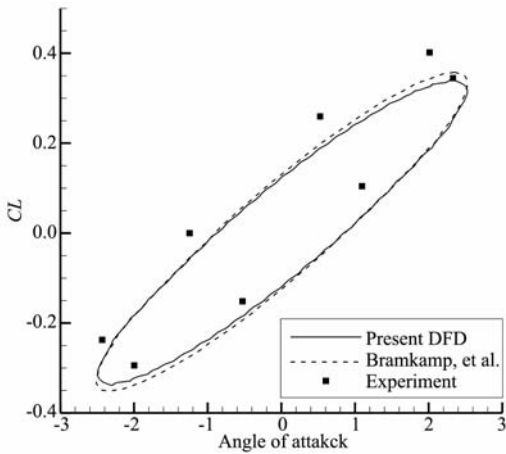


图 10 振荡 NACA0012 翼型升力系数滞归曲线

Fig. 10 Hysteresis curve of lift coefficient for oscillating NACA0012 airfoil

## 5 结 论

本文阐述了求解守恒形式 Euler 方程的当地 DFD 方法, 并对之进行了改进。与文献[2]不同, 在壁面附近解的近似形式中, 本文部分引入了 Ghost-cell 方法中基于 CCST 技术的流动模型, 域外相关点上的密度和切向速度分别由等熵和等总焓关系确定。这种改进, 使得等熵关系在近似解中得到了体现, 并在切向速度近似中考虑了壁面曲率的效应。

针对固定圆柱和 NACA0012 翼型的数值实验表明, 改进工作有效地降低了数值近似带来的非物

理总压损失或熵增, 说明数值解的精度有所提高; 振荡 NACA0012 翼型跨声速绕流的数值模拟进一步显示了当地 DFD 方法在处理动边界问题方面的有效性和可靠性。与贴体网格结果以及参考文献结果的比较, 验证了该方法具有与贴体网格方法相当的精度。

当地 DFD 方法中边界重叠在计算网格上, 所有网格点分为三类: (1) 解域内点; (2) 与近壁面内点计算相关的解域外点; (3) 与计算无关的解域外点。当物体运动时, 网格是固定的, 只有网格点的状态发生变化, 无需在每个时间步上进行网格处理, 提高了计算效率和精度。

## 参考文献 (References):

- [1] Shu C, Fan L F. A new discretization method and its application to solve incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Comput Mech*, 2001, **27**:292-301.
- [2] Zhou C H, Shu C, Wu Y Z. Extension of domain-free discretization method to simulate compressible flows over fixed and moving bodies[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2007, **53**:175-199.
- [3] Quirk J J. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamics flows around arbitrary complex two-dimensional bodies [J]. *Compute Fluids*, 1994, **23**:125-142.
- [4] Colella P, Graves T D, Keen B J, Modiano D. A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws[J]. *J Comput Phys*, 2006, **211**:347-366.
- [5] Dadone A, Grossman B. An immersed body methodology for inviscid flows on Cartesian grids[R]. AIAA Paper, 2002, 2002-1059.
- [6] Dadone A, Grossman B. Further developments in the three-dimensional Cartesian-grid ghost-cell method [R]. AIAA Paper, 2006, 2006-1085.
- [7] Mavriplis D J, Jameson A. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes [J]. *AIAA J*, 1990, **28**(8):1415-1425.
- [8] Kroll N, Jain R K. Solution of two-dimensional euler equations-Experience with a finite volume Code[R]. DFVLR-FB, 1987, 87-41.
- [9] Landon R H. NACA0012. Oscillatory and transient pitching, pages 3. 1-3. 25, *Compendium of Unsteady*

Aerodynamic Measurement, Data Set 3[R]. AGARD Report, 1983, 702.

[10] Jahangirian A, Hadidoolabi M. Unstructured moving grids for implicit calculation of unsteady compressible viscous flows[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2005,

47:1107-1113.

[11] Bramkamp F, Lamby P H, Muller S. An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady and steady state flow computations[J]. *J Comput Phys*, 2004, 197:460-490.

## Improvement and application of the local domain-free discretization method for numerical simulation of compressible flows

ZHOU Chun-hua

(Department of Aerodynamics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** This paper presents the improvement and application of the local domain—free discretization (DFD) method to solve the Euler equations in conservative form. The key of the discretization strategy of DFD is that the discrete form of governing equations at an interior point may involve some points outside the solution domain. By the approximate form of solution near the boundary, the flow variables at the exterior dependent points can be evaluated, and boundary conditions can also be imposed at the same time. Being different from the original local DFD, the Curvature-Corrected Symmetry Technique (CCST) is introduced in the construction of the approximate form of solution, and therefore the density and the velocity component tangential to the body, at the exterior dependent points, are determined respectively from the constant-entropy and constant-total-enthalpy relations. The Galerkin finite volume method is used for spatial discretization in the local DFD. Some numerical results for compressible flows over fixed and moving bodies are presented to validate the improvement in accuracy and the applicability of the present local DFD method.

**Key words:** Non-boundary-conforming methods; boundary conditions; moving boundary; compressible flows; finite volume method