第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0035-12 **文献标识码: A**

Banach 代数上
广义 Drazin 逆的扰动

刘晓冀 覃永辉

广西民族大学理学院 南宁 530006
E-mail: xiaojiliu72@126.com; yonghui1676@163.com

摘 要 我们利用分块技术得到了扰动后元素广义 Drazin 可逆的充要条件, 还研究了 Banach 代数上广义 Drazin 逆的扰动以及给出了扰动界.

关键词 Banach 代数; 广义 Drazin 逆; 扰动界
MR(2010) 主题分类 15A09, 65F10
中图分类 O151

Perturbation of the Generalized Drazin Inverse in Banach Algebra

Xiao Ji LIU Yong Hui QIN

College of Science, Guangxi University for Nationalities,
Nanning 530006*, P. R. China*
E-mail: *xiaojiliu72@xiaojiliu72@126.com*; *yonghui*1676*@*163*.com*

Abstract We present the necessary and sufficient conditions for the element after perturbing and investigate the perturbation bounds for the generalized Drazin inverse by using block technology in Banach algebra.

Keywords Banach algebra; the generalized Drazin inverse; perturbation bound
MR(2010) Subject Classification 15A09, 65F10
Chinese Library Classification O151

1 引言

设 $\mathscr{A}$ 是单位为 1 的 Banach 代数. 用 $\mathscr{A}^{-1}, \mathscr{A}^{\mathrm{nil}}, \mathscr{A}^{\mathrm{qnil}}$ 和 $\mathscr{A}^{\bullet}$ 分别表示所有可逆元, 幂零元, 拟幂零元和幂等元的集合.

设 $a \in \mathscr{A}$, 则 $\sigma(a)$, Ind(a) 分别表示 a 的谱, 指标.

若存在唯一元素 $b \in \mathscr{A}$ 满足

$$bab = b, \quad ab = ba, \quad a(1-ab) \in \mathscr{A}^{\mathrm{nil}}, \tag{1.1}$$

收稿日期: 2011-12-15; 接受日期: 2013-03-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11061005)

则称 b 为 a 的 Drazin 逆且唯一, 记为 $b=a^D$. 若 (1.1) 为

$$bab=b,\quad ab=ba,\quad a-a^2b\in\mathscr{A}^{\mathrm{qnil}},\tag{1.2}$$

则称 b 为 a 的广义 Drazin 逆且唯一, 记为 $b=a^d$ (见文 [10]).

设 $a\in\mathscr{A}$ 和 $p\in\mathscr{A}^\bullet$ 是幂等 ($p^2=p$), 则 a 可写成 (见文 [8])

$$a=pap+pa(1-p)+(1-p)ap+(1-p)a(1-p).$$

设

$$a_{11}=pap,\quad a_{12}=pa(1-p),\quad a_{21}=(1-p)ap,\quad a_{22}=(1-p)a(1-p),$$

则

$$a=\left[\begin{array}{cc} pap & pa(1-p)\\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p)\end{array}\right]_p=\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{array}\right]_p.$$

设 $a\in\mathscr{A}^d$ 和 $p=aa^d$, 则

$$a=\left[\begin{array}{cc} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{array}\right]_p,\quad a^d=\left[\begin{array}{cc} a_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]_p,\quad a^\pi=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0\\ 0 & 1-p\end{array}\right]_p,\tag{1.3}$$

其中 $a^\pi=1-p$, $a_1\in p\mathscr{A}p$ 可逆, $a_2\in(1-p)\mathscr{A}(1-p)$ 拟幂零.

近年来, 在国内外许多学者的努力下, 广义逆扰动分析的研究得到了迅速的发展 (见文 [2, 4, 6, 8, 11–13, 17]). 文 [1] 给出 A_j^D 收敛于 A^D 当且仅当 $\exists j_0$ 且对于 $\forall j\geq j_0$, 使得 core-rank $A_j=$ core-rank A. 文 [3] 研究了闭线性算子的扰动分析, 以及得到了 $\|(A+U)^D-A^D\|$ 的扰动界. 文 [4] 研究了扰动算子的谱投影和原算子 A 谱投影相同时闭线性算子 A 的 Drazin 逆的扰动. 文 [5] 研究 Banach 代数上广义 Drazin 逆和的表达式, 且得到了 2×2 分块矩阵的表达式. 文 [12] 给出了 Banach 代数上广义 Drazin 逆的扰动以及 Banach 空间上有界线性算子广义 Drazin 逆的扰动. 文 [6] 得到了不依赖于 $\|A^D\|\,\|E\|<1$ 经扰动后算子 $A+E$ 的表达式和扰动界 (见下文). 受文 [6] 的启发, 我们将给出新的条件下 $(a+u)^d$ 的表达式和扰动界.

设 $A\in B(X,Y)$ 表示从 X 映射到 Y 上的有界线性算子, 其中 X, Y 都为 Banach 空间 (若 $X=Y$, 则 $A\in B(X)$). 如果 $A\in B(X)$ 是广义 Draizn 逆, 则 A 为 (见文 [8])

$$A=\left[\begin{array}{cc} A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{array}\right]:\left(\begin{array}{c} N(A^\pi)\\ R(A^\pi)\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{c} N(A^\pi)\\ R(A^\pi)\end{array}\right),$$

其中 A_1 和 A_2 分别可逆和拟幂零.

设 $A,U,B\in B(X)$, A 是广义 Drazin 逆且 $B=A+U$, 则关于空间分解 $X=N(A^\pi)\oplus R(A^\pi)$ 有 (见文 [6])

$$U=\left[\begin{array}{cc} U_{11} & U_{12}\\ 0 & U_{22}\end{array}\right],\quad B=A+U=\left[\begin{array}{cc} A_1+U_{11} & U_{12}\\ 0 & A_2+U_{22}\end{array}\right].$$

根据文 [6], 在以下条件下分别研究了有界线性算子的广义 Drazin 逆的扰动以及 $\|(A+U)^d-A^d\|$ 的上界,

- A_1+U_{11} 可逆和 $[R(A^\pi)]$ 维数是有限的.
- A_1+U_{11} 可逆和 $U_{22}A_2=0$.
- A_1+U_{11} 可逆和 $U_{22}A_2=A_2U_{22}$.

A_1+U_{11} 可逆比条件 $\|A_1^D\|\,\|U_{11}\|<1$ (见文 [3, 8, 14, 16]) 弱, 因为 $\|A_1^D\|\,\|U_{11}\|<1$ 蕴含 (A_1+U_{11}) 可逆 (见文 [6]).

若 $a\in\mathscr{A}^d$, 则 a 为 (1.3), 另一方面, 若 $u\in\mathscr{A}$ 是 a 的扰动元, 则 u 为

$$u=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}_p,$$

其中 $p=aa^d$. 受文 [6] 的启发, 我们分别就以下条件讨论 Banach 代数上的广义 Drazin 逆的扰动和给出扰动后元素广义 Drazin 逆 $(a+u)^d$ 的精确表达式以及得到了 $\|(a+u)^d-a^d\|$ 的上界:

- a_1+u_{11} 可逆和 $a_2u_{22}^2=0$, $a_2^2=0$.
- a_1+u_{11} 可逆和 $a_2^2u_{22}=0$, $u_{22}^2=0$.
- a_1+u_{11} 可逆和 $u_{22}^2=u_2$.

下面给出几个有用的引理.

引理 1.1 [2] 设 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数, $x,y\in\mathscr{A}$ 和 $p\in\mathscr{A}^\bullet$, 设

$$x=\begin{bmatrix} a & c\\ 0 & b\end{bmatrix}_p,\quad y=\begin{bmatrix} b & 0\\ c & a\end{bmatrix}_{1-p}.$$

(i) 若 $a\in(p\mathscr{A}p)^d$, $b\in((1-p)\mathscr{A}(1-p))^d$, 则 $x,y\in\mathscr{A}^d$ 且

$$x^d=\begin{bmatrix} a^d & \mathscr{U}\\ 0 & b^d\end{bmatrix}_p,\quad y^d=\begin{bmatrix} b^d & 0\\ \mathscr{U} & a^d\end{bmatrix}_{1-p},\tag{1.4}$$

其中

$$\mathscr{U}=\sum_{n=0}^{\infty}(a^d)^{n+2}cb^nb^\pi+\sum_{n=0}^{\infty}a^\pi a^nc(b^d)^{n+2}-a^dcb^d.$$

(ii) 若 $x\in\mathscr{A}^d$, $a\in(p\mathscr{A}p)^d$, 则 $b\in[(1-p)\mathscr{A}(1-p)]^d$ 且 x^d 取值为 (1.4).

引理 1.2 [2] 设 $a,b\in\mathscr{A}$ 广义 Drazin 可逆满足 $ab=0$, 则 $a+b$ 广义 Drazin 可逆且

$$(a+b)^d=b^\pi\sum_{n=0}^{\infty}b^n(a^d)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(b^d)^{n+1}a^na^\pi.$$

引理 1.3 [7] 设 $a,b\in\mathscr{A}^d$, 使得 $ab=ba$, 则 $(a+b)\in\mathscr{A}^d$ 当且仅当 $1+a^db\in\mathscr{A}^d$, 此时

$$(a+b)^d=a^d(1+a^db)^dbb^d+b^\pi\sum_{n=0}^{\infty}(-b)^n(a^d)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(b^d)^{n+1}(-a)^na^\pi.$$

引理 1.4 [9] 设 $M=[\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right)]_p$, 如果 $\sigma(a)\cap\sigma(c)$ 无内交点, 则 $\sigma(M)=\sigma(a)\cup\sigma(c)$.

对于 $\mu\in C$, $K\subset C$, 若 $\sigma(a)\neq\emptyset$, 定义

$$\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(a))=\inf\{\|\lambda_i-\lambda\|:\lambda_i\in\sigma(a)\},$$

则我们得到下面引理.

引理 1.5 [6] 设 $a,u\in\mathscr{A}$ 和 $b=a+u$, 且 $\sigma_\epsilon(a)=\{\lambda:\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(a))<\epsilon\}$, 则对于 $\forall\,\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\sigma(b)\subset\sigma_\epsilon(a)$, 其中 $\|u\|<\delta$.

2 主要定理及其证明

定理 2.1 设 $a,b\in\mathscr{A}$ 是广义 Drazin 可逆且满足 $ab^2=0$ 和 $a^2=0$, 则 $a+b$ 广义 Drazin 可逆当且仅当 $[b^\pi(a+b)]^d$ 存在. 若 $b^\pi ab\in\mathscr{A}^d$, $\|ab\|\,\|a^d\|^2<1$ 和 $\|(ab)^d\|\,\|a^2\|<1$, 则

(i) $(a+b)^d=\sum_{k=0}^{\infty}(b^d)^{2k+1}\left\{b^d(ab)^\pi(ba)^k a+(ab)^\pi(ab)^k\right\}$;

(ii)
$$\frac{\|(a+b)^d-a^d\|}{\|a^d\|}\le\|b(ab)^\pi a^d\|+\|(ab)^d(ab)\|+\frac{\|(ab)^\pi\|\,\|ab\|}{1-\|ab\|\,\|a^d\|^2}\big(\|b\|\,\|a^d\|^3+\|a^d\|^2\big)$$
$$+\frac{\|(ab)^d\|\,\|a\|}{\|a^d\|(1-\|(ab)^d\|\,\|a^2\|)}\big(\|b\|\,\|a^\pi\|+\|aa^\pi\|\big). \tag{2.1}$$

证明 设 $p=\{bb^d,b^\pi\}$, 则 $b=[\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}]_p$, 其中 $b_1\in bb^d\mathscr{A}bb^d$ 可逆和 $b_2\in b^\pi\mathscr{A}b^\pi$ 为拟幂零. 设 $a=[\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}]_p$, 由 $ab^2=0$ 和 $a^2=0$, 则
$$a_{11}=0,\quad a_{21}=0,\quad a_{12}b_2^2=0,\quad a_{22}b_2^2=0. \tag{2.2}$$
$$a_{12}a_{22}=0,\quad a_{22}^2=0,\quad a+b=\begin{bmatrix}b_1&a_{12}\\0&b_2+a_{22}\end{bmatrix}_p. \tag{2.3}$$

由引理 1.1, 则 $(a+b)^d$ 存在当且仅当 $(a_{22}+b_2)^d$ 存在, 也就是说 $(a+b)^d$ 存在当且仅当 $[b^\pi(a+b)]^d$ 存在.

下面讨论 a^d 扰动后 $(a+b)^d$ 的表达式:

由 (2.2), (2.3), 则 $(b_2a_{22})(a_{22}b_2)=(a_{22}b_2)(b_2a_{22})=0$. 因为 $b^\pi ab$ 广义 Drazin 可逆, 所以 $(a_{22}b_2)^d$ 存在且 $(b_2a_{22})^d=b_2[(a_{22}b_2)^d]^2a_{22}$.

由引理 1.3, 可得
$$(a_{22}b_2+b_2a_{22})^d=(a_{22}b_2)^d+(b_2a_{22})^d. \tag{2.4}$$

因为 b_2 为拟幂零且 $(a_{22}b_2+b_2a_{22})b_2^2=0$, 由引理 1.2 和 (2.4), 可得
$$\begin{aligned}[(a_{22}+b_2)^2]^d &= (a_{22}b_2+b_2a_{22}+b_2^2)^d=\sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}[(a_{22}b_2+b_2a_{22})^d]^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}\left[(a_{22}b_2)^d+(b_2a_{22})^d\right]^{n+1}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

由于 $b^\pi(a+b)$ 广义 Drazin 可逆, 则 $(a_{22}+b_2)^d$ 存在且 $(a_{22}+b_2)^d=[(a_{22}+b_2)^2]^d(a_{22}+b_2)$. 由归纳法, 可证
$$[(a_{22}b_2)^d+(b_2a_{22})^d]^{n+1}=[(a_{22}b_2)^d]^{n+1}+[(b_2a_{22})^d]^{n+1}.$$

由 $(b_2a_{22})^d=b_2\left[(a_{22}b_2)^d\right]^2a_{22}$ 以及 (2.5), 则
$$\begin{aligned}(a_{22}+b_2)^d &= \sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}\{[(a_{22}b_2)^d]^{n+1}+\big(b_2[(a_{22}b_2)^d]^2a_{22}\big)^{n+1}\}(a_{22}+b_2)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}\left[(a_{22}b_2)^d\right]^{n+1}a_{22}+\sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}\left[b_2((a_{22}b_2)^d)^2a_{22}\right]^{n+1}b_2\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n}\{\left[(a_{22}b_2)^d\right]^{n+1}a_{22}+b_2\left[(a_{22}b_2)^d\right]^{n+1}\},\\ (a_{22}+b_2)^\pi &= (a_{22}b_2)^\pi-\sum_{n=0}^{\infty}b_2^{2n+1}\{\left[(a_{22}b_2)^d\right]^{n+1}a_{22}+b_2\left[(a_{22}b_2)^d\right]^{n+1}\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由引理 1.1, 可得
$$a+b\in\mathscr{A}^d,\quad (a+b)^d=\begin{bmatrix}b_1^{-1}&u\\0&(a_{22}+b_2)^d\end{bmatrix}_p, \tag{2.7}$$

其中

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(b_1^{-1})^{n+2}a_{12}(b_2+a_{22})^n(a_{22}+b_2)^{\pi}-(a_{22}+b_2)^d a_{12}b_1^{-1}.$$

注意到

$$\left[b_1^{-1}\right]_p=b^d,\quad b^dba=\begin{bmatrix} b_1^{-1}b_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_p\begin{bmatrix} 0 & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}_p=\begin{bmatrix} 0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}_p=a_{12}.$$

由归纳法和 (2.2), (2.3) 易证: 若 $n\geq 1$, 则

$$a_{12}(a_{22}+b_2)^n=\begin{cases} a_{12}(b_2a_{22})^{n/2}, & 若\ n\ 偶数,\\ a_{12}(b_2a_{22})^{(n-1)/2}b_2, & 若\ n\ 奇数.\end{cases}\tag{2.8}$$

对于任意 $n\geq 1$, 有

$$b^{\pi}(ba)^n=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & b^{\pi}\end{bmatrix}_p\begin{bmatrix} 0 & x_n\\ 0 & (b_2a_{22})^n\end{bmatrix}_p=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & (b_2a_{22})^n\end{bmatrix}_p=(b_2a_{22})^n,$$

其中 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的任一序列.

由 $b_2=b^{\pi}b=bb^{\pi}$ 及 $ab^{\pi}=a(1-b^2(b^d)^2)=a$, 有

若 $n\geq 1$ 是偶数, 则

$$a_{12}(a_{22}+b_2)^n=a_{12}(b_2a_{22})^{n/2}=b^dbab^{\pi}(ba)^{n/2}=b^dba(ba)^{n/2}=b^d(ba)^{(n+2)/2};$$

若 $n\geq 1$ 是奇数, 则

$$a_{12}(a_{22}+b_2)^n=a_{12}(b_2a_{22})^{(n-1)/2}b_2=b^dbab^{\pi}(ba)^{(n-1)/2}b^{\pi}b=b^d(ba)^{(n+1)/2}b.$$

由 (2.6) 有

$$a_{12}(a_{22}+b_2)^{\pi}=a_{12}(1-b_2(a_{22}b_2)^da_{22}),\quad a_{22}(a_{22}+b_2)^{\pi}=(a_{22}b_2)^{\pi}a_{22},$$
$$a_{12}b_2(a_{22}+b_2)^{\pi}=a_{12}b_2(a_{22}b_2)^{\pi},\quad a_{22}b_2(a_{22}+b_2)^{\pi}=a_{22}b_2(a_{22}b_2)^{\pi}.$$

由 $(ba)^kb=b(ab)^k$ 和 (2.7), 有

$$\begin{aligned}(a+b)^d\ &=\ [b_1]_p^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(\left[b_1^{-1}\right]_p)^{n+2}a_{12}(b_2+a_{22})^n(a_{22}+b_2)^{\pi}\\ &\quad -(a_{22}+b_2)^da_{12}b_1^{-1}+(a_{22}+b_2)^d\\ &=\ \sum_{k=0}^{\infty}(b^d)^{2k+2}(ab)^{\pi}(ab)^ka+\sum_{k=0}^{\infty}(b^d)^{2k+1}(ab)^{\pi}(ab)^k\\ &\quad -\sum_{n=0}^{\infty}b^{\pi}b^{2n}\left\{[(ab)^d]^{n+1}a+b[(ab)^d]^{n+1}\right\}\\ &=\ \sum_{k=0}^{\infty}(b^d)^{2k+1}\left[b^d(ab)^{\pi}(ab)^ka+(ab)^{\pi}(ab)^k\right]\\ &\quad -\sum_{n=0}^{\infty}b^{\pi}b^{2n}\left\{[(ab)^d]^{n+1}a+b[(ab)^d]^{n+1}\right\}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

下面讨论扰动界 $\|(a+b)^d-a^d\|$.

由 (2.9), 有

$$\begin{aligned}(a+b)^d-a^d &= \sum_{j=0}^{\infty}\big(b(ab)^{\pi}(ab)^j a^d+(ab)^{\pi}(ab)^j\big)(a^d)^{2j+1}\\&\quad+\sum_{j=0}^{\infty}\big(b((ab)^d)^{j+1}+((ab)^d)^{j+1}a\big)a^{2j}a^{\pi}-a^d\\&= b(ab)^{\pi}(a^d)^2-(ab)^d(ab)a^d\\&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}\big(b(ab)^{\pi}(ab)^j a^d+(ab)^{\pi}(ab)^j\big)(a^d)^{2j+1}\\&\quad+\sum_{j=0}^{\infty}\big(b((ab)^d)^{j+1}+((ab)^d)^{j+1}a\big)a^{2j}a^{\pi}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

由 (2.10), 有

$$\begin{aligned}\|(a+b)^d-a^d\| &\le \|b(ab)^{\pi}(a^d)^2\|+\|(ab)^d(ab)a^d\|\\&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}\|(ab)^{\pi}\|\left(\|(ab)\|\,\|a^d\|^2\right)^j\left(\|b\|\,\|a^d\|^2+\|a^d\|\right)\\&\quad+\sum_{j=0}^{\infty}\|b\|\,\|(ab)^d\|\left(\|(ab)^d\|\,\|a^2\|\right)^j\|a^{\pi}\|\\&\quad+\sum_{j=0}^{\infty}\|(ab)^d\|\left(\|(ab)^d\|\,\|a^2\|\right)^j\|aa^{\pi}\|.\end{aligned}$$

若 $\|(ab)\|\,\|a^d\|^2<1$ 和 $\|(ab)^d\|\,\|a^2\|<1$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\|(a+b)^d-a^d\|}{\|a^d\|} &\le \|b(ab)^{\pi}a^d\|+\|(ab)^d(ab)\|+\frac{\|(ab)^{\pi}\|\,\|(ab)\|}{1-\|(ab)\|\,\|a^d\|^2}\big(\|b\|\,\|a^d\|^3+\|a^d\|^2\big)\\&\quad+\frac{\|(ab)^d\|}{\|a^d\|(1-\|(ab)^d\|\,\|a^2\|)}\big(\|b\|\,\|a^{\pi}\|+\|aa^{\pi}\|\big),\end{aligned}\tag{2.11}$$

由 (2.11), 则 (ii) 得证.

定理 2.2 设 $a,u\in\mathscr{A}^d$ 满足 $a^{\pi}u(1-a^{\pi})=0$, $aa^{\pi}u^2=0$, $a^{\pi}a^2=0$ 且 $a^{\pi}u$ 广义 Drazin 可逆, 则存在 $\delta>0$, 且对于 $\forall\|u\|<\delta$, 使得 $b=a+u$ 广义 Drazin 可逆当且仅当 $[a^{\pi}(a+u)]^d$ 存在. 进一步, 若 $(a^{\pi}au)^d$ 存在, 则

(i) $b^d=v+w-vuw+\big\{\sum_{n=0}^{\infty}v^{n+2}ua^{\pi}\left[a^{\pi}(a+u)\right]^n\big\}\times[1-(a+u)w]$;

(ii) 若 $\|ua^d\|<1$ 和 $\|(aa^{\pi}u)^d\|<1$, 则 $\|b^d-a^d\|\le\delta_2(1+\delta_1\|u\|)+\frac{\delta_1}{\|a^du\|}+\delta_3$, 其中

$$\begin{aligned}&v=(1+a^du)^{-1}a^d,\quad \delta_1=\frac{\|a^d\|\,\|a^du\|}{1-\|a^du\|},\\&w=\sum_{n=0}^{\infty}(a^{\pi}u)^{\pi}u^{2n}\left[a^{\pi}u((au^{\pi}u)^d)^{n+1}+((au^{\pi}u)^d)^{n+1}u^{\pi}a\right],\\&\delta_2=\left(\frac{\|a^{\pi}u\|\,\|(aa^{\pi}u)^d\|}{1-\|(aa^{\pi}u)^d\|}+\frac{\|a^{\pi}a\|\,\|(aa^{\pi}u)^d\|}{1-\|(aa^{\pi}u)^d\|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\|(a^{\pi}u)^{\pi}u^{2n}\|,\\&\delta_3=\frac{\|a^d\|\,\|a^du\|^2(1+\|a^{\pi}(a+u)\|\delta_2)}{1-\|a^du\|}\sum_{n=0}^{\infty}\|a^{\pi}u[a^{\pi}(a+u)]^n\|+\frac{\delta_1\delta_2\|u\|}{\|a^du\|}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

证明 令 $p=aa^d$, 则 $a^\pi=1-p$, a, a^d 为 (1.3), 设 u 为

$$u=\left[\begin{array}{cc} u_1 & u_{12} \\ u_{21} & u_2 \end{array}\right]_p, \tag{2.13}$$

其中 $a_1\in p\mathscr{A}p$ 可逆和 $a_2\in(1-p)\mathscr{A}(1-p)$ 拟幂零.

由 $a^\pi u(1-a^\pi)=0$, 有

$$u_{21}=0, u=\left[\begin{array}{cc} u_1 & u_{12} \\ 0 & u_2 \end{array}\right]_p,\quad b=\left[\begin{array}{cc} a_1+u_1 & u_{12} \\ 0 & a_2+u_2 \end{array}\right]_p. \tag{2.14}$$

若 a 可逆, 则 $\mathrm{Ind}(a)=0$ 和 $a^\pi=0$. 由引理 1.4, 则存在 $\delta>0$ 使得 b 可逆, 容易证 $b^d=b^{-1}=(1+a^{-1}u)a^{-1}$, $\mathrm{Ind}(b)=0$. 即 (2.12) 中的 $w=0$, 即 (i) 得证. 若 a 为拟幂零且 $a^\pi=1$, 则 $a^2a^\pi u=a^2u=0$, $a^\pi u^2=u^2=0$. 由引理 2.1, 则 (i) 成立.

下面考虑 $a\in\mathscr{A}^d$ 且 $\mathrm{Ind}(a)>0$, 即 a 既不是可逆也不是拟幂零.

由引理 1.4, 则存在不相交的子集 M_1, M_2, 使得 $\sigma_\epsilon(a_1)\subset M_1$ 和 $\sigma_\epsilon(a_2)\subset M_2$, 其中 $\epsilon>0$. 由引理 1.5, 得

$$\sigma(a_1+u_1)\subset\sigma_\epsilon(a_1),\quad \sigma(a_2+u_2)\subset\sigma_\epsilon(a_2),$$

其中 $\delta>0$ 和 $\|u\|<\delta$, 即得 $\|u_1\|<\delta$, $\|u_2\|<\delta$.

注意到 $\sigma(a_1+u_1)\cap\sigma(a_2+u_2)=\emptyset$. 由引理 1.5, 可断定 $\sigma(b)=\sigma(a_1+u_1)\cup\sigma((a_2+u_2)$ 且总存在一 $\delta>0$, 使得 a_1+u_1 可逆, 其中 $\|u_1\|<\delta$. 由 (2.14) 第二个等式和引理 1.1, 可知 $(a+u)^d$ 存在当且仅当 $(a_2+u_2)^d$ 存在, 即 $[a^\pi(a+u)]^d$ 也存在.

下面给出 (i) 的证明:

由

$$aa^\pi u^2=\left[\begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{array}\right]_p\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]_p\left[\begin{array}{cc} u_1 & u_{12} \\ 0 & u_2 \end{array}\right]_p^2=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a_2u_2^2 \end{array}\right]_p=0,$$

则 $a_2u_2^2=0$.

因为 $a^\pi a^2=0$, 则

$$a^\pi a^2=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]_p\left[\begin{array}{cc} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{array}\right]_p=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{array}\right]_p=0,$$

由此得 $a_2^2=0$ 且 $a_2^d=0$. 由于 $(a^\pi au)^d$ 存在, 则 $(a_2u_2)^d$ 存在, 由此可以推出 $(u_2a_2)^d$ 存在因为 $(u_2a_2)^d=u_2[(a_2u_2)^d]^2a_2$.

由 $a^\pi u$ 广义 Drazin 可逆和定理 2.1, 有

$$(a_2+u_2)^d=-\sum_{n=0}^{\infty}u_2^\pi u_2^{2n}\left[[(a_2u_2)^d]^{n+1}a_2+u_2[(a_2u_2)^d]^{n+1}\right]. \tag{2.15}$$

由引理 1.1, 有 $b=a+u$ 广义 Drazin 可逆, 且

$$b^d=\left[\begin{array}{cc} (a_1+u_1)^{-1} & x \\ 0 & (a_2+u_2)^d \end{array}\right]_p, \tag{2.16}$$

其中 $x=\sum_{n=0}^{\infty}(a_1+u_1)^{-(n+2)}u_{12}(a_2+u_2)^n(a_2+u_2)^\pi-(a_1+u_1)^{-1}u_{12}(a_2+u_2)^d$.

为了证明 (i), 先给出下面的计算

$$(a_1+u_1)^{-1}\oplus 0=(1+a_1^{-1}u_1)a_1^{-1}\oplus 0=(1+a^du)^{-1}a^d=v, \tag{2.17}$$

$$[a^\pi(a+u)]^d = 0 \oplus (a_2+u_2)^d = 0 \oplus \sum_{n=0}^{\infty} u_2^\pi u_2^{2n}[u_2((a_2u_2)^d)^{n+1} + ((a_2u_2)^d)^{n+1}a_2]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(a^\pi u)^\pi u^{2n}[a^\pi u((aa^\pi u)^d)^{n+1} + ((aa^\pi u)^d)^{n+1}a] = w. \tag{2.18}$$

由 (2.16), 有

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2}a^\pi u[a^\pi(a+u)]^n\right\} \times [1-a^\pi(a+u)w] - vuw, \tag{2.19}$$

即 (i) 成立.

(ii) 由 (i), 有

$$\begin{aligned} b^d - a^d &= v + w - vuw + \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2}ua^\pi[a^\pi(a+u)]^n \times [1-a^\pi(a+u)w] - a^d \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a^du)^n a^d + w - vuw + \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2}ua^\pi[a^\pi(a+u)]^n \times [1-a^\pi(a+u)w] - a^d \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2}ua^\pi[a^\pi(a+u)]^n \times [1-a^\pi(a+u)w] + \sum_{n=1}^{\infty}(a^du)^n a^d + w - vuw. \end{aligned} \tag{2.20}$$

注意到 $\sigma(ua^d)\cup\{0\} = \sigma(a^du)\cup\{0\}$, 它蕴含 $\|ua^d\|<1$ 等价于 $\|a^du\|<1$, 即

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(a^du)^n a^d\right\| \le \frac{\|a^d\|\,\|a^du\|}{1-\|a^du\|} = \delta_1. \tag{2.21}$$

由 (2.17), (2.18), (2.19) 和 $\|(aa^\pi u)^d\|<1$, 可得

$$\begin{aligned} \|w\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(a^\pi u)^\pi u^{2n}\left[a^\pi u((aa^\pi u)^d)^{n+1} + ((aa^\pi u)^d)^{n+1}a^\pi a\right]\right\| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\|[a^\pi u((aa^\pi u)^d)^{n+1} + ((aa^\pi u)^d)^{n+1}(a^\pi a)]\| \sum_{n=0}^{\infty}\|(a^\pi u)^\pi u^{2n}\| \\ &\le \left[\sum_{n=0}^{\infty}\|a^\pi u\|\,\|(aa^\pi u)^d\|^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\|(aa^\pi u)^d\|^{n+1}(a^\pi a)\|\right]\sum_{n=0}^{\infty}\|(a^\pi u)^\pi u^{2n}\| \\ &\le \left(\frac{\|a^\pi u\|\,\|(aa^\pi u)^d\|}{1-\|(aa^\pi u)^d\|} + \frac{\|a^\pi a\|\,\|(aa^\pi u)^d\|}{1-\|(aa^\pi u)^d\|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\|(a^\pi u)^\pi u^{2n}\| \\ &= \delta_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2}a^\pi u[a^\pi(a+u)]^n\right\} \times [1-a^\pi(a+u)w] - vuw\right\| \\ &\le \frac{\|a^d\|\,\|a^du\|^2(1+\|a^\pi(a+u)\|\delta_2)}{1-\|a^du\|}\sum_{n=0}^{\infty}\|a^\pi u[a^\pi(a+u)]^n\| + \frac{\delta_1\delta_2\|u\|}{\|a^du\|} \\ &= \delta_3. \end{aligned} \tag{2.23}$$

对 (2.20) 取范数且由 (2.21)–(2.23), 则 (ii) 得证.

类似定理 2.2, 可得以下结论:

定理 2.3 设 $a,u\in\mathscr{A}^d$ 满足 $a^\pi u(1-a^\pi)=0$, $a^2a^\pi u=0$, $a^\pi u^2=0$ 且 $a^\pi u$ 广义 Drazin 可逆, 则存在 $\delta>0$ 且对于 $\forall\|u\|<\delta$, 使得 $b=a+u$ 广义 Drazin 可逆当且仅当 $[a^\pi(a+u)]^d$ 存在, 进一步, 若 $a^\pi au\in\mathscr{A}^d$, 则

(i) $b^d=v+w-vuw+\left\{\sum_{n=0}^\infty v^{n+2}u(1-p)[(1-p)(a+u)]^n\right\}\times[1-(a+u)w]$,

(ii) 若 $\|ua^d\|<1$ 和 $\|(aa^\pi u)^d\|<1$, 则 $\|b^d-a^d\|\le\delta_2(1+\delta_1\|u\|)+\frac{\delta_1}{\|a^du\|}+\delta_3$, 其中

$$v=(1+a^du)^{-1}a^d,\quad \delta_1=\frac{\|a^d\|\,\|a^du\|}{1-\|a^du\|},$$

$$w=\sum_{n=0}^\infty\left\{\left[a^\pi u((aa^\pi u)^d)^{n+1}+((aa^\pi u)^d)^{n+1}a^\pi a\right](a^\pi a)^\pi a^{2n}\right\},$$

$$\delta_2=\left(\frac{\|a^\pi a\|\,\|(aa^\pi u)^d\|}{1-\|(aa^\pi u)^d\|}+\frac{\|a^\pi u\|\,\|(aa^\pi u)^d\|}{1-\|(aa^\pi u)^d\|}\right)\sum_{n=0}^\infty\|(a^\pi a)^\pi u^{2n}\|,$$

$$\delta_3=\frac{\|a^d\|\,\|a^du\|^2(1+\|a^\pi(a+u)\|\delta_2)}{1-\|a^du\|}\sum_{n=0}^\infty\|a^\pi a\,[a^\pi(a+u)]^n\|+\frac{\delta_1\delta_2\|u\|}{\|a^du\|}.$$

定理 2.4 设 $a,u\in\mathscr{A}^d$ 满足 $a^\pi u(1-a^\pi)=0$ 且 $a^\pi u^2=a^\pi u$, 则存在 $\delta>0$ 且对于 $\forall\|u\|<\delta$, 使得 $b=a+u$ 广义 Drazin 可逆当且仅当 $[a^\pi(a+u)]^d$ 存在. 进一步, 若 $ga^\pi a(1-g)=0$, 则

(i) $b^d=(1-a^\pi)\sum_{n=0}^\infty(au)^na^d+z+a^\pi(q\sum_{n=0}^\infty a^n+y)$,

(ii) 若 $\|aa^dua^d\|<1$, $\|aa^\pi au^2\|<1$ 和 $\|a^\pi u(a^\pi u)^da^\pi a\|<1$, 则

$$\|b^d-a^d\|\le\delta_1\|1-a^\pi\|+\delta_4+\delta_5+\delta_6,$$

其中 δ_1 取值和定理 2.2 一样以及 g 是 $\mathscr{A}$ 中的幂等元,

$$v=(1+a^du)^{-1}a^d,\quad t=\sum_{n=0}^\infty\left[a^\pi u(a^\pi u)^da^\pi a\right]^n,$$

$$m=\sum_{n=0}^\infty(p+q)\,t^{-(n+2)}((1-p-q)(a+u)q)\left[(1-p-q)aq\right]^n,$$

$$z=\sum_{n=0}^\infty v^{n+2}ua^\pi(a+u)^n[1-(a^\pi(a+u))(a^\pi(a+u))^d]-vua^\pi(a^\pi(a+u))^d,$$

$$\delta_4=\frac{1}{1-\|a^\pi u(a^\pi u)^da^\pi a\|},$$

$$\delta_5=\|p+q\|\sum_{n=0}^\infty\delta_4^{n+2}\|((1-p-q)(a+u)q)\|\,\|[(1-p-q)aq]^n\|,$$

$$\delta_6=\frac{\|ua^\pi\|\,\|a^d\|^2\|(a^\pi(a+u))^\pi\|}{(1-\|a^du\|)^2}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{\|a^d\|\,\|a+u\|}{1-\|a^du\|}\right)^n+\frac{\delta_1\|ua^\pi(a^\pi(a+u))^d\|}{\|a^du\|}.$$

证明 设 $p=aa^d$ 和 $a^\pi=1-p$, 则 a,a^d, u 可写成 (2.13). 由 $a^\pi u(1-a^\pi)=0$, 则

$$u=\begin{bmatrix}u_1&u_{12}\\0&u_2\end{bmatrix}_p,\quad b=\begin{bmatrix}a_1+u_1&u_{12}\\0&a_2+u_2\end{bmatrix}_p. \tag{2.24}$$

若 a 可逆, 类似定理 2.2 可证 (i).

下面考虑 $a \in \mathscr{A}^d$ 和 $\mathrm{Ind}(a) > 0$ 以及 $\sigma(a) \neq \{0\}$, 即 a 既不可逆也不是拟幂零. 类似定理 2.2 的证明, 则 $a_1 + u_1 \in p\mathscr{A}p$ 可逆且

$$(a_1 + u_1)^{-1} \oplus 0 = (1 + a^d u)^{-1} a^d = v. \tag{2.25}$$

由 (2.24), (2.25), 我们断定 $(a+u)^d$ 存在当且仅当 $(a_2+u_2)^d$ 存在 (即 $[a^\pi(a+u)]^d$ 存在).

下面考虑 a_2 经过扰动后 $a_2 + u_2$ 广义 Drazin 逆的表达式:

由 $a^\pi u^2 = a^\pi u$, 则 $u_2^2 = u_2$, $u_2 \in (p\mathscr{A}p)^\bullet$, 即 $\sigma(u_2) \subseteq \{1, 0\}$. 设 $q = u_2 u_2^d = u_2 u_2$, 则 u_2 有如下的形式

$$u_2 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}_q \left(\text{或 } u_2' = \begin{bmatrix} q & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q'}\right), \quad q = u_2 u_2^d \ (\text{或 } q' = u_2'(u_2')^d). \tag{2.26}$$

对于 $a_2 \in (1-p)\mathscr{A}(1-p)$, 则

$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_q \quad \left(\text{或 } a_2 = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix}_{q'}\right). \tag{2.27}$$

不妨假设 g 和 $1-g$ 如下

$$g = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q(\text{或 } q')}, \quad 1 - g = \begin{bmatrix} 1-q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q(\text{或 } q')}. \tag{2.28}$$

由 $g a^\pi a(1-g) = 0$, 我们可得

$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_q \quad \left(\text{或 } a_2 = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ 0 & a_{22}' \end{bmatrix}_{q'}\right). \tag{2.29}$$

由 (2.26)–(2.29), 则

$$a_2 + u_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + q & 0 \\ a_{21} + x_1 & a_{22} \end{bmatrix}_q, \quad \text{或 } a_2 + u_2' = \begin{bmatrix} a_{11}' + q & a_{12}' + x_2 \\ 0 & a_{22}' \end{bmatrix}_{q'}. \tag{2.30}$$

因为 (2.30) 中两种情况是对称的, 则下面只考虑 (2.30) 前一种情况. 因为 $q \in (1-p)\mathscr{A}(1-p)$ 是单位以及 a_2 拟幂零, 所以 $a_{11}, a_{22} \in (1-p)\mathscr{A}(1-p)$ 分别为拟幂零以及 $a_{11}+q \in (1-p)\mathscr{A}(1-p)$ 可逆.

为了得结果, 则需要作下面计算

$$\begin{aligned} [a^\pi u(a^\pi u)^d a^\pi(a+u)]^d &= 0 \oplus [a^\pi(a+u)]^d = 0 \oplus (q + a_{11})^{-1} \oplus 0 \\ &= 0 \oplus \sum_{n=0}^{\infty} a_{11}^n \oplus 0 = \sum_{n=0}^{\infty} [q(1-p)a]^n = t, \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}_p, \tag{2.32}$$

其中

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(a_{11}+q)^{-1}\right]^{n+2} (a_{21}+x_1)(a_{22})^n, \\ m &= \sum_{n=0}^{\infty} (p+q)\, t^{-(n+2)}((1-p-q)(a+u)q)[(1-p-q)aq]^n. \end{aligned}$$

由 (2.31), (2.32), 有

$$0 \oplus (a_2+u_2)^d = 0 \oplus \begin{bmatrix} (a_{11}+q)^{-1} & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}_q = t+m. \tag{2.33}$$

因为 a_1+u_1 可逆, 由引理 1.1 和 (2.24), (2.25), (2.33), 我们可得

$$(a+u)^d = \begin{bmatrix} (a_1+u_1)^{-1} & z \\ 0 & (a_2+u_2)^d \end{bmatrix}_p = (1-a^\pi)\sum_{n=0}^{\infty}(a^d u)^n a^d + z + t + m, \tag{2.34}$$

其中 z 表达式为 (2.24).

类似地, 对于 (2.30) 的第二式子也有同样的结果.

若 $a \in \mathscr{A}^{\mathrm{qnil}}$ 且 $a^\pi = 1$, 则

$$aa^\pi u^2 = au^2 = 0, \quad a^\pi a^2 = a^2 = 0,$$

即 $a+u$ 的证明为上面 a_2+u_2 的情况. 即 (i) 得证.

(ii) 由结论 (i), 有

$$\begin{aligned} b^d - a^d &= (1-a^\pi)\sum_{n=0}^{\infty}(a^d u)^n a^d + z + t + m - a^d \\ &= -a^\pi a^d + (1-a^\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(au)^n a^d + z + t + m. \end{aligned} \tag{2.35}$$

因为 $aa^d(a+u)aa^d = u_1 + a_1$ 可逆且 $||aa^d u a^d|| < 1$, 所以

$$\|(1-a^\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(a^d u)^n a^d\| \le \|1-a^\pi\| \frac{\|a^d u\|\,\|a^d\|}{1-\|a^d u\|} = \delta_1 \|1-a^\pi\|. \tag{2.36}$$

由 (2.31), $\|a^\pi u(a^\pi u)^d a^\pi a\| < 1$, 有

$$\|t\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty}[a^\pi u(a^\pi u)^d a^\pi a]^n \right\| \le \frac{1}{1-\|a^\pi u(a^\pi u)^d a^\pi a\|} = \delta_4. \tag{2.37}$$

为了证 (ii) 成立, 需作以下计算

$$\begin{aligned} \|m\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty}(p+q)\,t^{-(n+2)}((1-p-q)(a+u)q)[(1-p-q)aq]^n \right\| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\|(p+q)\,t^{-(n+2)}\|\,\|((1-p-q)(a+u)q)\|\,\|[(1-p-q)aq]^n\| \\ &\le \|(p+q)\|\sum_{n=0}^{\infty}\delta_4^{n+2}\|((1-p-q)(a+u)q)\|\,\|[(1-p-q)aq]^n\| = \delta_5, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} \|z\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+2} u a^\pi (a+u)^n (a^\pi(a+u))^\pi - v u a^\pi (a^\pi(a+u))^d \right\| \\ &\le \frac{\|ua^\pi\|\,\|a^d\|^2}{(1-\|a^d u\|)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|a^d\|\,\|a+u\|}{1-\|a^d u\|}\right)^n \|(a^\pi(a+u))^\pi\| \\ &\quad + \frac{\delta_1}{\|a^d u\|}\|ua^\pi(a^\pi(a+u))^d\| = \delta_6. \end{aligned} \tag{2.39}$$

由 (2.35)–(2.39), 我们可得

$$\begin{aligned}\|(a+u)^d - a^d\| &= \|(1-a^\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(a^d u)^n a^d + z + t + m\| \\ &\le \frac{\|1-a^\pi\|\,\|a^d u\|\,\|a^d\|}{1-\|a^d u\|} + \|z\| + \|t\| + \|m\| \\ &\le \delta_1\|1-a^\pi\| + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6. \end{aligned} \tag{2.40}$$

由 (2.40), (ii) 得证.

参 考 文 献

[1] Campbell S. L., Meyer C. D., Continuity properties of the Drazin pseudoinverse, *Linear Algebra Appl.*, 1975, **10**: 77–83.

[2] Castro González N., Koliha J. J., New additive results for the g-Drazin inverse, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, **134**: 1085–1097.

[3] Castro González N., Koliha J. J., Perturbation of the Drazin inverse for closed linear operators, *Integr. Equ. Oper., Theory*, 2000, **36**: 92–106.

[4] Castro González N., Koliha J., Wei Y., Error bounds for perturbation of the Drazin inverse of closed operators with equal spectral projections, *Appl. Anal.*, 2002, **81**: 915–928.

[5] Castro González N., Martínez-Serrano M. F., Expressions for the g-Drazin inverse of additive perturbed elements in a Banach algebra, *Linear Algebra Appl.*, 2010, **432**: 1885–1895.

[6] Deng C. Y., Wei Y., Perturbation of the generalized Drazin inverse, *Electronic J. of Linear Algebra*, 2010, **21**: 85–97.

[7] Deng C. Y., Wei Y., New additive results for the generalized Drazin inverse, *Math. Anal. Appl.*, 2010, **370**: 313–321.

[8] Djordjević D. S., Rakočević V., Lectures on Generalized Inverse, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, 2008.

[9] Han J. K., Lee H. Y., Lee W. Y., Invertible completion of 2×2 upper triangular operator matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 2000, **128**: 119–123.

[10] Koliha J. J., A generalized Drazin inverse, *Glasgow Math. J.*, 1996, **38**: 367–381.

[11] Martínez-Serrano M. F., Castro-González N., On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement, *Appl. Math. Comput.*, 2009, **215**: 2733–2740.

[12] Rakoćević V., Wei Y., The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications II, *J. Aust. Math. Soc.*, 2011, **70**: 189–197.

[13] Wei Y., Perturbation bound of the Drazin inverse, *Appl. Math. Comput.*, 2002, **125**: 231–244.

[14] Wei Y., Hu H., The Perturbation of the Drazin inverse and oblique projection, *Appl. Math. Lett.*, 2000, **13**: 77–83.

[15] Wei Y., Li X., Bu F., A perturbation bound of the Drazin inverse of a matrix by separation of simple invariant subspaces, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, **27**: 72–81.

[16] Wei Y., Wang G., The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications, *Linear Algebra Appl.*, 1997, **258**: 179–186.

[17] Xu Q., Song C., Wei Y., The stable perturbation of the Drazin inverse of the square matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2010, **31**: 1507–1520.